Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

2005

Volumen 18

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

VOLUMEN 18

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
CLAME

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

VOLUMEN 18

Editores

Javier Lezama
Cicata-*IPN*
Mario Sánchez
Cicata-*IPN*
Juan Gabriel Molina
Cicata-*IPN*

ISBN: 970-9971-00-X

Digitalizado en México/Junio de 2005

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

COMITÉ CIENTÍFICO DE EVALUACIÓN

Tabla de Contenidos

Presentación
Comisión Académica del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 2005 xvii

CATEGORÍA 1: ANÁLISIS DEL CURRÍCULUM Y PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS 1

Introducción 3

Tránsito entre Representaciones en Matemáticas ¿Pensamiento Global o Local? 5
Juan Alberto Acosta

Preconceptos en el Aprendizaje del Cálculo 11
Martha Alvarado y Carlos García

Papel de la Teoría de Conjuntos en la Construcción de los Números Naturales 19
Mario J. Arrieche

Significados de la Probabilidad en la Educación Secundaria 27
Carmen Batanero

Sistemas Sintéticos. Lo Inteligible en los Manuales para la Enseñanza 35
Alberto Camacho

La Metodología de la Verosimilitud Empírica 43
Gonzalo Delgado

Educación de Adultos ¿Saberes Matemáticos Previos o Saberes Previos a los Matemáticos? 51
María Fernanda Delprato

Propuesta Didáctica para la Enseñanza de las Matemáticas 57
Edith Dubon

Qué Ideas Tienen los Estudiantes Acerca de su Comprensión: Un Estudio Transversal 63
Inés Elichiribehety y María Rita Otero

Enseñanza y Comprensión del Enfoque Frecuencial de la Probabilidad en Segundo Grado de Secundaria 71
Saúl Elizarraras

Un Marco para la Evaluación de la Estadística en Ingeniería 79
Daniel Fernández y Mónica Guitart

La Resolución de Problemas como Herramienta de Diagnóstico del Proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática en Educación Diversificada y Profesional 87
Thairo Figueroa y Mario Arrieche

Ecuación Cuadrática: Una Ingeniería Didáctica para su Enseñanza 93
María Rey Genicio, Graciela Lazarte, Silvia Porcinito y Clarisa Hernández

Fractal: Ideas y Percepciones de Estudiantes entre 15 y 17 Años 101
Sabrina Harbin y Miriam Mireles

Métodos Participativos, Un Arma Poderosa para el Aprendizaje 109
Yolanda Hernández y Armando de Pedro Lugo

Concepciones que los Alumnos de Nivel Medio Superior Tienen sobre los Ángulos Negativos y Mayores de 360° 115
Rosario Lluck, Graciela Valdés, Santiago R. Velázquez y Gustavo Martínez

Dificultades de Comprensión de Estocásticos en la Educación Secundaria 123
José Manuel López

La Habilidad Ubicación Espacial Matemática, como Habilidad Esencial, en la Visualización Matemática 131
Lilia López, Alfredo Alanís y Olga L. Pérez

Convención Didáctica sobre la Demostración Geométrica 139
Efrén Marmolejo y María del Carmen Solano

Significados Personales de la Derivada en Estudiantes de Ingeniería 147
Albéniz A. Meléndez y Mario J. Arrieche

Una Propuesta para la Enseñanza de la Geometría en la Educación Primaria 155
Hermes Nolasco

Uso del Conocimiento Estadístico en Egresados de Psicología Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional 161
Arcelia Palacios, Cuauhtémoc G. Pérez, Yanelly Arellano, Nancy Hernández,Sonia Villaseñor y Angelina González

Plan Estratégico para Mejorar la Eficiencia Terminal en Cursos de Matemáticas 169
Carlos Daniel Prado

La Prensa como Medio y Recurso Didáctico en la Resolución de Problemas Matemáticos 177
Ana Guadalupe Quiroga y Olga Lidia Pérez

Didáctica de la Probabilidad y Estadística. El Caso de la Variable Aleatoria 185
Blanca R. Ruiz Hernández y José Armando Albert Huerta

Algunas Dificultades en la Conversión Gráfico-Algebraica de Situaciones de Vectores 193
José Luis Soto

La Mediación…un Factor Fundamental en la Construcción de Aprendizajes Significativos 201
Gloria Suhit y Marta Baunaly

Razonamiento Probabilístico en Estudiantes del Nivel Superior 207
Manuel Alfredo Urrea

El Desarrollo Intelectual y la Resolución de Problemas 215
María del Valle y Eduardo Mardones

Enseñanza y Comprensión del Enfoque Clásico de la Probabilidad en Primer Grado de Secundaria 223
Orlando Vázquez

El Papel de las Representaciones en el Éxito de la Resolución de Problemas 231
José Luis Villegas, J. Roberto García y Enrique Castro

CATEGORÍA 2: EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL 239

Introducción 241

Pensamiento Complejo y Educación Matemática Crítica 245
Martín Andonegui

Incremento, Diferencial y Aproximación Lineal 253
José Ismael Arcos

Sistema Para la Gestión, Evaluación y Seguimiento de Sistemas de Enseñanza de las Matemáticas mediante e-Learning 259
Juan Baltazar Cruz

Construyendo una Estrategia Metodológica Participativa en el Curso de Geometría del Currículo de Formación del Docente Integrador 265
Rosa Becerra

Geometría en Bachillerato 273
Gustavo Bermúdez

La Resolución de Problemas como un Medio para la Formación del Concepto de Media Numérica. Primera Parte 281
Otilio Bienvenido Mederos y José Enrique Martínez

Razones y Proporciones en la Dinámica Cotidiana 289
Anabelle Castro, Rommel Alvarado, Omar Gätgens y Francisco Rodríguez

Comparación de la Enseñanza de la Geometría en los Sistemas Escolares Chileno y Francés 295
Corine Castela e Ismenia Guzmán

Relación de Futuros Profesores de Matemáticas con la Geometría y sus Tareas 303

Corine Castela e Ismenia Guzmán

Las Funciones de la Demostración en el Aula de Matemática 307

Cecilia R. Crespo y Christiane C. Ponteville

La Geometría en el Arte: Los Vitrales de las Catedrales Góticas 313

Cecilia R. Crespo

Geometría para Armar 321

Cristina Ferraris

Geometría Dinámica en las Clases de Matemáticas 327

Claudia Flores y Betsabé Adalia Contreras

Prácticas Ostensivas en la Enseñanza de la Matemática 335

Dilma Fregona

Desarrollos Matemáticos en Arquitectura 341

María Dolores García y José Armando Albert

Conflictos Epistémicos en un Proceso de Estudio de la Noción de Función. Implicaciones para la Formación de Profesores 349

Juan D. Godino, Miguel R. Wilhelmi y Delisa Bencomo

Significados Institucionales y Personales de las Fracciones en Educación Básica 357

Juviry González y Mario Arrieche

Análisis del Desarrollo de la Puesta en Escena de una Situación Didáctica "La Función Exponencial 2x " con Estudiantes de Bachillerato 363

Jorge López y Javier Lezama

La Educación Matemática: Una Aproximación a su Comprensión desde una Visión Interdisciplinar 369

Andrés Moya

El uso Inadecuado de Conceptos Matemáticos en las Escuelas de Ingeniería 377

Alejandro Muñoz

Concepciones Dominantes en la Enseñanza del Concepto de Número Entero en Estudiantes de Formación Inicial 385

Hugo Parra

Transferencia de Resultados: Taller con Docentes de Escuela Media 391

Josefina Royo, Celia Torres, Edna Agostini, Ana Lasserre y Mercedes Naraskevicins

Una Propuesta para Reconstruir el Saber Didáctico y Matemático en un Curso de Actualización Docente 399

Yolanda Serres

Diseño de Gráficas a partir de Actividades de Modelación 405

Liliana Suárez, Carolina Carrillo y José Iván López

Desarrollo de Habilidades del Pensamiento en Forma de Conceptos 411

Tania Toledo y Violeta Fernández

El Desarrollo de Habilidades Matemáticas y Actividades Matemáticas Universales. Sus Implicaciones en la Formación de Profesores 417

Santiago Ramiro Velázquez

Concepciones de los Docentes sobre la Matemática. Su Incidencia en la Enseñanza y el Aprendizaje 425

Silvia Vilanova, M. Cristina Rocerau, Perla Medina, Mercedes Astiz, María Oliver, Susana Vecino y Guillermo Valdez

CATEGORÍA 3: CONSIDERACIÓN DE ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR 431

Introducción 433

Un Estudio del Teorema Fundamental del Cálculo en el Contexto Área Bajo la Curva 437
María Antonieta Aguilar

Una Alternativa para la Construcción Aritmética-Algebraica de las Convenciones Matemáticas Presentes en los Exponentes 445
Rocío Antonio y Gustavo Martínez

Prácticas Sociales y Argumentos: El Caso de lo Periódico 451
Gabriela Buendía

La Noción de Conservación en el Estudio del Área 457
Ma. Guadalupe Cabañas

Socioepistemología de la Predicción 463
Ricardo Cantoral, Juan Gabriel Molina y Mario Sánchez

Mecanismos para la Difusión del Discurso Matemático Escolar 469
Apolo Castañeda

La Socioepistemología en la Graficación del Discurso Matemático Escolar 477
Francisco Cordero

La Significación Física de la Integral a Partir de la Modelación de Fenómenos 483
Gildardo Cortés

El Concepto de Función: Un Breve Recorrido Epistemológico 489
Rosa María Farfán y Mario A. García

El Uso de las Gráficas en los Libros de Texto 495
Rebeca Flores y Francisco Cordero

Modelación de la Evolución de la Levadura: Un Estudio de las Prácticas Sociales del Ingeniero Bioquímico 503
Adriana Galicia y Jaime Arrieta

¿Son las Prácticas Sociales Fundamento para la Democratización de la Matemática? 511
Carlos García

La Construcción Social de la Noción de Variable 517
Enrique Javier Gómez, Crisólogo Dolores y Gustavo Martínez

Contrastes Epistemológicos del Binomio de Newton y la Serie de Taylor en Dos Variables en los Fenómenos Físicos 523
Hipólito Hernández

Los Logaritmos a Partir de la Covariación de Sucesiones 531
Marisol Hernández y Marcela Ferrari

Las Prácticas Sociales de Modelación y la Emergencia de lo Exponencial 537
Miguel Ángel Hernández y Jaime Arrieta

Entorno Sociocultural y Cultura Matemática en Profesores del Nivel Superior de Educación: Estudio de Caso: El Instituto Tecnológico de Oaxaca. Una Aproximación Socioepistemológica 543
Javier Lezama y Luz María Mingüer

La Función Logaritmo bajo la Perspectiva de la Construcción dada por Agnesi (1748) 551
Renata Ivonne López y Marcela Ferrari

Continuidad y Ruptura de Significados en el Tratamiento Escolar de los Exponentes 559
Gustavo Martínez

Los Procesos de Convención Matemática como Constituyentes en la Construcción Social de la Matemática de la Variación y el Cambio 567
Gustavo Martínez

Las Prácticas Sociales de Modelación Multilineal de Fenómenos en el Aula 575
Maria Esther Magali Mendez y Jaime L. Arrieta

Simulación de la Evolución: Una Práctica Social Bajo el Marco Cooperativo 583
Esther Moreno, Jaime Arrieta, Efrén Marmolejo, Leonora Díaz y Joaquín Padovani

Naturaleza de un Campo Conceptual del Cálculo Infinitesimal: Una Visión Epistemológica 589
Germán Muñoz

Dialéctica Entre lo Conceptual y lo Algorítmico Relativa a Prácticas Sociales con Cálculo Integral 597
Germán Muñoz

¿Cómo Trabajar los Límites Especiales $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$ y $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$? 605
Catalina Navarro y Ricardo Cantoral

A Través de lo Periódico, el Sol y las Estrellas son mi Reloj 613
Hipólita Patricio, Carlos A. García y Jaime L. Arrieta

Las Prácticas de Hacer Semejanzas en los Triángulos y la Emergencia de las Razones Trigonométricas 619
Hipólita Patricio, Carlos A. García y Jaime L. Arrieta

El Tratamiento de Fenómenos Físicos para Aprender Matemáticas 625
Pericles Ramírez y Gildardo Cortés

Análisis Socioepistemológico de los Procesos de Matematización de la Predicción en la Economía 631
Saúl Ezequiel Ramos

Modelación en Matemática Educativa 639
Liliana Suárez y Francisco Cordero

La Modelación y las Gráficas en Situaciones de Movimiento con Tecnología 645
Araceli Torres y Liliana Suárez

CATEGORÍA 4: EDUCACIÓN A DISTANCIA Y EMPLEO DE LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS 651

Introducción 653

Educación a Distancia: Una Experiencia para el Ingreso en la FRBB 655
Mónica García, Gustavo Escobar, Gloria Suhit, Marta Vidal, Martín De Lucca, Carlos Frank y Eduardo Bambill

Visión Estudiantil de la Recta y Continuidad 659
Carlos García y Martha Alvarado

Una Caracterización del Contrato Didáctico en un Escenario Virtual 667
Gisela Montiel

Ambiente Virtual con Soporte en la Multimedia y el Software Mathcad para el Aprendizaje de la Teoría de Polinomios 673
Rafael Pantoja y Ricardo Ulloa

La Enseñanza del Concepto de Número Real en Ambientes Virtuales Interactivos 681
Nazly E. Salas y Harold Castillo

Un Estudio sobre Interacciones y Comunicación en Educación Matemática a Distancia 687
Mario Sánchez y Rosa María Farfán

El Uso de las Nuevas Tecnologías de la Información en la Enseñanza de las Matemáticas 693
Dario Santiago y Lourdes Quezada

Tendencias Actuales en la Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas y la Utilización de las Nuevas Tecnologías de la Información y las Comunicaciones en la Educación 701
Yanet Villanueva

CATEGORÍA 5: USO DE LA TECNOLOGÍA EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS 707

Introducción 709

Un Proceso de Actualización Integral de Profesores de Matemáticas en el Uso Didáctico de los Sistemas de Cómputo Simbólico: Resultados Preliminares y Reflexiones 711

Ana Guadalupe del Castillo, José Ramón Jiménez, Enrique Hugues y Lucía Guadalupe Dórame

Determinación de Raíces de Ecuaciones utilizando la Calculadora Gráfica como Medio de Enseñanza y Aprendizaje 717
Esther Ansola y Eugenio Carlos

El Uso de la Calculadora Graficadora en la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria 723
Eugenia Apreza y Santiago Ramiro Velázquez

El Computador en la Clase de Matemáticas: Desde lo Dinámico y lo Semiótico 727
Walter F. Castro y Hugo F. Pardo

Algunos Usos de la Computadora en el Aula 733
Armando Cuevas y Magally Martínez

Un Acercamiento Alternativo al Cálculo Diferencial 741
Carlos Armando Cuevas y Hugo Rogelio Mejía

Matemáticas y Nuevas Tecnologías en Costa Rica 749
Edison De Faria

Uso de Hojas Electrónicas en la Enseñanza de la Distribución Normal 757
Enrique Hugues

La Construcción de la Prueba Geométrica en un Ambiente de Geometría Dinámica en Secundaria 765
Víctor Larios

Enseñanza del Cálculo con Animaciones 771
José Roberto Mandujano

Aplicabilidad Pedagógica de las Macros (Cabri II) en la Enseñanza de la Geometría 779
Eduardo Mardones y Andrés Ortiz

Laboratorio Virtual de Matemáticas 785
Emir Martínez, Jaime L. Arrieta y Antonio Canul

Un Software Asistente de Geometría y Una Visualización Dinámica del Teorema Fundamental del Cálculo 791
Rafael A. Meza

La Calculadora Gráfica Como Recurso Didáctico en el Aprendizaje del Cálculo de Integrales Dobles 799
Eugenio Carlos y Leonor Fernández

ADENDA 806

Importancia del Análisis del Discurso en el Aula para la Investigación Educativa 807
Antonia Candela

Los Usos Sociales de la Matemática en las Ciencias Prácticas de la Cultura Maya: Un Estudio Socioepistemológico 813
Ricardo Cantoral y Olda Covián

Tecnologías de Información y Comunicación en el Postgrado de Enseñanza de la Matemática. Caso UNEG. 819
Sandra L. Castillo

Importancia en Matemática Educativa, de la Interrelación entre la Teoría Matemática, Técnicas Modernas de Cómputo y Problemas del Contexto Empresarial para Motivar a Docentes y Estudiantes 825
De las Mercedes Cribeiro Josefina

Incoherencias y Pensamiento Matemático: La Influencia de los Lenguajes Matemáticos y Representaciones sobre el Razonamiento en el Dominio del Infinito 833
Sabrina Harbin

Ingeniería Didáctica en Física-Matemática 841
Marta J. Marcolini

Perspectivas Curriculares y Uso Didáctico de la Modelación en Educación Matemática 847
Víctor Martínez y José Ortiz

¿Se pueden crear Matemáticas desde la Didáctica de la Matemática? 853
Tomás Ortega

Sobre la Enseñanza de Límites Usando Calculadoras Gráficas 859
Antonio R. Quezada

Resignificación del ph por Medio de la Covariación de Progresiones Geométricas y Progresiones Aritméticas 867
Miguel Romero y Marcela Ferrari

Análisis Gráfico de funciones 873
María del Socorro Valero

Presentación

El Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, CLAME, tiene entre sus propósitos, posibilitar el intercambio entre colegas - profesores e investigadores – creando espacios académicos que favorezcan el contraste periódico de experiencias de docencia e investigación en castellano, orientando sus acciones en beneficio de los sistemas escolares de nuestra América Latina.

CLAME, ante el aumento en la participación de colegas de los distintos países latinoamericanos, así como la creciente profesionalización de la comunidad que año con año participa activamente en sus reuniones, ha ido configurando proyectos académicos que perfilan y consolidan el proceso de fortalecimiento de la disciplina en América Latina, bajo la premisa de conservar la pluralidad de los acercamientos existentes y el respeto a las tradiciones educativas propias de cada uno de los países miembros.

Es en este contexto de ideas y en cumplimiento además de uno de los propósitos específicos del CLAME, *promover la creación, organización, acumulación y difusión del conocimiento referidos a la matemática educativa*, se publica año con año el Acta latinoamericana de Matemática Educativa.

Los artículos publicados el Acta 2005, debieron cumplir con dos requisitos básicos, haber sido expuestos en alguna de las actividades de Relme 18 y su posterior presentación en forma de artículo, sujetándose a una evaluación rigurosa de pares especialistas en el campo. La publicación en el Acta de un trabajo presentado en Relme no es automática. Con esto, lo que se persigue es hacer del Acta un instrumento de calidad que difunda del estado del arte que en materia de docencia e investigación en nuestro campo, se realiza por amplio número de profesores en investigadores en Latinoamérica.

En el Acta 2005, el comité académico ha trabajado en tres aspectos que ha considerado fundamentales y que esperamos contribuyan a la calidad de la publicación. El primero, poner mayor cuidado en el proceso de evaluación, segundo, vigilar el cumplimiento del formato establecido, especialmente en el aspecto de la presentación de las referencias bibliográficas, tanto solicitándoles a los autores la corrección de la misma, como interviniendo directamente en una revisión del total de la bibliografía de los artículos aprobados. Por último, haciendo un ejercicio de clasificación de los artículos en cinco categorías temáticas que consideramos representan de manera sintética el pensamiento global de los artículos propuestos para el Acta.

Las categorías que componen el Acta son:

Categoría 1: Análisis del Currículum y Propuestas para la Enseñanza de las Matemáticas.

Categoría 2: El Pensamiento del Profesor, sus Prácticas y Elementos para su Formación.

Categoría 3: Consideración de Aspectos Socioepistemológicos en el Análisis y Rediseño del Discurso Matemático Escolar.

Categoría 4: Educación a Distancia y Empleo de las TIC's en el Aprendizaje de las Matemáticas.

Categoría 5: Uso de la Tecnología en el Proceso de Aprendizaje de las Matemáticas.

Cada una de estas categorías, va precedida de una breve introducción donde se reflexiona sobre el tema y se comentan de manera sucinta el contenido de los artículos que la componen.

La Comisión Académica del Acta, agradece a todos los profesores e investigadores que enviaron sus artículos, pusimos nuestra mayor atención en la constitución de este documento y nos sentimos orgullosos de haber podido prestar este servicio académico.

Agradecemos a los árbitros por su contribución solidaria y profesional, así mismo agradecemos de manera especial a todos los colegas que de manera generosa y entusiasta nos regalaron su tiempo, inteligencia y creatividad para la realización de este proyecto.

Comisión Académica del
Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 2005.
Junio de 2005, México.

Categoría 1:

Análisis del Currículum y Propuestas para la Enseñanza de las Matemáticas

Introducción

Los trabajos de los investigadores de matemática educativa, desde un inicio han puesto de manifiesto el gran interés existente en el análisis del curriculum y el diseño y desarrollo curricular. Este interés, por supuesto no se ha mantenido estático, sino que ha ido evolucionando y nutriéndose año tras año del intercambio de ideas y propuestas que se produce en las reuniones en las que se presentan y comparten temáticas y abordajes diversos y a través de publicaciones que denotan cada vez más la madurez de nuestra comunidad latinoamericana.

En este capítulo se presenta una serie de trabajos que muestran el estado actual de algunas de las investigaciones que se están realizando en la comunidad latinoamericana en relación al análisis del curriculum y la formulación de propuestas para la enseñanza de diversos contenidos de la matemática.

Las reflexiones acerca del pensamiento matemático y el aprendizaje de los conceptos matemáticos permiten comprender algo más acerca de los procesos que llevan a cabo los alumnos cuando se enfrentan a nuevos conceptos matemáticos. El análisis del marco institucional vigente y del desempeño de docentes y alumnos en escenarios específicos, permite la identificación de dificultades de unos y otros. Sobre la base de este análisis y tomando como antecedente los problemas del aprendizaje, se logran propuestas de estrategias innovadoras en la enseñanza de la matemática, apoyadas en una concepción de aprendizaje constructivo y significativo. En muchas oportunidades, las dificultades son ocasionadas por la presentación de los conceptos matemáticos aislados de contexto práctico, social y de aplicación.

En relación con los marcos teóricos presentes en estos trabajos, podríamos decir que confluyen muchas veces marcos teóricos eclécticos, mostrando una amplia gama de formaciones y de investigaciones a las que nuestra comunidad se encuentra abierta, y mediante las cuales se enriquece. En esta confluencia, es posible reconocer una de las características de los investigadores en matemática educativa siempre han manifestado, que consiste en considerar que cada una de las aproximaciones tiene algo que aportar al campo y que no es posible rechazar ninguna de ellas, siendo necesario reconocer que las múltiples perspectivas de estas aproximaciones diferentes pueden realizar aportes importantes para el análisis integral de los objetos de estudio e investigación de la matemática educativa.

Muchas veces el punto de partida para las investigaciones e matemática educativa es la detección del bajo índice de aprobación en los cursos de matemática en los distintos niveles, de las dificultades en la comprensión de un tema por parte de los alumnos, de la falta de vinculación de conceptos afines, o dicho en términos más generales la existencia de aprendizajes matemáticos son logrados satisfactoriamente. A partir de esto, surge inmediatamente en los docentes e investigadores la necesidad de discutir la pertinencia de los contenidos seleccionados, de las estrategias y procedimientos utilizados y de la revisión de las formas de evaluación utilizadas. Esta reflexión da origen a la mayoría de las investigaciones que estamos presentando en este capítulo.

Sin lugar a dudas en estas reflexiones cobra singular importancia el escenario en el que se desenvuelve la comunidad educativa. Las distintas respuestas van dando origen a propuestas de ingenierías didácticas para lograr una enseñanza aprendizaje más eficiente. En estas propuestas aparecen como ideas centrales la vinculación e integración permanente entre los conceptos, la presentación de actividades de aprendizaje variadas que aprovechan los recursos existentes, la valoración de las distintas representaciones, la importancia del aprendizaje colaborativo y el rediseño de métodos de evaluación. Se pone de manifiesto en estas investigaciones la presencia de equipos de investigadores a veces interdisciplinarios que permiten tener una visión integral de la problemática y a partir de ella la formulación de propuestas en las que se ponen de manifiesto elementos teóricos epistemológicos y cognitivos diversos.

Tránsito entre Representaciones en Matemáticas ¿Pensamiento Global o Local?

Juan Alberto Acosta
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
México
acostah@uaeh.reduaeh.mx
Pensamiento Matemático Avanzado – Nivel Medio

Resumen

Este trabajo pretende dar a conocer el avance, que hasta el momento se ha logrado, en la línea de investigación: "Visualización y pensamiento global en Matemáticas", la cual persigue, a partir de la Teoría de Representaciones Semióticas de Duval, la caracterización del estilo de pensamiento global y local, de estudiantes de nivel medio superior y superior y de sus profesores. En particular reporto los resultados preliminares encontrados hasta el momento con estudiantes de primeros semestres de licenciatura al abordar un problema de precálculo, contrastado con desempeños en ajedrez para interpretar aspectos semejantes en cuanto a la forma local o global de pensar un problema viendo sus registros que lleven a resultados que pudieran servir en la mejora de la enseñanza de algunos temas de matemáticas.

Antecedentes

En las últimas décadas, la matrícula del nivel medio superior en México, ha crecido en gran medida. En 1940, la población era de 10,000 estudiantes, mientras que en 1997 fue de 2,438,676. Este aumento impresionante, ha originado serios problemas en el sector educativo nacional, entre los cuales resalta el bajo nivel de aprovechamiento de los estudiantes de bachillerato. Entre las posibles causas del bajo nivel de aprovechamiento de los estudiantes se cuenta la improvisación de muchos de los profesores que atienden la creciente demanda de jóvenes que ingresan a ese nivel (Acosta J. A, Ávila O., Barrera F., Castillo O., Palazuelos S., Roldán O. & Rondero C, 2004).

No obstante la puesta en marcha de algunos programas de formación y actualización docente, impulsados por la Secretaría de Educación Pública en el nivel básico (primaria y secundaria), los resultados de los estudiantes mexicanos que participaron en el examen que aplicó la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico[1] (OCDE), fueron poco satisfactorios, al ubicarse nuestro país en penúltimo lugar, obteniendo 387 puntos, siendo el promedio de 500 puntos (Acosta, 2003).

Sobresale la correlación de los datos anteriores con los resultados obtenidos al aplicar un examen diagnóstico a 753 estudiantes de semestres iniciales del ICBI de la UAEH, del año 2000 al 2003, que consistió en diez preguntas: un problema de razones y proporciones; otro de suma de fracciones; tres de trigonometría (funciones trigonométricas, triángulo isósceles y teorema de Pitágoras); y dos de graficación. Del total de alumnos, solamente 35, o sea el 4.5 %, obtuvieron más del 70 % de aciertos (Acosta, 2003).

[1] Periódico Reforma del 4 de diciembre de 2001

Asimismo, el examen diagnóstico referido en el párrafo anterior, se aplicó a 21 profesores de primaria y secundaria que tomaron el curso corto: "Pensamiento Global en Matemáticas" impartido en el I Coloquio de Matemática Educativa para profesores en abril de 2002. Resultando que de los 14 docentes de secundaria, dos obtuvieron más del 70 % de aciertos, cinco en el intervalo del 50 % a 70 % y los otros siete menos del 50 %. De los siete de primaria, tres obtuvieron menos del 25 % de aciertos; y los otros cuatro en el intervalo de 25 % a 70 % aciertos. En total, solamente dos profesores, o sea menos del 10 %, obtuvieron más del 70 % de aciertos (Acosta, 2003).

Marco teórico

La percepción que tiene un estudiante promedio acerca de los conceptos matemáticos es en ocasiones local, de acuerdo al curso que esté llevando o los que ya haya tomado. Enfatiza algún aspecto en particular (algebraico, numérico, gráfico, oral, dinámico o estático); esto se debe a que en ocasiones, el profesor prioriza el aspecto algorítmico de la matemática, y casi de manera general no transita a alguna otra representación, lo cual repercute desfavorablemente en la cognición de los estudiantes. El desarrollo del pensamiento matemático en el estudiante debe promoverse mediante actividades que, como lo señala Duval (1999), propicien *la diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumente las capacidades cognitivas de los sujetos y por tanto sus representaciones mentales.* El estudiante de cursos iniciales de matemáticas, generalmente tiene percepciones y representaciones limitadas de saberes y procesos de la matemática, un pensamiento nó holístico un tanto local de los saberes.

Cualquier persona tiene representaciones mentales, es decir, un conjunto de imágenes y de concepciones que puede tener, sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que les está asociado. Las representaciones semióticas, es decir aquellos productos constituidos por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfica, figura geométrica) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales; es decir para hacerlas visibles o accesibles a otros. Aunque como los dice Duval (1999), esto va más allá, *Las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma.*

El pasar de un sistema de representación a otro o la movilización simultanea de varios sistemas de representación en el transcurso de un mismo recorrido intelectual, fenómenos tan familiares y tan frecuentes en la actividad matemática, para nada son evidentes o espontáneos para la mayoría de los alumnos. El encerramiento persiste incluso después de que en la enseñanza se hayan utilizado ampliamente diferentes sistemas semióticos de representación (Duval, 1999). Este encerramiento resulta del fenómenos de no congruencia entre las representaciones de un mismo objeto que proviene de sistemas semióticos diferentes.

Las consideraciones visuales, como lo señala Hitt (1997), son importantes en la resolución de problemas, esto tiene que ver con una visión global, integradora, holística, que articule, libre de contradicciones. Pero no basta tener varias representaciones, es necesario desarrollar la habilidad de pasar de una a otra cuando sea necesario. Duval (1997) presenta un ejemplo, "la expresión $xy \geq 0$ y la representación gráfica cartesiana de dos cuadrantes determinados respectivamente por semi-ejes y y x x positivos, x y y negativos, son congruentes si se pasa de la escritura algebraica a la gráfica, pero no lo son a la inversa". Algunos profesores, también se presentan incongruencia al transitar de una representación a otra, tal es el caso reportado por Acosta (1999), donde se realizaron entrevistas video-grabadas a cuatro profesores preguntándoles el valor de la derivada y de la función, en x = a, en referencia a las gráficas de f(x) y su tangente en x = a. Dos de los maestros de licenciatura que no son profesores de Cálculo, encontraron el valor de la función, teniendo dificultad para encontrar el de la derivada; los otros dos profesores, uno de bachillerato y el otro de licenciatura encontraron f(a) viendo el esquema. f'(a) lo encontraron analíticamente, no siendo relevante la representación gráfica para la solución. En el mismo proyecto se entrevistaron a tres profesores, dos de bachillerato y uno de licenciatura, preguntándoles si la solución algorítmica de una integral impropia $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4}=-\frac{2}{3}$ era correcta. Los dos primeros se encapsularon en una sola representación: la algebraica – algorítmica. El tercer profesor, de manera espontánea e inmediata comentó sobre la discontinuidad de la función a integrar y por consecuencia la contestación esperada (Acosta, 1999).

Por lo anterior, suponemos que el estilo de pensamiento, un "estilo global de pensar", que emplean expertos en ámbitos diferentes, puede tener en común los procesos avanzados de pensamiento, en el sentido que comenta Cantoral (1997), el proceso avanzado de pensamiento matemático. Así un buen jugador de ajedrez, inserta pensamiento, en un ambiente de competencia, sobre tópicos de ajedrez y por otro, procesos avanzados del pensamiento. Nuestro interés es investigar desde el punto de vista cognitivo, los elementos empíricos, como el lenguaje, las representaciones, el razonamiento, que proporcionen información acerca de los procesos mentales de pensamiento que permitan comprender, en un segundo momento como una persona aprende matemáticas. Además de preguntarnos si el pensamiento global es característico de un experto en su ámbito, y en particular en la enseñanza de la matemática, y en que grado un dispositivo físico lúdicamente manipulable sería una representación semiótica, que forme parte de un sistema de representaciones de un objeto matemático.

Experimentación

La parte experimental, consistió en dos etapas, la primera en el análisis de un video de una partida de ajedrez entre un novato y un experto; y la segunda en dos entrevistas video-grabadas, una a un estudiante no aventajado y otra a uno aventajado.

Tanto el novato, como el experto en ajedrez son estudiantes de segundo semestre de la licenciatura en Sistemas Computacionales de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, e integrantes del "Club Universitario de ajedrez". Los alumnos, "aventajado" y "no aventajado" son estudiantes de primer semestre de la misma licenciatura.

El propósito de analizar los comentarios de los contendientes en la partida de ajedrez, es caracterizar el tipo de pensamiento, a través de lo expresado por ellos, en cada jugada.

La partida de ajedrez se llevó a cabo en aproximadamente 15 minutos, jugó con blancas el novato y con negras el experto; ganó el experto.

En cuanto a las entrevistas sobre matemáticas, se pidió por separado que dijeran y escribieran todo lo que se le ocurriera para obtener la solución de la desigualdad:

$$x^2 + x - 2 \geq 0$$

El propósito de esta entrevista es caracterizar el estilo de pensamiento que tiene el estudiante, a través del lenguaje, las representaciones, analíticas y gráficas, y su tránsito entre ellas, que se manifiestan durante el desarrollo hacia la solución.

Análisis preliminar de los resultados de la experimentación

Comentarios de las primeras jugadas de la partida de ajedrez

Primera jugada

Novato (blancas)	Experto (negras)
e3	e5
Muevo peón de rey, para sacar alfil	Dominio de espacio
Comentario: La perspectiva del novato es mover un peón, posteriormente involucrar al alfil; en cambio el experto espera iniciar el dominio del centro del tablero con un movimiento más agresivo.	

Segunda jugada

Novato (blancas)	Experto (negras)
Ac4	d5
Muevo alfil para tomar más piezas afuera de más valor	Desarrollo y dominio de centro con ataque al alfil blanco
Comentario: Mientras que el novato mueve el alfil para poner en juego otras piezas, el experto domina el centro y ataca al mismo tiempo al alfil.	

Tercera jugada

Novato (blancas)	Experto (negras)
Ab5+	c6
Ahora el me presiona con comer mi alfil y entonces avanza 1 casilla y lo pongo en Haque	Jugada de desarrollo, fortificación del centro y quita el jaque
Comentario: El novato dá jaque, sin perspectiva de que cause algún daño considerable. En cambio el experto se cubre del jaque y al mismo tiempo fortalece el centro del tablero.	

Cuarta jugada

Novato (blancas)	Experto (negras)
Aa4	Cf6
Me veo obligado a retroceder alfil para que no me coma	Desarrollar caballo de rey para enroque y posterior ataque al rey blanco
Comentario: El novato tiene que retroceder, para no perder el alfil. El experto mueve el caballo para apoyar al centro y además le proporciona perspectiva para posteriormente proteger al rey	

Comentarios de la entrevista de matemáticas con el estudiante aventajado (15 minutos)

En su primera respuesta dice que el signo del término cuadrático dará información de cómo se dibujan las ramas de la parábola; calcula las raíces, factorizando la expresión y las ubica en la recta numérica, manifestando el intervalo solución y dando información sobre la notación de intervalos cerrados (al decir que se llena el círculo cuando el valor extremo se incluye en el intervalo)

En su segunda intervención el estudiante aventajado, expresa verbalmente y con representaciones en el pizarrón la solución ($\{(-\infty,-2)\cup(1,\infty)\}$)

Comentarios de la entrevista de matemáticas con el estudiante no aventajado

En su primera respuesta se enfoca a obtener las raíces de la función cuadrática, factorizándola y después se refiere a la desigualdad y manifiesta despejar x.

Al preguntarle que tipo de función responde que es cuadrática y hace referencia a $y = x^2$ y a su gráfica. Comenta que la involucrada en la desigualdad tiene un defasamiento con respecto a la que escribió, sin precisarlo.

Después de guiarla hacia la obtención de las raíces por la fórmula general, aún no las relaciona con la solución de la desigualdad.

Hacia el final de la entrevista dice: ".x puede tomar todos los valores que estén antes de –2 o después de 1" y escribe en el pizarrón: $-2 \geq x \geq 1$ **y pregunta "¿Seria así?"**

Reflexiones finales

Existe evidencia por trabajos recientes de investigación que estudiantes de Precálculo logran transitar de una representación a otra, en los casos de problemas rutinarios, aunque generalmente de la representación algebraica a la gráfica y verbal y nó a la inversa. Pero en general muestran una carencia de vinculación coherente de una representación a otra.

Por otra parte los estudiantes que logran vincular al menos dos representaciones, y transitar en ambos sentidos entre ellas, presentan elementos de un pensamiento global que le permite mejorar la cognición de un objeto matemático, que el que tiene un estudiante que se desenvuelve en una sola representación, ó en varias pero sin la habilidad de pasar de una a otra cuando es necesario, caracterizando esto como un pensamiento local.

El experto de ajedrez, por sus comentarios escritos acerca de los movimientos efectuados, pudo ligar una secuencia de jugadas, que le permitió dominar paulatinamente el juego. Las representaciones manifestadas son diferentes a las de matemáticas, pero el que se enlacen grupos de posiciones con otras, denota una vinculación fluida entre las mismas, caracterizando en este sentido un pensamiento global en este contexto del juego ciencia.

Una aproximación de la idea de lo que es pensamiento global, es el conjunto de representaciones mentales, manifestadas por las representaciones semióticas coherentemente vinculadas (tránsito fluido en ambos sentidos), que son manifiestas de un objeto del contexto que se trate. Por otra parte el pensamiento local es el conjunto de representaciones mentales, manifestadas por las representaciones semióticas sin vincularse entre sí; ó por el tránsito dentro de una sola representación.

En seguida se proponen algunas preguntas, a las que se pretenden contestar a mediano plazo: ¿Un dispositivo físico lúdicamente manipulable sería una representación semiótica, que formara parte de un sistema de representaciones de un objeto matemático (Acosta, 2000)? ¿El pensamiento global es característico de un experto en su ámbito? ¿La manipulación lúdica de algún "Ingenio" del MIM puede ser parte de un sistema semiótico de representaciones acerca de un objeto matemático en particular? ¿La construcción ordenada y orientada de algún "Ingenio matemático" puede ser un elemento semiótico de un sistema que conlleve a un estilo de pensamiento global de un objeto matemático en particular?

Creemos que la percepción global de conceptos y procesos, mejora el rendimiento escolar, a través de la interacción de las representaciones de los objetos matemáticos, permitiendo una mejor cognición de los saberes matemáticos mediante una reestructuración los mismos.

Referencias Bibliográficas

Acosta, J. A. (1999). *Acerca de la resistencia a la visualización en Cálculo. Un caso con profesores II,* COMAT99, Cuba.

Acosta, J. A. (2000). *Museo Interactivo de Matemáticas*, II Simposium Internacional "Las Humanidades en la Educación Técnica ante el siglo XXI", y V Simposium Nacional "La Educación Técnica en México", IPN – ESIQIE, México.

Acosta, J. A. (2003). *Representaciones en Matemáticas y otro ámbito, ¿Pensamiento Global o Local?* Memoria del XXXVI Congreso Nacional, Sociedad Matemática Mexicana, Pachuca, Hidalgo.

Acosta J. A. Ávila O., Barrera F., Castillo O., Palazuelos S., Roldán O. y Rondero C.(2004) *Rediseño Curricular de la Maestría en Ciencias con Orientación en la Enseñanza de la Matemática*, UAEH, México.

Cantoral, R. (1997). *Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición*, México, Serie: Antologías Número 1, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV.

Eisenberg T. y Dreyfus T. (1990). *On the Reluctance to Visualize in mathematics*, artículo del texto: "Visualization in Teaching and Learning Mathematics", Cunningham & S. Zimmermann. M.A.A. Notes, Nº 19, Mathematical Association of America.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*, Universidad del Valle, Instituto de educación y Pedagogía, Colombia.

Hitt, F. (1997). *Sistemas semióticos de representación. Avance y perspectiva, 16*. Mayo-junio, CINVESTAV, México.

Preconceptos en el Aprendizaje del Cálculo

Martha Alvarado y Carlos García
Instituto Tecnológico de Puebla
México
maraare@yahoo.com, cgfranchini@yahoo.com
Educación a Distancia – Nivel Superior

Resumen

Tomando como antecedentes los problemas del aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral de los estudiantes que ingresan al nivel superior del Instituto Tecnológico de Puebla se estudia como se puede mejorar el proceso de aprendizaje, conocidos los preconceptos que los estudiantes han formado sobre los tres conceptos básicos de un curso de Cálculo. El problema específico es: "determinar los preconceptos que el estudiante posee sobre los tres conceptos básicos del curso de Cálculo –límite, derivada e integral– y catalogar su modificación mediante el desarrollo de actividades individuales realizadas por medio de la educación virtual no asesorada". El proyecto permitió localizar y robustecer estos preconceptos básicos mediante acciones didácticas de autoestudio mediante materiales en línea y análisis de contexto.

Introducción y planteamiento del problema

Los conceptos del Cálculo, específicamente los de límite, derivada e integral, estás asociados a ideas eminentemente contextuales que parecen no tener relación con las estructuras matemáticas que los precisan –al menos ese es el supuesto básico que consideran muchos estudiantes–, por tanto al estudiar dichos conceptos su aprendizaje se ve limitado porque tratan de memorizar las estructuras algebraicas que los definen ajenos a la realidad del mundo que pueden presentar. De este hecho se desprende que les resulta muy difícil el poder relacionar a esas estructuras con diferentes conceptos de la vida diaria. Paralelamente, y tal vez de una manera ingenua, es de esperar que el estudiante haya integrado a sus estructuras cognitivas preconceptos asociados al límite, derivada e integral, adquiridos como parte de su lenguaje cotidiano; por tanto y con el afán de mejorar el aprendizaje de los mismos resulta importante indagar en que consisten tales ideas ingenuas, para que con base en los andamiajes propuestos en el aprendizaje significativo de la teoría de Ausubel, proponer estrategias didácticas que se fundamenten en esas ideas y construir a partir de ellas al concepto formal matemático objeto del curso del Cálculo.

Objetivo

Indagar sobre los preconceptos que un estudiante tiene sobre los diferentes conceptos de un curso, haciendo eco a la frase de Ausubel, "*indaguemos lo que el estudiante sabe y actuemos en consecuencia*". Bajo la posibilidad de construir estructuras cognitivas débilmente fundamentadas y ajenas al contexto cotidiano del estudiante, y no siendo esta la situación deseable, resulta importante poder reconstruir esos preconceptos hacia "conceptos fuertes", construidos no sobre la formalización del lenguaje matemático, si no por el contrario; con base en estrategias didácticas traducidas en acciones individuales de aprendizaje dentro de un "escenario de aprendizaje" prediseñado, lograr que el estudiante observe situaciones contextuales de su vida cotidiana y de ellas interiorice al concepto en acción, y así abstraer de manera natural las características esenciales y las no esenciales de cada concepto, del tal forma que antes de que se dé el proceso de estudio formal, el alumno construya y "aprehenda" los conceptos bajo un proceso ajeno a la memorización, pero sí dirigido a su autoconstrucción. De manera concreta, se espera de la investigación:

1. *Determinar los preconceptos que el estudiante tiene sobre los tres conceptos básicos del Cálculo: límite, derivada e integral.*
2. *Reconstruir los preconceptos con base a acciones de aprendizaje individuales.*
3. *Catalogar la modificación de los preconceptos una vez realizadas las acciones de aprendizaje individuales.*

Hipótesis

La investigación se centra en un conjunto de supuestos (creencias) que han sido analizados a lo largo de la experiencia de los autores impartiendo cursos de matemáticas en el nivel superior, y que se han dejado entrever a lo largo de los apartados previos.

Dentro de esos supuestos básicos se pueden considerar, entre otros:

1. El estudiante posee un bajo dominio algebraico y matemático en general porque desconoce las aplicaciones contextuales de los conceptos que estudia.
2. La manera tradicional en que el estudiante ha cursado las matemáticas le han hecho creer que estas son áridas y carentes de aplicaciones reales.
3. Las matemáticas se ven como un obstáculo a librar, ***más que*** como un aprendizaje necesario.
4. El estudiante cree que "Aprender matemáticas" es poder resolver cientos de ejercicios de manera rutinaria, aunque no sepa para que se aplican esos resultados.
5. El aprendizaje significativo de las matemáticas se logra si el estudiante construye los conceptos por medio del análisis de situaciones contextuales de su vida cotidiana.
6. Es posible que el estudiante interiorice los conceptos matemáticos si realiza actividades que le permitan observar a los conceptos en acción y esa observación le invita a un análisis y discusión de lo que observa.
7. Si el estudiante encuentra la motivación adecuada, realizará las acciones necesarias para su aprendizaje; más aún, esa motivación se puede lograr con los propios cuestionamientos sobre las cosas que le rodean o le ocurren de manera cotidiana. Es decir si el nuevo conocimiento –aunque sea no formal– le permite entender y por tanto explicar los hechos que ocurren a su alrededor.

Con estos supuestos como antecedentes, la hipótesis de trabajo considerada es:

Dado un conjunto de cuestionamientos y acciones pedagógicas sobre hechos cotidianos, el estudiante exterioriza sus preconceptos del cálculo, los cuestiona y modifica, de tal forma que construye preconceptos más robustos fundamentados en la reconstrucción de los previos.

Marco de referencia

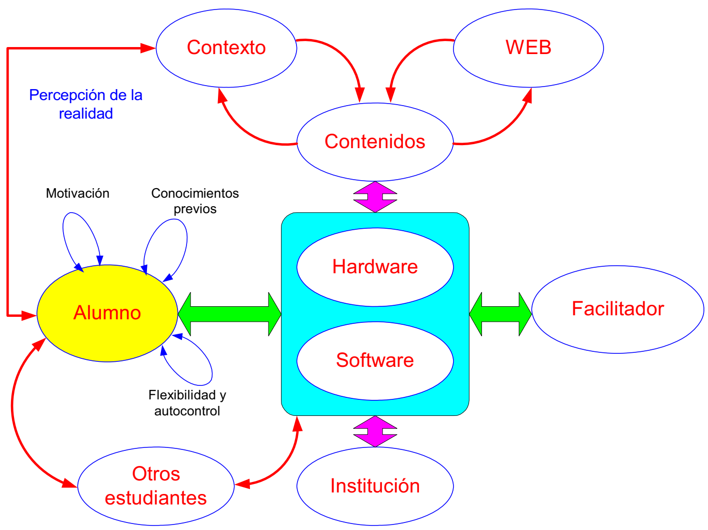
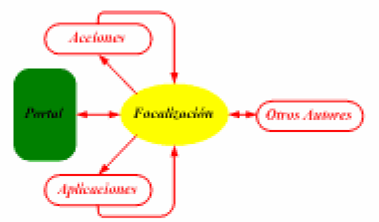


Fig. 1: Estructura del modelo de interrelación en la activación de los escenarios de aprendizaje.

Según Piaget (Ginsburg y Opper,1977) los estudiantes de este nivel de la educación se encuentran en la etapa de las operaciones formales, por lo que en esta etapa se está en capacidad de abstraer y realizar las más complejas actividades de razonamiento. Por su parte Ausubel (Ausubel, Novak y Hanessian, 1983) mediante el enfoque constructivista de las teorías cognitivas, establece que para lograr la interiorización satisfactoria de los conceptos, el aprendizaje debe ser significativo y con ello, se modificarán las estructuras cognitivas, dando cabida a la construcción y asimilación de nuevos conceptos, siempre que los cambios en las estructuras cognitivas se fundamenten en un adecuado empleo de lo que el estudiante ya sabe. Adicionalmente Lev S. Vygotsky (Schunk, 1997) en su teoría sociocultural, establece que el cambio cognitivo es el resultado de emplear los instrumentos culturales y las interrelaciones sociales y de internalizarlas y transformarlas mentalmente, su postura es de un constructivismo dialéctico porque recalca la interacción de los individuos y su entorno, uno de sus conceptos que más impacta en las acciones educativas es el de la Zona de Desarrollo Próximo, misma que Onrubia (Coll y col., 1993) estudia como intervenir en ella y propiciar el aprendizaje significativo. Integrando a estos enfoques de la teoría cognitiva, García Aretio (2001) avanza hacia una teorización de la educación a distancia y de manera específica, sobre la educación virtual, en la cual se establece que un elemento fundamental para el aprendizaje, es el diálogo didáctico mediado y destaca las propuestas de Holmerg y Bååt que enfatizan la importancia de la interacción y la comunicación, en dicho proceso. Adicionalmente a estos aspectos teóricos formales, el experimento supone una estructura de autoestudio centrada en el contexto que emplea al propio ámbito del estudiante, pero también la posibilidad de comunicación multidireccional entre sus compañeros y el maestro-facilitador, el uso de la infraestructura de la propia institución como soporte del curso, pero sobre todo a los elementos propios del estudiante como son su motivación, sus conocimientos previos y principalmente la flexibilidad y el autocontrol en el aprendizaje. Todos estos factores confluyen en el proceso de aprendizaje y dan soporte a la activación de los "escenarios de aprendizaje", cuyo actor central es el estudiante, ya que el modelo educativo empleado en el proyecto es la "*educación centrada en el aprendizaje*".

Metodología

El estudio realizado corresponde a una *investigación cualitativa de alcance exploratorio* con una población bajo estudio compuesta de 40 estudiantes integrantes del "Curso cero" (aspirantes a ingresar a la Licenciatura en Informática) en la asignatura de Matemáticas dentro del Instituto Tecnológico de Puebla.



Para generar la información que requiere la investigación se emplea el material del "Concepto 0" de "Un libro de Cálculo Diferencial e Integral para su empleo en las carreras del SNIT por medio de Internet" (Alvarado, M. ,2002). Este material esta disponible en Internet (http:// www.itpuebla.edu.mx) y de manera complementaria se les entrega a los estudiantes en un CD para que se tenga disponibilidad total y evitar la problemática que implica la posible comunicación por Internet al servidor y los costos que implica a los estudiantes la comunicación por Internet por largos periodos. Este material corresponde a archivos hipermedia con la estructura mostrada en la figura 2, y para los cuales no se prevé ningún tipo de evaluación ya que corresponde al proceso introductorio del curso de Calculo Diferencial e Integral:

- Focalización: en nuestro proyecto corresponde con la guía del autoaprendizaje y da estructura al escenario de aprendizaje activado virtualmente. Específicamente permite que el estudiante conozca en acción al objeto bajo estudio sin emplear lenguaje formal y planteándole situaciones contextuales y una serie de preguntas estructuradas bajo una estrategia mayéutica.
- Las acciones forman parte de la focalización y corresponde a las actividades que deberá de realizar el alumno para observar su contexto y "extraer" de él la naturaleza de los concepto, una vez que se indica en "qué" fijar la atención se plantean secuencias de preguntas a las cuales se responde con más preguntas guía. Consideramos que estas acciones son vitales y son las que permiten darle sentido al escenario de aprendizaje y lo individualizan ya que cada estudiante tiene su "ventana propia" a la realidad.
- Las aplicaciones presentan situaciones típicas en las cuales se observa el concepto en acción y aun sin pedir acciones específicas sobre ellas, complementan la visión del concepto lograda por medio de las acciones.

El material completo en el CD, se entrega a los estudiantes en la primera sesión y se realizó el siguiente proceso:

1. Sin información previa, salvo el como iniciar el CD en su computadora, se encargo resolver todas las preguntas plateadas en las acciones del concepto cero y entregar los reportes correspondientes por internet, tiempo empleado 1 semana, de viernes a viernes.
2. Una vez recibidos los correos se descargaron del internet y se analizó su contenido, clasificándolo.

Resultados

Los resultados esperados se corresponde a una situación "piloto" de un proceso de autoestudio, ya que el material no se presentó al nivel de contenido, sino únicamente de manera física "en un CD", (en este caso se empleó opcionalmente la vía de internet para acceder al material, pero sí obligatoria para la entrega de reportes). Algunos datos interesantes detectados son:

1. De los 40 estudiantes del curso 33 correspondiente al 82.5%, enviaron sus resultados por medio de internet, 9 lo entregaron impreso, 3 en disquete y 1 en CD. El 100% entregó sus resultados al menos 3 días después de la fecha prevista, se observa que dudaron de la recepción de sus trabajos y 6 lo entregaron simultáneamente por internet y otro medio. Dos estudiantes comentaron haber tenido dificultades para enviar los archivos por internet y prefirieron entregarlo impreso, ya que el tamaño era muy grande.
2. El 67.5% de los estudiantes no vive en la ciudad de Puebla, sino en comunidades cercanas.
3. El 100% informó no haber cursado Cálculo en bachillerato, pero haber escuchado de él.
4. El 100% proviene de Bachilleratos generales y principalmente del área de ciencias económico-administrativas.
5. De los 40 estudiantes 23 ya tenían una dirección de correo (57.5%), el resto se lo generó para cumplir sus actividades. En específico 4 estudiantes enviaron sus resultados por medio del correo de otro compañero.
6. El 100% de los estudiantes nunca habían usado el correo electrónico para enviar tareas a sus profesores, aunque los 23 que ya tenían correo si lo usaban para buscar información en internet, no se aclaró de qué tipo. De los 17 restantes, 12 si habían empleado internet antes para bajar información, pero realmente no lo habían usado de manera consistente y 5 nunca lo habían usado.

En cuanto al objetivo planteado en la investigación se obtuvieron los siguientes resultados:

1. En lo general los estudiantes no presentan un preconcepto de lo que es el Cálculo, los que se atrevieron a dar una definición lo hicieron desde dos aspectos:
   a. El cálculo como herramienta para "calcular", en un sentido aritmético, esta acepción la planteo menos del 10% del grupo.
   b. Los estudiantes, no están acostumbrados a plantear sus propios preconceptos, por lo que se observó que estos fueron tomados de diferentes textos.
2. El preconcepto de límite está asociado básicamente al de "una barrera no rebasable", que en efecto corresponde con el concepto matemática de un límite lateral cuando se analiza un extremo del dominio de las funciones, y no lo relacionan de ninguna manera con la continuidad, de la cual si presentan un preconcepto adecuado.
3. En cuanto a los conceptos de número y las acciones de contar y medir, se notan debilidades ya que no diferencian a las variables continuas y las discretas, por lo que existe confusión exacta de lo que es "medir".
4. Los conceptos de derivada e integral básicamente no existen, aunque si se localizan los procesos de variación y acumulación. El concepto de velocidad no se diferencia claramente del de aceleración.
5. Una vez presentado el material de la acción 0.0.2, consistente en una presentación con vídeos y las lecturas de las aplicaciones, si se generaron preconceptos de derivada e integral.

El concepto de límite se afinó y se acepta que el límite si identifica situaciones que se pueden rebasar; en cuanto a la integral el preconcepto si se afinó adecuadamente.
6. En la escritura de los reportes de las acciones se observa dificultad de redacción de los conceptos presentados, considerando que esto resulta natural ya que en ningún momento se estableció lenguaje formal que los identificará.
7. Menos del 10% reconoció haber hecho modificaciones al concepto de Cálculo, sin embargo al revisar sus redacciones se observa que en realidad todos lo hicieron. Todos reconocieron haber aprendido que el cálculo se aplica aún de manera inconsciente y que lo encuentras en todas las situaciones que te rodean.
8. Al solicitar ejemplos de aplicación de los conceptos tratados límite, derivada e integral, el 100% aportó situaciones en las cuales los conceptos solicitados se encuentran en acción.
9. Los ejemplos de aplicación de "medir" presentan errores en casi 50% de los casos, lo que refleja la falta de discusión alrededor del concepto de cantidades continuas, en contraparte el 100% mostró un preconcepto aceptable de continuidad.
10. Cerca del 25% de los estudiantes respondieron por escrito a las preguntas planteadas en las aplicaciones a pesar de no haber sido solicitadas, no hay evidencias de que el 75% restante haya o no revisado las aplicaciones.
11. No existe evidencia que muestre si hubo intercomunicación entre los estudiantes, solamente se localizaron 2 trabajos que muestran "definiciones similares" por lo que se infiere copia, a pesar de ello estos trabajos de manera global son diferentes.
12. Sin que haya habido indicaciones al respecto, de los 40 estudiantes, menos del 10% solicitan al maestro les retroalimente al respecto de sus resultados.

De este conjunto primario de resultados se desprenden las conclusiones de la investigación por lo que podemos considerar al respecto de las preguntas de investigación:

1. *Determinar los preconceptos que el estudiante tiene:* Debido al área de bachillerato de que provienen solamente presenta un preconcepto restrictivo del límite, lo que dificulta el concepto matemático formal.
2. *Reconstruir los preconceptos:* las acciones de aprendizaje individuales, pero sobre todo el análisis de la presentación dada en la acción 0.0.2 permitió crear preconceptos asociados a contextos naturales.
3. *Catalogar la modificación de los preconceptos:* los preconceptos se lograron a través de la metodología mayéutica y son aceptables para iniciar su estudio dentro del curso formal de Cálculo, desde nuestro punto de vista sí representan andamiajes adecuados.

En cuanto a la hipótesis de trabajo, resulta válida; pero es necesario clarificar que la exteriorización de los preconceptos no resulta ser de manera verbalizada, lo cual consideramos dentro de lo esperado, ya que no se estableció en ningún apartado o momento, dentro de las acciones didácticas, el proponer alguna terminología o sintaxis para expresarlas; nos damos cuenta de que la exteriorización de los preconceptos se cumple al analizar que el 100% de los estudiantes propone ejemplos aceptables sobre situaciones reales en las cuales el concepto se encuentra en acción.

Conclusiones y recomendaciones

Se debe de considerar el efecto de los preconceptos en el aprendizaje del cálculo al igual que en cualquier área del conocimiento como limitante o acelerador de los procesos formales de aprendizaje, según se establece en las teorías cognitivas. En particular se sugiere emplear como rescate de los preconceptos las vivencias contextuales de los estudiantes y reconstruir con mayor cuidado el preconcepto de límite.

Referencias Bibliográficas

Alvarado A. M. González M. E. (2002). *Un libro electrónico de Cálculo Diferencial e Integral para su empleo en las carreras del SNIT por medio de Internet*. Tesis de maestría no publicada, CIIDET, México.

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* (2ª edición). Mexico: Trillas.

Coll, C., Martín, E., Mauri, T., Miras, M., Onrubia, J., Solé, I. y Zabala, A. (1993). *El constructivismo en el aula.* (1ª edición) España: Graó.

García A.L.(2001). *La educación a distancia – De la teoría a la práctica.* España: Ariel Educación.

Ginsburg, H. y Opper, S. (1977). *Piaget y la teoría del desarrollo intelectual.* México: Prentice/Hall Internacional.

Good, L. y Brophy, J. (1996). *Psicología educativa contemporánea.* (5ª edición). México: McGraw-Hill/Interamericana editores.

Pérez, M. y López, E. (2000). *Aprendizaje y currículo. Diseños curriculares aplicados.* Argentina: Ediciones Novedades Educativas.

Schunk, D. H. (1997). *Teorías del Aprendizaje*. (2ª edición) México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Papel de la Teoría de Conjuntos en la Construcción de los Números Naturales

Mario J. Arrieche
Universidad Pedagógica Libertador
Venezuela
marrieche@ipmar.upel.edu.ve
Epistemología — Nivel Superior

Resumen

Esta investigación se centra en la caracterización del papel de las nociones conjuntistas básicas en la construcción de los números naturales. El problema está inmerso en un proyecto macro sobre "el papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros de educación primaria". Como el currículo de los maestros es muy amplio delimitamos el problema a las relaciones ecológicas entre estas nociones y los números naturales. Para tal fin caracterizamos el papel de los conjuntos en las construcciones de los números naturales elaboradas por autores interesados en los fundamentos de la Matemática (Frege, Dedekind y Peano) y las realizadas desde un enfoque constructivista (Weyl y Lorenzen). Para ello, usamos la noción de praxeología matemática descrita en el modelo semiótico-antropológico para la investigación en Didáctica de la Matemática (Godino y Batanero, 1994).

Introducción

El problema que se aborda en esta investigación se centra en la caracterización del papel de las nociones conjuntistas básicas en la construcción de los números naturales.

Para tal fin, se realizó un estudio de las construcciones de los números elaboradas por autores interesados por los fundamentos de la matemática Frege, Dedekind y Peano y las realizadas desde un enfoque constructivista Weyl y Lorenzen. Para ello, abordamos los siguientes estudios:

Descripción sucinta de los principales aspectos matemáticos considerados en las construcciones de los números naturales propuestas por los autores citados.

Descripción e interpretación del papel de las nociones conjuntistas básicas en las construcciones en referencia, haciendo uso de la noción de praxeología matemática.

Desarrollada en el modelo teórico propuesto por Godino y Batanero (1994) y designado como semiótico-antropológico para la Investigación en Didáctica de la Matemática.

Para lograr esta meta, consideraremos las dimensiones praxémica (tipos de problemas, técnicas y los elementos notacionales o lingüísticos) y discursiva (conceptos- definiciones, propiedades-proposiciones, argumentaciones- justificaciones) de la praxeología matemática, puestas en funcionamiento en la mencionada construcción.

Cabe destacar que, por cuestiones de espacio, en este trabajo solo describimos la construcción de los números elaborada por Frege (1884). Se remite al lector, interesado en este tema, a

Arrieche (2002) donde se hace una análisis profundo y detallado de las construcciones elaboradas por los autores referidos.

Construcción de los Números Naturales Según Gottlob Frege

En este apartado, describimos el desarrollo de la construcción de los números naturales realizado por Gottlob Frege, proveniente de su trabajo denominado "Die Grundlagen der Aritmetik" (Fundamentos de la Aritmética) publicado en el año 1884. Es de hacer notar que toda la obra de Frege (inclusive toda su vida) la dedicó a tratar de entender qué son los números naturales y de dónde surge que los teoremas aritméticos sean tan seguros y confiables, matemáticamente hablando. Todo este esfuerzo, se tradujo en tratar de desarrollar su tesis logicista: Reducir toda la aritmética a la lógica.

Primera Aproximación

Para definir el concepto de número, Frege sigue el siguiente procedimiento: empieza diciendo lo que no son los números, y en segundo lugar trata de responder a la pregunta, ¿qué son los números?

Al describir lo que no son los números expresa que "los números no son cosas materiales, ni conjuntos, montones o configuraciones de cosas materiales; y no son propiedades de cosas materiales" [1]. Sigue diciendo que los números tampoco son algo subjetivo, no son nada físico, no son una imagen, y no se confunden con los signos que se refieren a ellos. Se señala que "el número no surge añadiendo una cosa a otra. También es irrelevante para él que demos una denominación a cada nuevo añadido" (Frege, 1884, p.72).

Frege expresa que los enunciados numéricos no se refieren a objetos, sino a conceptos. En este sentido, Frege (1884) señala que el soporte de los números es el concepto, resalta además que podemos ver cómo llegamos a la idea de número por abstracción, pero que esto no puede ser así, ya que lo que se obtiene de esta manera es el concepto, en el cual se descubre el número.

Al asignar un número se afirma algo sobre un concepto, por ejemplo: "Si decimos que la tierra tiene un satélite natural, o que nuestro sistema solar tiene nueve planetas, o que en la biblioteca municipal hay veinte mil libros, estamos diciendo algo de conceptos: que bajo el concepto "satélite natural de la tierra" cae un objeto, bajo el concepto "planeta de nuestro sistema solar" caen nueve objetos, bajo el concepto "libros de la biblioteca municipal" caen veinte mil objetos" (Mosterín, 2000, p. 48).

Frege se plantea definir recursiva y contextualmente los números naturales, para lo cual, enuncia las siguientes proposiciones:

- El número 0 corresponde al concepto P si ningún objeto cae bajo P, y

[1] Mosterin, 1972, p.p 5-6, prólogo de la obra de Frege Fundamentos de la Aritmética, 1884

- El número $n+1$, cae bajo el concepto P, si hay un objeto a; tal que a cae bajo P, y el número n corresponde al concepto "cae bajo P", pero es distinto de a.

Así, se habría definido cada número natural n "en enunciados del tipo "el número n corresponde al concepto P", pero no en ecuaciones, que constituye el tipo más frecuente de teorema matemático"[2] . Frege argumenta que con este procedimiento, todavía no ha definido el concepto de número en forma general. Por lo que para presentar definitivamente el concepto de número, lo realiza en dos etapas:

- Define el concepto de número cardinal (en general) y;
- Se precisa el concepto de número natural o finito.

Definición de Número Cardinal

Para describir el concepto de número cardinal Frege define una relación de equivalencia R sobre una clase A. Introduce, de esta manera, la definición de clase de equivalencia de un elemento b de A, como la clase de todos los elementos de A que están con b en la relación R. Continúa argumentando que una manera de definir entidades matemáticas, consiste en definirlas como las clases de equivalencia inducidas por una determinada relación de equivalencia en una clase previamente dada de elementos. Para ilustrar esta situación presenta un ejemplo, considerando las rectas del plano, y la relación de paralelismo entre ellas, la cual es una relación de equivalencia que genera una partición de la clase de las rectas del plano, en clases de equivalencias, a las que se llama direcciones. Se deduce que la dirección de una recta b, no es sino la clase de equivalencia de b respecto a la relación de paralelismo, en otras palabras, la clase de todas las rectas paralelas a b.

Frege aplicó este mismo proceso para definir número cardinal, el cual desarrollamos a continuación. Para tal efecto, se exige contar con un dominio previamente dado de elementos, y definir en él una adecuada relación de equivalencia.

En el caso que nos ocupa, se elige como dominio la clase cuyos elementos son conceptos, sobre el cual se define como relación de equivalencia entre conceptos, la relación de biyectabilidad. El concepto P es biyectable con el concepto Q sí y sólo sí hay una biyección entre los objetos que caen bajo P y los objetos que caen bajo Q. En otras palabras, P es biyectable con Q sí y sólo sí hay una relación que relaciona cada objeto que cae bajo P con un (y sólo un) objeto que cae bajo Q, y a la inversa.

Como la relación de biyectabilidad es de equivalencia, genera una partición del dominio dado (clase de los conceptos) en clases de equivalencia, a las que llama números cardinales. El número cardinal de un concepto P es la clase de equivalencia de P respecto a la relación de biyectabilidad, es decir, la clase de todos los conceptos biyectables con P. Es lo que Frege expresa en su peculiar terminología diciendo que "el número que corresponde a un concepto F es la extensión del concepto equinumérico del concepto F" (Frege, 1884, p.92).

[2] Mosterín, 1972, p.6, prólogo de la obra de Frege Fundamentos de la Aritmética, 1884.

Definición de Número Natural

Para definir número natural se requiere de las definiciones previas siguientes:

El 0 se define como el número que corresponde al concepto "distinto de sí mismo", es decir, es la clase de todos los conceptos vacíos. De igual manera, se define el 1 como el número que corresponde al concepto "igual a 0" . Es decir, el 1 es la clase de los conceptos unitarios. Posteriormente, Frege enuncia que: *n* es el siguiente de *m* si hay un concepto *P* y un objeto *a* que cae bajo él, tales que *n* es el número de *P* y *m* es el número del concepto "cae bajo *P* y es distinto de *a*". Una vez dadas, las definiciones del 0 y de siguiente estamos en capacidad de dar la definición de número natural.

La definición que propone de número natural es la que sigue: *n* es un número natural si *n* pertenece a la serie numérica que empieza por 0. Es decir, que n es 0 o que n cae bajo cada concepto bajo el que cae el 1, y bajo el que cae el siguiente de cada objeto que cae bajo él.

En la definición de Frege, se observa que los números naturales son los objetos que satisfacen el V axioma de Peano. En especial, se muestra que todo "número natural tiene un siguiente indicando que para cada número natural n, el número natural que corresponde al concepto "pertenece a la serie numérica que termina con n" es el siguiente de n" [3].

El Papel de las Nociones Básicas de la Teoría de Conjuntos en la Construcción de los Números Naturales Realizada por Frege

Para caracterizar el papel de las nociones conjuntistas básicas en la construcción de los números naturales realizada por Frege (1884), consideraremos las dimensiones praxémica (situaciones-problema, técnica, lenguaje) y discursiva (conceptos, propiedades, argumentaciones) de una praxeología matemática.

Dimensión Praxémica

En esta dimensión, destacaremos los tipos de situación problema abordados por Frege, las técnicas y los elementos notacionales o lingüísticos usados en su construcción de los números. Con respecto a los tipos de situación problema, Mosterín (2000) señala que Frege se dedicó a dos tareas básicas: la fundamentación de la aritmética y la aclaración de las nociones semánticas. En relación a las técnicas, tomaremos en cuenta el procedimiento empleado, es decir, el conjunto de pasos realizados para obtener el concepto de número natural y la serie numérica 0, 1, 2, 3, . . . de los números naturales. Dentro de este procedimiento, sólo enfatizaremos algunos aspectos desarrollados, tales como la definición recursiva y contextual de los números naturales (en el contexto de un enunciado del tipo "el número *n* corresponde al concepto *P*), que consiste en dar los enunciados:

---

[3] Mosterín, 1972, p. 8, prólogo de la obra de Frege Fundamentos de la Aritmética, 1884.

- El número 0 corresponde al concepto *P* si ningún objeto cae bajo *P*, y
- El número n + 1, cae bajo el concepto *P*, si hay un objeto *a*; tal que *a* cae bajo *P*, y el número n corresponde al concepto "cae bajo *P*, pero es distinto de *a*".

Para presentar definitivamente el concepto de número, lo realiza en dos etapas: define el concepto de número cardinal y precisa el de número natural o finito. A su vez, para elaborar la definición de número cardinal define una relación de equivalencia R sobre una clase A.

Es notorio que desde el mismo planteamiento del procedimiento analizado, se nos presenta de una forma implícita el uso de las nociones básicas de la teoría de conjuntos. Más concretamente, para definir una relación R que sea de equivalencia se requiere obligatoriamente la existencia de un conjunto A, sobre el cual se definirá la propiedad o regla matemática que cumpla con las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, que, en el contexto desarrollado lo identificamos con la clase A. Además para demostrar el cumplimiento de las mencionadas propiedades, se exige determinar el conjunto de los pares ordenados del producto cartesiano AxA que cumplen con la definición de la relación R definida sobre A.

Con respecto al uso de los elementos notacionales o lingüísticos, señalamos los siguientes:

- *n*: denota un número cualquiera
- *P*: se refiere a un concepto
- 0: símbolo para denotar el cero
- n + 1: un número cualquiera más 1
- *a*: denota un objeto cualquiera
- R: denota una relación cualquiera
- A: denota una clase cualquiera.

En este aspecto de la praxeología numérica, identificamos las notaciones de un objeto y de una clase cualquiera con las notaciones de elemento de un conjunto y la de un conjunto cualquiera, respectivamente.

Dimensión discursiva

En esta componente de la praxeología, mostraremos sólo aquellos elementos (conceptos-definiciones, propiedades y argumentaciones) que involucran implícita o explícitamente nociones conjuntistas en su descripción. En este sentido, en la *argumentación* dada por Frege, la relación de equivalencia definida sobre la clase A para definir el número cardinal genera una partición de A en clases de equivalencia, tiene implícitas nociones conjuntistas básicas, las cuales especificamos a continuación. Para *definir el concepto de partición* se requiere de las nociones de familia de conjuntos, conjunto vacío, intersección de conjuntos y unión de conjuntos, puesto que una partición sobre un conjunto A es una familia de conjuntos no vacíos, disjuntos dos a dos, cuya unión es el conjunto A.

Además en *la definición de la noción de clase de equivalencia de un elemento b* de A como la clase de todos los elementos de A que están con b en la relación *R*, se observa, prácticamente en forma explícita, que la noción de clase corresponde a la noción de conjunto. También se puede resaltar que las *propiedades* reflexiva, simétrica y transitiva que debe cumplir la relación R para ser de equivalencia involucran las nociones de conjunto, elemento de un conjunto, subconjunto, producto cartesiano, etc.

En l*os conceptos-definiciones* se elige como dominio la clase cuyos elementos son conceptos y se define la relación de equivalencia entre conceptos, como relación de biyectabilidad, se expresa de la manera siguiente: el concepto P es biyectable (o están relacionados mediante la relación de biyectabilidad) con el concepto Q sí y solo sí hay una biyección (aplicación biunívoca) entre los objetos que caen bajo P y los objetos que caen bajo Q.

Veamos el *concepto-definición,* el número cardinal de un concepto P es la clase de equivalencia de P respecto a la relación de biyectabilidad, es decir, la clase de todos los conceptos biyectables con P. En esta definición se involucra la noción de conjunto, resaltándose que un número cardinal es un conjunto, y que a su vez, sus elementos son conjuntos.

Conclusiones

En este trabajo hemos complementado el análisis epistemológico realizado por Arrieche (2002) ejemplificando el papel de la teoría de conjuntos en la matemática, a través del análisis de las construcciones de los números naturales dadas por Frege, Dedekind, Peano, Weyl y Lorenzen. Este análisis nos ha permitido caracterizar el papel de las nociones básicas de la teoría de conjuntos en las construcciones numéricas estudiadas.

Hemos encontrado que las construcciones de los números naturales realizadas por los matemáticos referidos, presentadas con diversos enfoques (logicista, formal y constructivista), están conectadas por el uso de nociones básicas de la teoría de conjuntos, debido a que sus desarrollos utilizan implícita o explícitamente estas nociones.

Nuestra indagación de las diversas aproximaciones filosóficas sobre los números nos lleva a considerar los números naturales como la estructura matemática común de los sistemas de objetos usados para expresar las situaciones de cardinación y ordenación.

Es frecuente encontrar en los textos matemáticos y filosóficos definiciones de números naturales tales como los números naturales son:

- "los cardinales finitos",
- "las clases de equivalencia de los conjuntos finitos equipotentes entre sí"
- "la propiedad común de los conjuntos finitos que son equipotentes" (expresión inapropiada como criticó Russell (1903)

En estos casos no se explicita que los números son los elementos de cualquier conjunto con una estructura específica, de modo que cada número en particular lo es en tanto que forma parte del sistema correspondiente. Esas expresiones metafóricas ocultan la verdadera realidad de los números, y además confunden un ejemplar de los infinitos sistema numéricos posibles con el tipo estructural correspondiente.

Interesa concebir los cardinales finitos como cantidades, mientras que los números son las medidas de los cardinales, esto es, maneras de expresar las cantidades. Los cardinales de conjuntos son la razón genética de los números, pero los números tienen una realidad diferente de la numerosidad de los conjuntos. Sin embargo, es cierto que cualquier sistema de cantidades discretas (una colección de palotes o piedrecitas, por ejemplo) se puede estructurar recursivamente y ser usado como sistema numérico.

El análisis realizado a las construcciones de los números naturales consideradas, nos permite concluir que todos los enfoques estudiados en esta investigación, excepto la definición por abstracción que consideramos incorrecta al igual que Russell (2003), nos conducen a concebir los números como una estructura abstracta que tiene una secuencia recursiva, teniendo presente que para efectos didácticos se utilice la definición que hemos propuesto anteriormente.

Referencias Bibliográficas

Arrieche, M. (2002). *Papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros: Facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática.* Tesis doctoral no publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Frege, G. (1972). *Fundamentos de la aritmética.* [U. Moulines (trad.), Barcelona: Laia].

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matematicos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Mosterín, J. (2000). *Los lógicos.* Madrid: España.

Russell, B. (1967). *Los principios de la matemática.* [J. C. Grimberg (trad.), Madrid: Espasa-Calpe].

Significados de la Probabilidad en la Educación Secundaria

Carmen Batanero
Universidad de Granada
España
batanero@ugr.es
Probabilidad, Estadística y Combinatoria – Nivel Medio

RESUMEN

En este trabajo partimos de un modelo teórico sobre el significado de los objetos matemáticos en que se consideran seis elementos diferenciados y se distingue entre el significado dado al objeto en una cierta institución de enseñanza y el personal adquirido por un alumno dentro de la institución. Utilizamos estas ideas para analizar los distintos significados históricos de la probabilidad y cómo han sido tenidos en cuenta en la enseñanza secundaria. Finalizamos con algunas recomendaciones para mejorar la enseñanza de la probabilidad.

1. Introducción

La tendencia a renovar la enseñanza de la probabilidad, haciéndola más experimental, no llevan a reflexionar sobre la naturaleza de la probabilidad, y los componentes de su comprensión. La historia de la probabilidad está repleta de episodios y problemas que resultaron en su tiempo desafiantes que muestran que la intuición estocástica, con frecuencia nos engaña (Székely, 1986). Una mirada a la historia permite tomar conciencia de que las matemáticas son fruto del ingenio y la construcción humana para tratar de dar respuesta a situaciones problemáticas y están sujetas a evolución. Un proceso similar se desarrolla en el aprendizaje de los alumnos, quienes deben construir su conocimiento mediante un proceso gradual, a partir de sus errores y esfuerzo.

En lo que sigue analizamos resumidamente los significados históricos de la probabilidad, siguiendo a Batanero, Henry and Parzysz (en prensa). En el modelo teórico que nos sirve como base (Godino y Batanero, 1998; Godino, 2002) se concibe el significado de un objeto matemático, como un ente abstracto que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Diferenciamos entre *significado institucional o personal* del objeto dado, según las prácticas sean compartidas dentro de una cierta institución (por ejemplos, sean fijadas en un centro de enseñanza) o sean particulares para un sujeto de dicha institución (en el ejemplo, un alumno) y distinguimos los siguientes componentes o elementos de significado:

1. *El campo de problemas de los que emerge el objeto*. Uno de estos problemas fue propuesto a Galileo por el Duque de Toscana alrededor del año 1620: Aunque las sumas 9 y 12 se pueden componer en el mismo número de veces (3 y 6; 4 y 5; 6 y 6) al lanzar dos dados que las sumas 10 y 11 (5 y 5; 4 y 6; 5 y 6), la experiencia de los jugadores les hacen apostar a

las sumas 10 y 11, que ocurren con mayor frecuencia. Este y otros problemas semejantes dieron origen al cálculo de probabilidades.

2. *Las representaciones del concepto.* Al tratar de resolver los problemas, necesitamos objetos ostensivos, como símbolos, palabras o gráficos para representar los datos y soluciones de los problemas, las operaciones y conceptos usados.
3. *Procedimientos y algoritmos* para resolver los problemas, como el cálculo combinatorio o la enumeración, la recogida de datos estadísticos, hasta llegar a los programas actuales de cálculo.
4. *Las definiciones y propiedades de los objetos y sus relaciones con otros objetos matemáticos.*
5. *Los argumentos y demostraciones de estas propiedades.* Galileo usó la enumeración para dar una solución completa al problema propuesto por el Duque de Toscana. Esta misma demostración sería comprensible para los alumnos de secundaria, pero también podríamos organizar en clase un experimento para estimar empíricamente las posibilidades de las diferentes sumas al lanzar dos dados.

Esta enumeración sugiere la naturaleza compleja de los conceptos matemáticos, incluso los que aparentemente parecen sencillos, como es el caso de la probabilidad y la necesidad de tener en cuenta estos diferentes componentes en la enseñanza. Debemos ser también conscientes de que un mismo objeto matemático puede enseñarse con niveles diversos de dificultad y por tanto su significado puede ser diferente en distintas instituciones educativas.

2. Significados de la probabilidad

Las ideas anteriores son especialmente adecuadas para analizar el concepto de probabilidad. Hacking (1975) señala el significado dual del término probabilidad, desde su nacimiento, como grado de creencia y como evidencia aceptable para el científico, que dieron origen a las definiciones posteriores de probabilidad desde el punto de vista subjetivo y objetivo, respectivamente y, aunque complementarios, no han cesado de provocar discusiones de tipo filosófico entre los defensores de una y otra postura. El desarrollo progresivo de la probabilidad estuvo unido a un gran número de paradojas que muestran la diferencia entre los aspectos intuitivos y formales del tema (Borovcnik & Peard, 1996).

2.1. Significado intuitivo

No se sabe con seguridad cuándo comenzaron los juegos de azar, ni las razones por las cuáles el cálculo de probabilidades no se desarrolla hasta mucho más tarde que otras ramas de las matemáticas, pero el hecho es que la probabilidad estuvo ausente como idea matemática hasta los comienzos del siglo XVII a pesar del interés por los juegos y su incentivo económico, de la existencia de ideas combinatorias y de ideas filosóficas sobre el azar, o de la disponibilidad de registros estadísticos (Hacking, 1975). Las primeras ideas intuitivas surgen ligadas a las apuestas, esperanza y ganancia en un juego, así como al concepto de juego equitativo y no se precisaron hasta que se trató de asignar números a estos grados de creencia para poder comparar la verosimilitud de diferentes sucesos. Por ejemplo, Bellhouse (2000) describe un poema del siglo XIII en que se calculan las posibilidades de las diferentes sumas posibles al lanzar dos dados, usando técnicas de enumeración. Matemáticos tales como Cardano (1961/1663) recomendaron a los jugadores tener en cuenta todas las posibilidades de los diferentes resultados al hacer sus apuestas para lograr un juego equitativo.

2.2. Significado Laplaciano de la Probabilidad

La correspondencia de Pascal y Fermat (Pascal, 1963/1654) en la que resuelven algunos problemas ligados a juegos de azar se considera el punto de partida de la teoría de la probabilidad. Estos autores y sus contemporáneos expresan sus resultados en términos de apuesta equitativa o división de la apuesta. Huygens (1998/1657) encuentra el valor esperado de la ganancia en un juego entre dos jugadores que tienen diferentes ventajas, resultado que es generalizado por Leibniz (1995/1676). Aunque la idea de probabilidad está ya implícita en todos estos trabajos, tenemos que esperar, no obstante a De Moivre (1967/1718, p.1) para encontrar una definición de la misma: *"Por tanto, si constituimos una fracción cuyo denominador es el número de chances (posibilidades) con la que el suceso podría ocurrir y el denominador el número de chances con las que puede ocurrir o fallar, esta fracción será una definición propia de la probabilidad de ocurrencia"*.

En 1814, Laplace dio la definición que hoy enseñamos con el nombre de "regla de Laplace" para la probabilidad de un suceso que puede ocurrir solamente en un número finito de modalidades como *la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles"*. Según Godino, Batanero y Cañizares (1987), esta definición se encontró inadecuada incluso en la época de Laplace, ya que además de ser circular y restrictiva, no ofreció respuesta a la pregunta de qué es realmente la probabilidad; sólo proporcionó un método práctico de cálculo de probabilidades de algunos sucesos sencillos. Por otro lado, esta definición no puede aplicarse a los experimentos con un número infinito de posibilidades o a aquellos casos en que el espacio muestral es finito, pero no puede aceptarse la condición de simetría, como al lanzar al suelo una caja de chinchetas. Como hace notar Bernoulli en Ars Conjectandi, publicado en 1713 la equiprobabilidad apenas se encuentra fuera del campo de los juegos de azar.

2.3. Significado frecuencial

Bernoulli sugirió que podríamos asignar probabilidades a los sucesos aleatorios que aparecen en diversos campos a partir de la frecuencia relativa observada en una serie grande de ensayos del experimento (Bernoulli 1987/ 1713). Su demostración de la primera Ley de los Grandes Números, fue aceptada en su época como un apoyo al carácter objetivo de la probabilidad. Este teorema indica que la probabilidad de que la frecuencia relativa de un experimento repetido en las mismas condiciones se acerque tanto como queramos a la probabilidad teórica del suceso, puede aproximarse suficientemente a uno, sin más que aumentar el número de pruebas.

En esta visión se define la probabilidad como el número hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa al estabilizarse (Von Mises, 1952/1928), asumiendo la existencia teórica de dicho límite, del cual la frecuencia relativa observada es un valor aproximado. Autores como Gnedenko y Kolmogorov se entusiasmaron con esta definición, y encontraron ella el verdadero sentido de la probabilidad, concepto que sería inútil para ellos, si no pudiese relacionarse a través del teorema con las frecuencias relativas de los sucesos obtenidas a partir de experiencias realizadas en las mismas condiciones. Un problema práctico es que en el enfoque frecuencial nunca obtenemos el valor exacto de la probabilidad, sino tan sólo una estimación del mismo. Por otro lado, con frecuencia es imposible realizar los experimentos exactamente en las mismas condiciones y es difícil también saber con exactitud cuál es el número exacto de experimentos que debemos realizar para aceptar la estimación de la probabilidad como buena. Mas aún, ciertos sucesos (por ejemplo en el campo de la economía o de la historia) son irrepetibles, aunque aleatorios y según esta concepción no podríamos aplicar la teoría de la probabilidad a su estudio.

2.4. Significado subjetivo

Por tanto, aunque el significado frecuencial amplía el campo de aplicaciones de la probabilidad y da una regla de cálculo de la misma, no estuvo libre de controversias. Un nuevo punto de vista aparece a través de la regla de Bayes, que permite transformar las probabilidades a priori (antes de realizar un experimento) de varias causas, una vez se observan sus consecuencias, en probabilidades a posteriori, que incorporan la información de los datos observados. Las probabilidades de tales causas podrían entonces revisarse (pasar de probabilidades a priori a probabilidades a posteriori) y pierden de este modo el carácter objetivo que les asigna la concepción frecuencial. Keynes, Ramsey y de Finetti describen las probabilidades como grados de creencia personal, basadas en el conocimiento y experiencia de la persona que las asigna sobre el suceso dado. Para ellos la probabilidad de un suceso siempre está condicionada por un cierto sistema de conocimientos y puede ser, por tanto, diferente, para distintas personas.

Una dificultad inicial del enfoque subjetivo fue hallar una regla para asignar valores numéricos a las probabilidades, de forma que expresen los grados de creencia personal. Ramsey (1926) y de Finetti (1937) deducen una teoría de decisión consistente, que permite separar las creencias de las preferencias, a partir de un sistema de apuestas, e inferir los valores de las probabilidades subjetivas. En el enfoque subjetivo, ya no es necesaria la repetición del experimento en las mismas condiciones, para dar sentido a la probabilidad y ello amplía el campo de aplicación, en particular al estudio de decisiones en economía, diagnóstico y otras aplicaciones. En la actualidad la escuela bayesiana aplica probabilidades a todo tipo de sucesos inciertos, aunque la controversia sobre el estatuto científico de las probabilidades subjetivas continúa.

2.5. Significado matemático

A lo largo del siglo XX, diferentes autores contribuyen al desarrollo de una teoría matemática formalizada sobre la probabilidad. Borel contempla la probabilidad como un tipo especial de medida, y Kolmogorov usa esta idea, aplicando la teoría de conjuntos y de la medida para deducir una axiomática, que se acepta por todas las escuelas, independientemente del significado filosófico otorgado a la naturaleza de la probabilidad. Desde entonces, la probabilidad es simplemente un modelo matemático que podemos usar para describir e interpretar la realidad de los fenómenos aleatorios. Este modelo ha mostrado su utilidad en las ciencias, técnicas, política y gestión; casi sin excepción en todos los campos de la actividad humana.

3. Funciones semióticas y razonamiento matemático

Además de describir los elementos de significado de un concepto Godino (2002) toma de Eco (1979) la idea de función semiótica como una relación entre una expresión que juega el papel de original en la correspondencia (significante) y un contenido (significado). Cuando una persona produce o interpreta una función semiótica, se crea un *significado elemental*, en que la persona relaciona la expresión con el contenido. Algunos ejemplos son los siguientes:

- La expresión "regla del producto" o la representación simbólica "$P(M \cap I) = P(M) \times P(I)$" hace referencia a un procedimiento que usamos para calcular una probabilidad compuesta.
- El enunciado de un problema puede representar la situación real; también podemos representar esta situación mediante una simulación; por ejemplo, podríamos usar el lanzamiento de monedas para representar el sexo de recién nacidos.
- Cuando decimos "La solución de Pascal y Fermat al problema de división de la apuesta" nos referimos a una demostración.
- En expresiones como: "Supongamos que tenemos una distribución normal $N(\mu, s)$", las expresiones "distribución" "distribución normal", μ, s se refieren a conceptos abstractos.

Las funciones semióticas están involucradas en la creación y transmisión de conceptos matemáticos, la demostración de propiedades y la resolución de problemas. Además de crear significados elementales, también pueden crear significados compuestos o sistémicos, como cuando decimos "los teoremas de límite", expresión que nos evoca todo un conjunto de teoremas matemáticos con sus correspondientes demostraciones. En cada función semiótica, la correspondencia entre expresión y contenido se fija mediante reglas, que no siempre son explícitas o no son entendidas por los dos actores del discurso. Ello hace que el profesor y el estudiante en ocasiones atribuyan diferente significado a la misma expresión, y entonces hablamos de conflicto semiótico (Godino, 2002). Estos conflictos aparecen en la interacción comunicativa y con frecuencia explican las dificultades y limitaciones del aprendizaje de las matemáticas.

4. Implicaciones para la enseñanza de la probabilidad

La discusión anterior muestra el significado polifacético de la probabilidad, cuya enseñanza no puede limitarse a una de estas diferentes perspectivas, ya que están ligadas dialécticamente y en nuestra experiencia. La probabilidad puede contemplarse como razón de posibilidades a favor y en contra, como evidencia proporcionada por los datos, como grado de creencia personal y como modelo matemático que nos ayuda a comprender la realidad. Las controversias que acompañaron la historia de la probabilidad, también han influido la enseñanza. Hasta 1970 la visión clásica, basada en cálculo combinatorio dominó el currículo de probabilidad. Puesto que el razonamiento combinatorio es complejo, muchos estudiantes encontraron difícil este enfoque, en el que, además, las aplicaciones de la probabilidad a diferentes ciencias estaba oculto. Muchos profesores vieron la probabilidad como una parte secundaria de las matemáticas, que sólo se interesaba por los juegos de azar. En otros casos era sólo una aplicación de la teoría de conjuntos (Henry, 1997).

Con el desarrollo progresivo de los ordenadores ha aumentado el interés por la introducción experimental de la probabilidad, como límite de la frecuencia estabilizada. Las simulaciones y los experimentos ayudan a los estudiantes a resolver las paradojas que se presentan incluso en problemas de probabilidad aparentemente sencillos. Pero un enfoque experimental puro de la enseñanza de la probabilidad no es suficiente. Incluso cuando la simulación nos ayuda a encontrar la solución de problemas de probabilidad que surgen de la vida real, no puede probar que esta solución es la más adecuada, porque la simulación depende de las hipótesis establecidas de antemano y del modelo teórico que implementamos en el ordenador. Un conocimiento genuino de probabilidad solo se alcanza con el estudio de alguna probabilidad formal, aunque este estudio debe ser gradual y apoyado en la experiencia estocástica de los estudiantes.

Por tanto, se necesita más investigación que clarifique cuáles son los componentes fundamentales del significado de la probabilidad (y en general de los cualquier concepto matemático) y los niveles de abstracción adecuados en que cada componente debe ser enseñado, para ayudar a los estudiantes a superar las posibles dificultades. Finalmente sugerimos tener en cuenta la actividad semiótica de los estudiantes al resolver problemas matemáticos de modo que les ayudemos a superar sus errores y dificultades, muchos de los cuales pueden explicarse en términos semióticos.

Agradecimiento. Este trabajo es parte de los proyectos HA2002-0069, SEJ2004-00789, Madrid, MCYT y FQM-126, Junta de Andalucía.

Referencias Bibliográficas

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (En prensa). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*. Dordrecht: Kluwer.

Bellhouse, D. R. (2000). De Vetula: a medieval manuscript containing probability calculations. *International Statistical Review, 68* (2), 123-136.

Bernoulli, Jacques (1987). *Ars Conjectandi- 4ème partie*. Rouen, Francia: IREM. (Trabajo original publicado en 1713).

Borovcnik, M. y Peard, R. (1996). Probability. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International handbook in mathematics education* (Part 1, pp. 239-288). Dordrecht: Kluwer.

Cardano, G. (1961). *The book on games of chances*. New York, N.Y., E.U.A: Holt, Rinehart y Winston. (Trabajo original publicado en 1663).

Eco, U. (1979). *Tratado de semiótica general*. Barcelona, España: Lumen.

Finetti, de B. (1937). La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives. *Annales de l'Institute Henri Poincaré 7*, 1-68.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques 22*, 2-3.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1997). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

Godino, J.D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis.

Hacking, I. (1975). *The emergence of probability*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Henry, M. (1997). L'enseignement des statistiques et des probabilities. En P. Legrand (Coord.), *Profession enseignant: Les maths en collège et en lycée* (pp. 254-273). Paris: Hachette-Éducation.

Huygens, C. (1998). *L'art de conjecturer*. Paris, Francia: A. Blanchard, (Trabajo original publicado en 1657).

Laplace, P. -S. (1985). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*. Madrid: Alianza Editorial (Trabajo original publicado en 1814).

Leibniz, G. W. (1995). L'estime des apparences. En M. Parmentier (Ed.*), 21 manuscrits sur les probabilités, la théorie des jeux, l'espérance de vie*. Paris: Vrin (Trabajo original publicado en 1676).

Mises, R. von (1952). *Probabilidad, estadística y verdad*. Madrid, España: Espasa Calpe (Trabajo original publicado en 1928).

Moivre, A. de (1967). *The doctrine of chances* (3rd ed.). New York, N.Y., E.U.A: Chelsea Publishing (Trabajo original publicado en 1718).

Pascal, B. (1963). Correspondance avec Fermat. En *Oeuvres Complètes* (pp. 43-49). París: Seuil. (Trabajo original publicado en 1654).

Ramsey, F. P. (1926). Truth and Probability. En Ramsey. *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays* (pp.156-198). New York: Harcourt, Brace and Company.

Székely, G. J. (1986). Paradoxes in probability theory and mathematical statistics. (Ed.) Dordrecht, the Netherlands: Reidel.

Sistemas Sintéticos. Lo Inteligible en los Manuales para la Enseñanza

Alberto Camacho
Instituto Tecnológico de Chihuahua II
México
camachoalberto@hotmail.com
Epistemología – Nivel Superior

Resumen

¿Cómo se puede analizar una obra elemental? Las obras elementales fueron manuales que se usaron a lo largo de los siglos XVIII al XIX para la enseñanza matemática. Dicha pregunta ha estado inmersa en el contexto de investigación del grupo de Matemática Educativa y particularmente en las sucesivas RELMEs. El enfoque que justifica el análisis de las obras elementales, ha sido la búsqueda en la historia de las reformulaciones de los conceptos matemáticos que nos han guiado en la definición de nuestros proyectos de investigación, dentro del concurso de las dimensiones social, conceptual y epistemológica, y en el diseño de situaciones didácticas de conceptos matemáticos que recurrentemente nos causan problemas de aprendizaje en el salón de clase.

Al finalizar el siglo XIX y a lo largo del siglo XX los historiadores de la ciencia vieron con profundidad la importancia de la investigación textual. L. Brunshvicg realizó en Francia a principios del siglo XX, una disertación extensa de la historia de las matemáticas que partía de los clásicos griegos hasta finalizar con la matemática expuesta en las respectivas obras de Comte, Cauchy, Lagrange y Fresnel (Brunshvicg, 1922). Un discípulo suyo, G. Bachelard, propuso a mediados del siglo dos nociones imprescindibles para el estudio de la historia de la ciencia: aquella de *obstáculo epistemológico* y la otra, de *acto epistemológico*. El primero de estos ampliamente reconocido, es por hoy un pilar de nuestra disciplina. El segundo corresponde a las *sacudidas del genio que aporta impulsos inesperados en transcurso del desarrollo científico*. Esta dialéctica entre *obstáculo* y *acto* deja ver con transparencia como los *impulsos* del pensamiento científico refieren las reformulaciones o epistemologías sufridas por el conocimiento a lo largo del tiempo (Bachelard, 1971). El punto de vista de Bachelard sugería que en el estudio de la historia de las ciencias, a partir de el análisis documental, se debía *distinguir el error y la verdad, lo inerte y lo activo, lo perjudicial y lo fecundo* siguiendo la huella de las diferentes *rupturas* y discontinuidades del conocimiento y no solamente la continuidad de la historia de los conocimientos mismos. En 1962 T. Khun, al tratar de encontrar las diferencias sobre los fundamentos de la historia de las ciencias, reconoció la importancia del papel que desempeña el concepto de *paradigma*, vio estos como síntesis históricas del conocimiento que han desencadenado cambios que afectan la estructura de las revoluciones científicas. A diferencia de Bachelard, Khun consideraba las transformaciones del conocimiento a partir de un saber ya constituido o bien como la mejor imagen que la historia de la ciencia ofrece de este último, el cual enmarca el paradigma en cuestión, toda vez que estos archivan el paso de una teoría a otra. A finales de los setenta Koyré impulso la idea de analizar la evolución del pensamiento científico a través de estrechar las concepciones trans-científicas de disciplinas antiguas como la filosofía, metafísica y religión, ello dio para un estudio del paso del espacio finito griego hacia una concepción geométrica del espacio infinito que merecía la modernidad del siglo XVII. La ruta de investigación que siguió la noción de ruptura y paradigma a lo largo del siglo

XX, orientó la visión de las diferentes disertaciones que al respecto se han obtenido desde los años sesenta en adelante.

En esencia, el objeto de la tarea de los investigadores de la ciencia a través del análisis textual, ha sido a lo largo del siglo pasado y en lo que va del presente, el restablecimiento de *tradiciones científicas*. Una *tradición* científica significa la acción de *transmitir* a lo largo de cierto período de tiempo un saber. Este último puede ser colocado en las obras en forma de proposición, de teorema, como resultado de una práctica, como protocolos que indican los modos en que se deben enseñar ciertos conceptos, como una definición manipulada, etc. La labor del especialista será, en una primera etapa, la de *entender* dicho material para, con ello, se dice fácil, concurrir a la reconstitución de la tradición textual, la cual es sustentada por el discurso conceptual del saber.

En torno al estudio de los manuales para la enseñanza de la matemática de los siglos XVII al XIX, en Shubring (1987) se propuso un enfoque holístico comprendido en un diseño tridimensional que involucraba analizar los cambios de las varias ediciones de los textos, la verificación de los cambios en otros libros correspondientes a la misma *oeuvre*, y la observación de los cambios en el contexto: planes y programas de estudio, decretos ministeriales, epistemologías, etc. Al finalizar el siglo, en (Belhoste, Dalmedico, *et, al*, 1994), se dirigió un estudio en tres partes de la *école polytechnique*. Ha sido esta la primera obra sobre historia de la enseñanza de las matemáticas y de la formación en la escuela desde su fundación hasta nuestros días. Es el fruto de un examen crítico, apoyado por una investigación histórica de los fondos documentales y textuales de la escuela, de la que desgranan historiografías, conocimientos, tradición científica y enseñanza a partir de su vocación militar.

A lo largo del último lustro del siglo XX, y hasta el año 2000, el enfoque utilizado en Camacho (2000) para el análisis de los manuales fue establecido a través del conocimiento matemático que aparece en dichos documentos, el cual fue vehiculado por *flujos de difusión* de conocimientos que emergieron de Europa desde finales del siglo XVIII y a lo largo del siglo XIX, fundamentalmente de España y Francia, y que tuvieron consecuencias poco favorables en la enseñanza de la matemática de los colegios mexicanos, por las *prácticas de transculturación* acontecidas al conocimiento en los textos: obras compendiadas, cortes, inserciones, traslación de ideologías, sujeción cultural, etc.

Para el 2001, R. Rashed, presidente de la International Union of History and Philosophy of Science, hizo distinción entre lo *proto-científico* y lo científico, ofreciéndole como una distinción exclusiva que domina enteramente la historia de las ciencias (Rashed, 2001). Esta oposición debe ser entendida como histórica y lógica a la vez, permitiendo por consecuencia distinguir una obra de ciencia de otra en la que se pretenda tratar el mismo objeto. No obstante, Rashed sustrajo las matemáticas de esta oposición debido a que las piezas exclusivas de la *proto-matemática* pertenecen a la matemática misma: *los indivisibles, las consideraciones sobre la noción de límite a lo largo del siglo XVIII, etc.* Esto último no ocurre con las otras disciplinas en las que lo proto-científico les cubre de diversas maneras.

Para comprender mejor el pensamiento de Rashed, evoquemos aquí los casos de los fundamentos de dos tradiciones preocupadas por un mismo objetivo. La definición del cálculo de las fluxiones de Newton, tomó sentido a partir de *engendrar las cantidades* por la permisibilidad que da su naturaleza, la de *aumentar* o *disminuir* con movimiento uniforme. Por su parte Leibniz, incorporó a las cantidades una convención de naturaleza no-real, las *cantidades infinitamente pequeñas*.

A pesar de las diferencias en los dominios, en Newton, las cantidades se engendran a partir del movimiento uniforme dando lugar a un modelo geométrico, en tanto que en Leibniz esta posibilidad ocurre por los infinitamente pequeños, configurando una propuesta algorítmica, se puede decir que cada uno habla el lenguaje del otro y pareciera que ambos proyectos sólo son traducibles en la estructura notacional del análisis estándar contemporáneo. La posible traducción es el punto de vista de Rashed. Bajo esta óptica el cálculo estándar marca un principio de orden, una noción de distancia que rectifica no sólo a los *proto-conocimientos* sino, además, al sinnúmero de epistemologías que le sostienen.

No obstante, y como es sabido, la conciliación de estos dominios del cálculo llevó a una traducción que duró varios siglos. Los primeros acercamientos tuvieron en su inicio contradicciones en las formas del conocimiento que engendraron, pudiéndose explicar estos últimos con el adjetivo de *meta-conceptos*; es decir, conocimientos abstractos u oscuros, situados en una etapa primitiva o en una *proto-matemática,* siguiendo a Rashed, difíciles de determinar en el dominio de lo real.

Estas expresiones fueron resultado de una deliberación del pensamiento, el cual fue sujeto a la noción universal de *espacio* y a sus cualidades de extensión establecidas por los primeros analistas, como Newton. Este concibió el *espacio absoluto* (sin definirle) como *siempre similar e inmóvil.* Empero la contingencia, el *espacio relativo* fue pensado como *cierta dimensión móvil o medida de los espacios absolutos*. Consecuentemente, su extensión, y particularmente las cantidades, fueron pensadas como *crecientes o decrecientes con movimiento continuo, a la manera del espacio que describe un cuerpo en movimiento.*

A tal definición llegó a partir de suprimir, de la noción de espacio, una o varias determinaciones, a excepción de la idea de extensión, lo cual le originó una idea genérica a la que ya no respondió el espacio en lo real. Este corte le hizo a determinaciones que conservaban un carácter finito, las cuales, al ser suprimidas, hicieron que la extensión deviniera infinita. Ello le permitió reconsiderar el espacio a partir de un atributo de éste, la *noción de cantidad*.

En su caso, la noción de cantidad representaba recintos del espacio, y era el concepto en juego. La definición de esa noción antes de Newton era: *Cantidad es todo aquello que aumenta o disminuye.* La reformulación de Newton a través de su concepción geométrico-espacial fue: *Cantidades son crecientes o decrecientes con movimiento continuo.* De esta forma la noción original y su accesoria pueden conectarse y formar la proposición sintética siguiente: *Todo lo que es capaz de aumentar o disminuir es descrito con movimiento continuo.*

Esta última reformulación es una unificación o *síntesis* del pensamiento newtoniano con el pensamiento clásico de su época, a la que se pudo remontar gracias a la trascendencia o universalidad de la noción de espacio; particularmente a su atributo más representativo, la noción de cantidad. Con este primer axioma Newton fue capaz en 1665-66 de dar una explicación matemática, a partir de las series que surgen del teorema binomio, de los fenómenos físicos y astronómicos que estudió, y considerarle eje medular de la estructura de los *Principia.* No obstante, con la síntesis no se pretendía resolver problemas particulares, sino, en principio, ordenar la totalidad de la ciencia en un sistema textual.

En este contexto, y siguiendo el modelo de sintetización de Newton, la cantidad se ancló como noción de orden cuyas posibilidades de implicación rebasaron a cualquier otro concepto, llevando a los analistas y geómetras a escribir bajo esa perspectiva las primeras *Obras de conocimientos avanzados*. En el caso de L´ Hôpital, arrogando del cálculo de Leibniz, transfirió en 1696, (L´ Hôpital, 1696), la noción de cantidad extrapolándole del espacio como *porciones infinitamente pequeñas de cantidades variables que aumentan y disminuyen continuamente.* Esta síntesis fue definida *diferencia* y es el fundamento que permea el *Analyse des infiniment petits*. Euler hizo algo semejante en 1755 para escribir los *Principes de calcul différentiel*, extendió la noción de cantidad al infinito percibiéndole en una sola proposición como *Las cantidades pueden por su propia naturaleza aumentar o disminuir al infinito* (Euler, 1755).

Dicha práctica, aunque parezca, no se refiere solamente al diseño de obras de conocimientos avanzados que tengan que ver con el cálculo diferencial. Pascal expresó que la geometría tomaba su fundamento a partir de generalizar la noción de extensión en términos de establecer sus límites entre la *nada* o sea el cero, y el infinito. Laplace hizo uso del *principio de la razón suficiente*, de Leibniz, axioma evidente *a priori,* basado en el principio de que *una cosa no puede comenzar a existir sin una causa que le produzca.* Hecho empírico que le llevó a sustentar los *Essai philosophique sur les probabilités,* considerando el estado actual del universo como el efecto del estado anterior y como la causa del que ha de seguirle.

¿Pero qué alcance tuvieron esas perspectivas en el diseño de los manuales?

Desde principios del siglo XVIII los elementos se concebían como *aquella parte que denotaba las componentes originales de un cuerpo.* Reynaud, en su texto de cálculo llamado *Analyse demontrée*, (Reynaud, 1708) y Bèzout en sus *Principios de cálculo infinitesimal* de mediados del siglo XVIII (Bèzout, 1760), llamaban *elemento* a la extensión infinitesimal o diferencial que se tomaba en las figuras geométricas con las cuales es posible determinar la cantidad de área, longitud o volumen correspondiente. En este sentido el diferencial de área dA, es un *elemento* distintivo que unifica y hereda sus fundamentos al área total.

En la escritura del *Traité du calcul différentiel et integral*, por cantidad Lacroix había concebido todo aquello *cuya magnitud por su naturaleza es comparable con otra de su misma especie* (Lacroix, 1797). La comparación sólo era posible, como en Newton, con el auxilio de los números, y se lograba a partir de establecer la dependencia entre cantidades. Para justificar el paso de las cantidades en juego por sus diferentes estados de magnitud, sean estos infinitamente pequeños o infinitos, Lacroix hubo de reducir esta operación a un *hecho analítico,* reposado sobre nociones consistentes que esperaba llegaran a responder a las aplicaciones geométricas de la mecánica, asignatura central en la enseñanza de la é*cole polytechnique* al iniciar funciones en 1794, y de la cual el cálculo infinitesimal era parte fundamental. El *hecho analítico* fue su intento por sintetizar el concepto de límite newtoniano para con ello tener un argumento o proposición central en el diseño del *Traité*.

La posición de Lacroix hacia el concepto de límite se colocaba en la postura en esa dirección de los escritos de Euler, D´Alembert y Cousin y era totalmente opuesta a la de Lagrange, incluyendo su negación a la notación propuesta por este último. Dos problemas sirvieron para la justificación, aquel de las tangentes analizado algebraicamente por Barrow, y la caída de los cuerpos graves tomado de la experiencia de Galileo. La transparencia del objetivo era dejar ver que ambos problemas, resueltos en su momento sin la concepción de los límites, son consustanciales con éste. Ello probaría el origen apodíctico del concepto a partir de unificar las concepciones de Barrow y Galileo con las propias ideas que Lacroix tenía del concepto de límite.

Para el efecto hizo uso del método de reducción al absurdo, o sea, no suponer aquello que se encuentra en la proposición inicial, dejando ver que ello surge natural, en este caso el concepto de límite (Lacroix, 1819, *nota A* al final de la obra).

En el problema de las tangentes de Barrow, inició con la parábola ordinaria $y^2 = px$. Cortándole con una secante hizo: AP=*x,* PM=*y,* PP´=*h*, M´Q=*k*, A´P=*x*+*h,* P´M=*y*+*k*. Comparando los triángulos semejantes M´Q: MQ :: PM: PS, es decir *k: h :: y:* PS, llegó a la expresión PS=P $y\frac{h}{k}$. Desarrollando $(y+k)^2 = p(x+h)$, y restándole la primitiva $y^2 = px$, le quedó: $2yk + k^2 = ph$, de donde resulta el cociente $\frac{h}{k} = \frac{2y+k}{p}$. Sustituyendo esta última en: PS=P $y\frac{h}{k}$, llegó a: PS=$\frac{2y^2}{p} + k\frac{y}{p}$, la cual es llamada *subsecante.*

Para hacer ver que en esta parte del problema el concepto de límite aparece, el argumento de Lacroix fue el siguiente: *Una primera observación se ofrece, es esta que, a pesar del evanecimiento de las cantidades h, k, la fracción que sugiere su relación continua existiendo; o bien tiene un valor apreciable, o ella se reduce a* $\frac{2y}{p}$*, valor donde la cantidad* PS=$\frac{2y^2}{p} + k\frac{y}{p}$, *se aproxima a medida que k disminuye, y donde ella puede diferir tan poco como queramos.*

La proposición, o *elemento* final de esta argumentación, fue colocada por Lacroix en las *Notions préliminaires* del *Traité*, como una definición en los siguientes términos:

Así, luego que las variaciones respectivas de una función y su variable se envanecen, esto no ocurre con su relación; la cual tiende hacia un límite aproximándose a él por diversos grados, existiendo, entre este límite y la función, una dependencia mutua quien determina a una por la otra (Lacroix, 1819, en *premiére partie de calcul différentiel*).

A partir de este argumento le fue expedito ir formulando la estructura proposicional del *Traité.* Como es el caso del ejemplo siguiente: (Sea) $u = ax^2$, *pongamos x+h en lugar de x, quedando* $u' = ax^2 + 2axh + ah^2$, *y restando la primera ecuación de la segunda* $u' - u = 2axh + ah^2$, *dividiendo los dos miembros por h, se tiene* $\frac{u'-u}{h} = 2ax + ah$, *hasta aquí la relación de variación de la función y de la variable es compuesta de dos partes.*

No obstante, aun cuando Lacroix sólo afirmaba que *h, k* son pequeñas, el orden en que Barrow les estimó fue viéndoles como infinitamente pequeños. Barrow tomaba la hipotenusa del triángulo que asumen estos valores como un arco infinitamente pequeño, que más tarde se llamaría *triángulo característico*, y desarrolló el mismo trabajo que Lacroix para evanecer h y k ; pero es obvio que en los cocientes que resultan del proceso, y por el contexto infinitesimalista a que se sujeta, se encuentra implícita la derivada como pendiente de la recta tangente, trabajo que no convence, en tanto desear ver el resultado como anterior a cualquier hipótesis posterior al concepto de límite. Lacroix debió pensar en esta ambigüedad al proponer el ejemplo de la *caída libre de los cuerpos*.

En resumen, la trascendencia de los resultados anteriores constituyeron *sistemas sintéticos* integrados en corpus de conocimiento que matematizaban toda la ciencia de las épocas referidas. Un sistema sintético hace referencia a un conjunto ordenado y coherente de conocimientos constituido en un corpus textual, en el cual los conocimientos y el sistema son integrados a partir de un primer axioma o principio que les organiza y, como vimos, les es común; además, el conocimiento y el sistema debían pretender ser objetivos y corresponder a la realidad de su objeto, es decir la verdad.

Luego, el trabajo previo al diseño de un sistema textual refiere a una *lógica trascendental* que se dividía en dos partes: 1º La enfocada a los problemas concernientes a la unificación de conocimientos a través de establecer la verdad de la primera proposición, y 2º Aquella abocada a la sistematización de los conocimientos en la obra a partir de la primera proposición en la forma de: *definiciones, problemas, corolarios, postulados, lemas, escolios, casos, pruebas, hipótesis, tesis,* etc.

Referencias Bibliográficas

Bachelard, G. (1971). *Épistémologie*. Presses Universitaires de France. Paris.

Belhoste, G., Dalmedico, A. D. y Picon, A (1994). *La formation polytechnicienne 1794-1994*. Dunod Paris.

Bèzout, E. (1760). *Cálculo infinitesimal*. De la colección de Textos Politécnicos. IPN México 1999: Noriega-Limusa.

Brunschvicg, L. (1922). *Les étapes de la philosophie mathématique*. De la edición de A. Blanchard. París 1986.

Camacho, A. (2000). *Difusión de conocimientos matemáticos a los colegios mexicanos del siglo XIX. De la noción de cantidad al concepto de límite*. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Camacho, A. (2004). Los elementos de análisis trascendente de Francisco Díaz Covarrubias. *Revista de educación matemática 16* (2)*, México.*

Euler, L. (1755). *Institutiones calculi diffrentialis*. Saint-Petésbourg.

Koyré, A. (1973). *Études d´histoire de la pensée scientifique*. Paris: Gallimard

Kuhn, T. (1992). *Las estructuras de las revoluciones científicas*. México: Fondo de Cultura Económica

Lacroix, S. F. (1797). *Traité du calcul différéntiel et integral*. Courcier Paris.

Lacroix, S. F. (1819). *Traité elementaire du calcul différéntiel et de calcul integral*. Bachelier-Courcier. Paris.

Laplace, P. S. (1845). *Essai philosophique sur les probabilités,* en http://gallica.bnf.fr/.

L´ Hôpital. (1696). *Analyse des infiniment petits pour l´intelligence de lignes courbes*. De la edición de A. Blanchard, París 1988.

Newton, I. (1685). *Mathematical principles of natural philosophy*. Great Books of the Western World. Chicago, USA: Enciclopædia Britannica Inc.

Newton, I. (1723). *Analysis per quantitatum. Series, Fluxiones ac Diffrentias: cum enumeratione linearum.* Tertii Ordinis. Amstælodami, Sumptibus Societatis.

Pascal, B. (1845). Pensées. *Charpentier.* Paris: Librairie

Rashed, R. (2001). Histoire des sciences et diversité au debut du XXIe siècle. *Conferencia Inaugural publicada en "Science and Cultural Diversity". Proceedings of the XXIst International Congress of History of Science.* UNAM-Sociedad Mexicana de Historia de la Ciencia, Vol. I. México 2003.

Reynaud (1708). *Analyse demontrée.* De la edición de A. Blanchard París.

Shubring, G. (1987). On the methodology of analyzing historical textbooks. Lacroix as textbooks author. *For the Learning of Mathematics.* Publishing Association, Montreal, Quebec Canada.

La Metodología de la Verosimilitud Empírica

Gonzalo Delgado
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
México
deggonzalo@aol.com

Probabilidad y Estadística — Superior

Resumen

Se expone la metodología de la verosimilitud empírica y se compara con la verosimilitud paramétrica como resultado de una investigación para determinar intervalos de confianza para la media basados en la verosimilitud paramétrica y empírica. La verosimilitud empírica es un método no paramétrico de inferencia estadística, en el cual no se tiene que asumir que los datos que se analicen tengan que provenir de una familia de distribución conocida. Los métodos no paramétricos dan intervalos de confianza y pruebas de hipótesis con validez que no dependen sobre fuertes supuestos distribucionales. Este es un método alternativo en la enseñanza de la estadística, utilizando cálculos directos sin usar la distribución asintótica.

Introducción

El enfoque de la Verosimilitud Empírica es relativamente reciente, la aparición del libro de A.B. Owen "Empirical Likelihood" en el año 2001, ocasionó un crecimiento en el uso de las inferencias basadas en la verosimilitud empírica

Las inferencias estadísticas que se basan en la función de verosimilitud empírica pertenecen al campo de la Inferencia no Paramétrica. La función de verosimilitud empírica depende únicamente de las observaciones realizadas. Una ventaja de la verosimilitud empírica sobre la verosimilitud paramétrica, es que el uso de la primera no requiere suponer que las observaciones provienen de determinada distribución de probabilidad, lo que la hace más flexible, por otro lado, la verosimilitud empírica alcanza la confiabilidad de los métodos no paramétricos. En los métodos de verosimilitud paramétrica se supone que la distribución conjunta de todos los datos disponibles tiene una forma conocida y una o más cantidades conocidas. Un problema con las inferencias de verosimilitud paramétrica es que no podemos conocer cual familia paramétrica usar.

La verosimilitud empírica puede utilizarse para hacer inferencias estadísticas, tanto estimaciones como dócimas de hipótesis, la existencia de una versión no paramétrica del teorema de Wilk's, para la distribución de $-2\log R(\mu)$ (donde $R(\mu)$ es el perfil de verosimilitud), permite calcular intervalos de confianza para la media.

En este trabajo de investigación se compara la verosimilitud paramétrica con la verosimilitud empírica y se hace un estudio por simulación de los intervalos de confianza, donde se comparan los resultados que se obtienen utilizando la verosimilitud empírica con los obtenidos empleando la verosimilitud paramétrica, asumiendo:

a) una distribución normal
b) una distribución no normal, considerando tamaños de muestras grandes y pequeñas.

Los programas para las simulaciones se hicieron en Matlab 6.5 release 13.

Fundamentos Teóricos

Función de Distribución Empírica.

Sean *n* realizaciones sobre una variable aleatoria (v.a) real Y, denotadas por $Y_1, Y_2, ..., Y_n$.
La función de distribución empírica de $Y_1, Y_2, ..., Y_n$., se define por la función $F_n(y)$, dada por:

$$F_n(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{Y_i \leq y} \text{ , con } -\infty < y < +\infty, \qquad \text{donde } \delta_{Y_i \leq y} = \begin{cases} 1, & \text{si } Y_i \leq y \\ 0, & \text{si } Y_i > y \end{cases}$$

Verosimilitud no Paramétrica

Sean $Y_1, Y_2, ..., Y_n$. realizaciones independientes sobre una v.a. Y con función de distribución F_o. La verosimilitud no Paramétrica, para la función de distribución *F,* se define como

$$L(F) = \prod_{i=1}^{n}\left[F(Y_i) - F(Y_i -)\right], \quad \text{donde } F(Y_i -) = P_F(Y < Y_i) \quad \text{y} \quad F(Y_i) = P_F(Y \leq Y_i)$$

entonces, la diferencia $[F(Y_i) - F(Y_i -)]$ representa, para cada Y_i, la verosimilitud en Y_i. Por tanto, $\prod_{i=1}^{n}[F(Y_i) - F(Y_i -)]$ representa, exactamente, la verosimilitud de la muestra.
Si *Y* es una v.a. contínua, entonces $P(Y = y) = 0 \quad \forall y$, por tanto, $F_o(y) = F_o(y -) \ \forall y$, lo que implica que para las variables aleatorias contínuas $L(F)$ será igual a cero.

Teorema

Sean $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ v.a. reales, independientes, idénticamente distribuidas según F_o. Sea F_n su función de distribución empírica. Sea F cualquier función de distribución.
Si $F_n \neq F$, entonces $L(F) < L(F_n)$. (ver Owen (2001), una demostración más detallada en Delgado (2004)).

Razón de verosimilitud no paramétrica.

La razón de verosimilitud es utilizada en la estadística no Paramétrica para hacer pruebas de hipótesis y determinar regiones de confianza. En el caso general, gracias al teorema de Wilk's, se conoce la distribución asintótica de $-2\log[L(\eta_0)/L(\eta)]$, donde η_0 es un valor del parámetro bajo la hipótesis nula, y en base a esa distribución hacemos las inferencias.

Si el interés está centrado en construir una región de confianza para η, entonces si $L(\eta)$ es mucho menor que $L\left(\hat{\eta}\right)$, se excluye el valor de η de la región de confianza para η_0. Si interesa una función θ de η $(\theta = \theta(\eta))$ y se quiere construir una región de confianza para θ, lo que se hace es tomar la imagen de la región de confianza para η: $\left\{\{\theta = \theta(\eta) : L(\eta) \geq cL\left(\hat{\eta}\right)\right\}$, donde el umbral c se selecciona de acuerdo al teorema de Wilk's, es decir, de acuerdo a la distribución χ^2, con un número de grados de libertad igual a la dimensión de θ.

Sea F una distribución, se define la razón de verosimilitud no paramétrica como: $R(F) = L(F)/L(F_n)$, donde $L(F)$ es la verosimilitud no paramétrica.

Perfil de razón de verosimilitud no Paramétrica.

Supóngase que se está interesado en un parámetro $\theta = T(F)$, es decir, θ es una función de la distribución F. Supóngase que la función F pertenece a una familia U de distribuciones, que usualmente es una familia muy general.

Se define el perfil de razón de verosimilitud no paramétrica como: $R(\theta) = Sup\{R(F) : T(F) = \theta, F \in U\}$

Empates en las observaciones

Si $y_i = y_j$ para $i \neq j$, se dice que hay un empate.

Supóngase que no existen empates en las observaciones:

Considérese una distribución F, tal que la probabilidad en el valor $y_i \in \Re$ es un número p_i

Entonces, se tiene que: $\sum_{i=1}^{n} p_i \leq 1$, $L(F) = \prod_{i=1}^{n} p_i$. Por tanto, $R(F) = \dfrac{L(F)}{L(F_n)} = \prod_{i=1}^{n} np_i$ …(1)

Supóngase que existen empates en las observaciones:

Sea k el número de valores distintos en la muestra. Si el valor z_j se repite en la muestra $n_j \geq 1$ veces y tiene probabilidad p_i bajo F, entonces $R(F)$ se calcularía como

$R(F) = \prod_{j=1}^{k} \left(\dfrac{p_j}{\hat{p}_j}\right)^{n_j} = \prod_{j=1}^{k} \left(\dfrac{np_j}{n_j}\right)^{n_j}$ ….. (2). Si en los datos hay empates, pero se utiliza (1) en lugar de (2), se obtiene el mismo perfil de razón de verosimilitud $R(\theta)$, y esto es así para cualquier familia de distribuciones U y cualquier función $T(F)$, ya que si se consideran pesos específicos w_i $(i = 1,...,n)$ para las observaciones, y éstos pesos se seleccionan de forma tal

que: para todo $y_i = z_j$ se cumpla $p_j = \sum_{i:y_i=z_j} w_i$. Donde las probabilidades p_j corresponden a una distribución F. La verosimilitud de F quedará definida entonces por $\prod_{i=1}^{n} w_i$, y cuando hay empates este valor no es único. Un valor de θ entra en la región de confianza sí y sólo sí para alguna F con $T(F) = \theta$ el valor mayor de
$\prod_{i=1}^{n} w_i$ excede al umbral, es decir, solo hay que considerar el valor máximo de $\prod_{i=1}^{n} w_i$ sobre los pesos que generan p_j. Este máximo se alcanza cuando $w_i = p_{j_{(i)}} / n_{j_{(i)}}$, con $j_{(i)}$ determinado por $y_i = z_{j_{(i)}}$. El máximo para una F dada es: $\prod_{i=1}^{k} \left(\frac{p_j}{n_j} \right)^{n_j} = L(F) \prod_{i=1}^{k} n_j^{-n_j}$.

El procedimiento detallado de cálculo del perfil de verosimilitud $R(\mu)$ puede verse en Delgado (2004)

Método de cálculo para un ntervalo de confianza para la media

Dar un intervalo de confianza para la media μ, significa dar los límites μ_+ (superior) y μ_- (inferior), para los cuales $R(\mu_+) = R(\mu_-) = r_0 \in (0,1)$; del cálculo del perfil de verosimilitud se obtiene (Delgado (2004)) que $Y_{(1)} \le \mu_- \le \bar{Y} \le \mu_+ \le Y_{(n)}$ ……………(3). Los límites en (3) pueden usarse separadamente en la búsqueda. Hay que encontrar μ que cumpla $R(\mu) = r_0$, lo cual puede hacerse encontrando el valor $R(\mu)$ en cada valor μ candidato. Esta búsqueda puede ser lenta, una más rápida se obtiene si se reformula el problema de la siguiente manera:

optimizar $\sum_{i=1}^{n} w_i Y_i$ bajo las restricciones $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ y $\sum_{i=1}^{n} \log(nw_i) = \log(r_0)$, por lo que el lagrangiano quedaría como $G = \sum_{i=1}^{n} w_i Y_i - \eta_1 \left[\sum_{i=1}^{n} \log(nw_i) - \log(r_0) \right] - \eta_2 \sum_{i=1}^{n} (w_i - 1)$, derivando G respecto a w_i e igualando a cero se obtiene $w_i = \frac{\eta_1}{Y_i - \eta_2}$, por lo que $\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\eta_1}{Y_i - \eta_2}$, resolviendo para η_1 queda $\eta_1 = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\eta_1}{Y_i - \eta_2} \right]^{-1}$, de donde se obtiene

$w_i = \frac{(Y_i - \eta_2)^{-1}}{\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \eta_2)^{-1}}$. Para encontrar μ_-, hay que resolver $\sum_{i=1}^{n}\log[nw_i(\eta_2)] = \log(r_0)$, o sea, resolver: $\sum_{i=1}^{n}\log\left[\frac{n(Y_i - \eta_2)^{-1}}{\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \eta_2)^{-1}}\right] = \log(r_0)$, buscando para η_2 entre $-\infty$ y $Y_{(1)}$. Para encontrar μ_+ se tiene que buscar para η_2 entre $Y_{(n)}$ y $+\infty$. Una vez determinado el valor de η_2, se calculan los pesos w_i y con ellos μ_+ y μ_-.

Programas computacionales utilizados

Se elaboraron dos programas en Matlab 6.5 reléase 13, con las siguientes características:

1) <u>FunctionPrincipal</u>

Este programa permite calcular los intervalos de verosimilitud empírica y paramétrica, además de los tradicionales, para datos generados a partir de una distribución normal

Los parámetros que se pueden variar en el programa son:

- La varianza
- La media
- Valor del umbral
- Tamaño de la muestra

b) <u>PrincipalNoNormal</u>

Este programa genera observaciones según una distribución normal y luego destruye la normalidad, de acuerdo a la selección del usuario, al cual se le pide que introduzca el número de observaciones a eliminar y el lugar donde éstas serán eliminadas; usando la siguiente notación:

0 $\rightarrow$ al extremo izquierdo
1 $\rightarrow$ al extremo derecho
2 $\rightarrow$ a ambos extremos

el usuario debe seleccionar los parámetros de entrada de la misma forma que se hace en el programa <u>functionPrincipal</u>

Análisis de las corridas

a) Bajo normalidad de las observaciones

1. La verosimilitud paramétrica (VP), por lo general produce intervalos más estrechos que la que produce la verosimilitud empírica (VE)

2. La verosimilitud empírica produce intervalos que contienen al verdadero valor del parámetro con una frecuencia altísima (0.9788), mientras que la frecuencia correspondiente a la verosimilitud paramétrica es muy baja (0.55)
3. Los intervalos basados en la VP son más críticos para tamaños de varianza moderados (16), no presentan diferencia de acuerdo a los tamaños muestrales. El cambio de un valor de $r = 0.1465$ a $r = 0.0359$ introduce una ligera diferencia, favoreciendo al valor 0.1465.
4. Para la verosimilitud empírica se reportó la menor amplitud promedio para el tamaño muestral más pequeño (n = 20), sin embargo para la verosimilitud paramétrica se obtuvo en el tamaño muestral más grande (n = 60).
5. Con ambas verosimilitudes, mientras más pequeña es la varianza se obtienen intervalos de amplitudes más pequeñas.
6. Las diferencias entre las amplitudes promedios para los dos valores del umbral considerados, son pequeñas.
7. La amplitud máxima-mínima se obtuvo siempre con la VP con una frecuencia de 0.8527, las amplitudes de los intervalos basados en la VE superaron esas máximas-mínimas.

b) Bajo distribuciones asimétricas o distribuciones con colas truncadas.

1. No se observan diferencias notables en las amplitudes promedios de los intervalos correspondientes a ambas verosimilitudes, cuando varía el tamaño de la muestra.
2. El cambio del valor del umbral de 0.1465 a 0.0359 afecta más cuando se trabaja con la verosimilitud paramétrica.
3. Con varianzas pequeñas las dos verosimilitudes arrojan intervalos de longitudes promedios similares y la diferencia crece en la medida que crece la varianza, favoreciendo a la verosimilitud paramétrica.

Conclusiones

1) El trabajo que se presenta abarca la teoría relativa a la estimación de intervalos de confianza para la media,
2) Se analiza el comportamiento de los intervalos de verosimilitudes empíricas y paramétricas, a través de estudios por simulaciones.
3) Los intervalos de confianza basados en la VE con mayor frecuencia contienen a la verdadera media y son más amplios que los basados en la VP

Referencias Bibliográficas

Owen, A. (2001). Empirical Likelihood. *Monographs on Statistics and Applied Probability* 92. London: Chapman & Hall/CRC.

Cox, R. & Hinkley, V. (1974). *Theoretical Statistics*. London: Chapman & Hall.

Castell, E. y Delgado, G. (2004). Intervalos de confianza para la media basados en la verosimilitud paramétrica y empírica: un estudio comparativo por simulación. *XII Congreso Latino-Iberoamericano de Investigación de Operaciones y Sistemas*. La Habana, Cuba.

Delgado, G. (2004). *Intervalos de confianza paramétricos y basados en la verosimilitud empírica.* Tesis de Maestría, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

DiCiccio, T.J., P.Hall, y J.P.Romano (1989). Comparison of Parametric and Empirical Likelihood Functions. *Biométrica*, 76(3), 465-476.

Hall, P. (1990). Pseudo-Likelihood Theory for Empirical Likelihood. *Ann. Stat.,* 18(1), 121-140.

Educación de Adultos
¿Saberes Matemáticos Previos o Saberes Previos a los Matemáticos?

María Fernanda Delprato
Facultad de Filosofía y Humanidades de la Universidad Nacional de Córdoba
Argentina
ferdelprato@hotmail.com
Educación de Adultos – Nivel Básico

Resumen

En esta ponencia se discuten algunos usos de los saberes previos de analfabetos en propuestas de educación de adultos (revisadas en Delprato, 2002); procurando desentrañar las particularidades e implicancias de recuperar los saberes previos con diversos alcances: como estrategia de "familiarización" de las nociones; como procedimientos orales con una lógica propia que requieren ser dotados de modos adaptados de registro; como saberes diversos en función de trayectorias educativas y laborales que demandan una reconstrucción (en términos de procedimientos empleados y de estatuto y valor que le otorga el sujeto como estrategia) para anticipar probables interacciones con los procedimientos convencionales; y como representaciones sobre el saber matemático en tanto sistema de representación de uso social.

Modos de recuperación de los saberes previos

En la búsqueda de producción de sentido, diversas propuestas educativas han recurrido como estrategia a la recuperación de los saberes previos de los sujetos [1] destinatarios de los distintos niveles educativos. Por detrás de esta estrategia – tematizada frecuentemente en el trabajo con sectores populares, es decir aquellos sectores en los que se especula una mayor distancia entre conocimiento escolar y cotidiano- subyacen modos disímiles de recuperación con posicionamientos derivados que ameritan ser develados.

En esta ponencia, interesa particularmente someter a análisis los modos de recuperación de saberes previos en propuestas de alfabetización de adultos, especialmente en el campo de la matemática (numeración y cálculo –suma y resta-). Como se anticipara, se han reconocido diferentes alcances en las modalidades de incorporación de los saberes previos a dichas propuestas educativas.

Una primera modalidad (y la más frecuente) es el uso de contextos vitales de los alumnos sólo para *familiarizar* algunas nociones matemáticas. En la investigación de referencia, el análisis de la nueva propuesta del INEA (Instituto Nacional de Educación de Adultos de México) concretada en una renovación de materiales para los asesores y los alumnos (INEA, 2000a; INEA, 2000b; INEA, 2000c; INEA, 2000d; INEA, 2000e; INEA, 2000f; INEA, 2000g; INEA, 2000h; INEA, 2000i; INEA, 2000j; INEA, 2000k), pone en evidencia algunos rasgos de esta modalidad de familiarización.

---

1 "Sin duda el problema del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas no se agota con vincular la experiencia y el saber formal. Tal vinculación, no obstante, es condición indispensable para construir una propuesta de promoción de aprendizaje que responda a los intereses y forma de construir conocimiento de la población adulta de escasa escolaridad" (Ávila y Waldegg, 1994, p.27).

Esta incorporación de los contextos vitales o ámbitos extraescolares de uso de la matemática posibilita una ruptura con planteos de materiales educativos anteriores que eran "autocontenidos", debido a "(…) la ausencia de referencias al saber, las actividades y necesidades cotidianas (…)" (Ávila, 1993, p.68). No obstante, esta recuperación se restringe a una pretensión de dotar de un contexto de resolución más próximo al cotidiano –de familiarización- y no de elaboración de un modelo a partir de situaciones cotidianas.

Así, en el abordaje del cálculo se emplean contextos laborales o vitales usuales y se recupera al cálculo mental como modo inicial de cálculo, no siendo –a diferencia de otras propuestas- objeto de escritura mediante algoritmos alternativos ni articulado con la presentación posterior de los algoritmos convencionales. Asimismo, tanto la enseñanza del cálculo como de la numeración agudiza esta relación conflictiva entre saber informal y escolar al estar regidas por una secuencia lineal.

Este tipo de secuencia conlleva, por ejemplo en numeración, la enseñanza primero de algunos dígitos (del 1 al 9) para luego avanzar en el conocimiento de la serie (1 al 20, del 0 al 100) y la identificación de sus agrupamientos (unidades, decenas, centenas, etc.). Los supuestos que subyacen a este tipo de secuencia de enseñanza de la numeración serían algunos de los ya explicitados por Alicia Ávila en el análisis de otros materiales, a saber: "a) la serie numérica está por conocerse y construirse; b) la serie numérica se construye linealmente (…)" (Avila, 1993, p.62).

Luego de trabajar los agrupamientos se "presentan" los algoritmos (previamente se trabajan estrategias de cálculo libres o de sujetos hipotéticos) primero con dígitos y luego con bidígitos (introduciéndose aquí la explicación del procedimiento: sentido de derecha a izquierda, primero sin canje y luego con canje –también se explica este reagrupamiento o desagrupamiento-). Esta linealidad en la construcción de los algoritmos (primero explicitar los agrupamientos y luego operar con ellos) presupone la necesidad de familiaridad con las leyes del sistema de numeración para poder operar con él. Cabe advertir que este "…tipo de tratamiento propuesto para el sistema de numeración decimal focaliza la identificación y equivalencias entre agrupamientos no siendo propedéutico para desentrañar la lógica subyacente del algoritmo, pues no se fomenta el trabajo de reagrupamientos[2] y desagrupamientos[3] en situaciones de transformación vinculadas a necesidades operatorias. Por ello, el algoritmo aparece como una técnica presentada, donde el procedimiento de resolución es desgajado de su imbricación con las leyes del sistema en que opera y de su vínculo con la eficacia. (…) Así, el sentido de encolumnar y de la dirección del cálculo, no son explicitados pues no se involucra al adulto en un proceso de optimización y comprensión de esta técnica. Además no queda claro el nuevo lugar del cálculo mental una vez instaurado este mecanismo, pues no se efectúan pedido de estimaciones o de rectificaciones mediante su empleo. A su vez, las transformaciones son abordadas también siendo presentadas y no tematizadas[4]…"

[2] Reagrupamiento: acción de cambiar 10 de un grupo menor por 1 del inmediatamente mayor, comúnmente llamado "llevar"

[3] Desagrupamiento: acción de cambiar 1 de un grupo mayor por 10 del inmediatamente menor, comúnmente llamado "pedir"

[4] "La noción piagetiana de *tematización* es esencial para comprender esto. Significa que algo que ha sido inicialmente utilizado como instrumento de pensamiento puede convertirse en un objeto de pensamiento, cambiando al mismo tiempo su estatus en tanto elemento del conocimiento. (…) La tematización implica pues un cierto grado de toma de conciencia" (Ferreiro, 1998, p.33)

(Delprato, 2002, pp.17-18). Es decir, que la modalidad de articulación entre numeración y cálculo de esta propuesta adheriría a una concepción empirista del aprendizaje de los algoritmos en tanto procedimientos, pues parecieran ser objetos sólo para ser observados y recordados pero no, reconstruidos y comprendidos.

Si acordamos con que "…la educación matemática debe promover oportunidades para que esos modelos (algoritmos, fórmulas y modelos simbólicos) sean relacionados con experiencias funcionales que les proporcionen significado." (Carraher et. al, 1997, pp. 104-105); y consideramos que si bien la experiencia extraescolar enriquece estos modelos con significado, "…la escuela es un ambiente más favorable para el desarrollo de modelos generales de resolución de problemas que la vida diaria…" (Carraher et. al, 1997, p. 130), la familiarización pareciera ser una modalidad necesaria pero no suficiente de recuperación de los conocimientos previos.

Asimismo, la familiarización conlleva un reconocimiento de ámbitos de uso extraescolares de la matemática que no aparecen claramente reconocidos como ámbitos de producción de saberes matemáticos previos a los formales, sino más bien, de saberes en torno a los usos de estos saberes.

A diferencia de la modalidad anteriormente descrita, otras propuestas conciben a las estrategias orales de cálculo como *estrategias ágrafas*. Es decir, son reconocidas como procedimientos con una lógica propia (aunque apoyados en las mismas propiedades matemáticas que los algoritmos convencionales) que requieren ser dotados de modos adaptados de registro. Esta búsqueda de formas de escritura intermedias procura reflejar los modos de resolución mental de las cuentas, recurriendo para ello al desocultamiento de los procesos de descomposición numérica subyacentes en los algoritmos convencionales.

Germán Mariño (1997) sería uno de los principales referentes de esta postura, sustentando su opción en el reconocimiento de la existencia de saberes matemáticos previos no escolares en adultos analfabetos, el uso de algoritmos diferentes a los empleados convencionalmente para la resolución de las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división). Desde esta presunción, arguye que la principal dificultad del adulto analfabeto no es su carencia de conocimiento –ignorancia- sino la carencia de escritura para sus procedimientos –estrategias ágrafas- y su falta de acceso a los saberes formales. En consecuencia, propone trabajar con dos notaciones simultáneas, el algoritmo de "rodamiento" (que explicita en el orden de las mayores a las menores cantidades las descomposiciones subyacentes) y el algoritmo convencional (con una resolución desde las cantidades menores a las mayores, y con una escritura posicional de dichas cantidades).

Esta modalidad supera a la precedente al reconocer la complejidad del diálogo entre saber cotidiano y saber formal, diferenciándolos centralmente por su equiparación a oralidad y escritura. No obstante, en esta mirada sigue ausente la deconstrucción de los algoritmos en tanto amplificadores culturales[5] de las capacidades de cálculo de los adultos analfabetos, así

[5] "Los algoritmos escolares tienen algunas características que los vuelven *amplificadores culturales* de la capacidad ya existente (para una descripción de ese concepto, veáse Bruner, 1966, y Cole y Griffin, 1980). Un amplificador cultural no crea una capacidad nueva: amplía una capacidad ya existente. En otras palabras, las condiciones en las cuales son practicadas las soluciones escolares tienden a promover ciertos aspectos del conocimiento de operaciones aritméticas que

como, el carácter cultural[6] de estos procedimientos y el reconocimiento de la existencia de hipótesis de los usuarios (incluso analfabetos) sobre este sistema de representación cultural de los números y del cálculo.

La postura sostenida en la investigación mencionada (Delprato, 2002) procuraba articular y avanzar respecto a las modalidades precedentes, recuperando además la *diversidad de los saberes previos* y de las *representaciones sobre el saber matemático* de los adultos analfabetos. Esta postura se tradujo en posicionamientos asumidos en el diseño y experimentación de una secuencia didáctica realizada en dicha investigación para promover el aprendizaje de las operaciones de suma y resta.

La diversidad de los saberes previos de los adultos analfabetos no sólo interesaba ser reconstruida en términos de los procedimientos empleados, sino también del valor y estatuto que el sujeto le daba a estos procedimientos. Esta reconstrucción tenía por objeto anticipar, y así intervenir, en los modos de interacción entre saberes previos y saberes matemáticos formales. Con este mismo sentido, se advirtió sobre la necesidad de dilucidar las representaciones sobre el saber matemático en tanto sistema de representación de uso social.

Si se concibe que "La problemática del analfabetismo es la de la marginación de una simbolización con valor social." (Delprato, 2002, p.1), desde este espacio de marginación se constituyen representaciones sobre este saber "de los otros" y se valorizan en consecuencia los propios recursos alternativos a estos modos convencionales (por ejemplo, de calcular, de representar los números). Estas representaciones y valoraciones inciden en cómo el sujeto interactúa con estos saberes cuando son objeto de una propuesta de enseñanza, pudiendo facilitar u obstaculizar la adquisición y/o la extensión de lo sabido a nuevas situaciones.

Así, "…el tipo de cálculo mental inicial pareciera generar disposiciones diversas hacia el aprendizaje de formas simbólicas de control del cálculo (algoritmo ampliado), en función de sus niveles iniciales de eficacia y de eficiencia, y de los recursos de apoyo en que se sustenta (la escritura de datos o la reiteración). Estos rasgos contribuyen a su consolidación como "la" estrategia predilecta de resolución o como una estrategia provisoria frente a la carencia de alternativas.

La toma de conciencia simultánea de las potencialidades del cálculo mental (como recurso de validación mediante la estimación) y de sus alcances (o sea sus límites ante la complejidad operatoria), pareciera ser una vía para cuestionándolo proponer medios alternativos de resolución: la escritura. Así el algoritmo escrito, e incluso el algoritmo ampliado, logran instalarse como recursos frente a un propósito de eficacia en el cálculo, ante la tematización propuesta de los límites de estrategias ágrafas por su demanda de retención de información y de control continuo sobre esta retención." (Delprato, 2002, pp. 144-145)

---

amplifican el poder de las mismas habilidades de razonamiento cuando las personas están resolviendo problemas. Estas condiciones son, en nuestra opinión, *el uso de la escritura y el apoyo constante en el mismo tipo de agrupamiento*, los agrupamientos básicos en la escritura de los números, o sea los agrupamientos decimales. Estas dos características nos permiten resolver problemas de cálculo que serían muy complejos para una solución oral, porque podríamos olvidar los números si fuesen muy grandes." (Carraher et. al, 1997, pp. 162-163)

[6] "… crecemos utilizando esos instrumentos culturales –lengua, sistema de numeración- y estamos rodeados por personas que también los utilizan. Nuestra tendencia termina por considerarlos como naturales, y no como culturales; como la manera correcta de organizar sistemas de numeración y sistemas conceptuales." (Carraher et. al, 1997, p. 149)

Frente a estrategias ágrafas eficientes y eficaces de cálculo entonces, pareciera ser necesario tematizar el carácter de "amplificador cultural" de los algoritmos escritos. Es decir, develar su eficacia en situaciones de mayor complejidad operatoria (amplificadores de las capacidades de cálculo), y además, su carácter construido, o sea, desnaturalizarlos develando también las razones que los constituyen en procedimientos sociales de uso (culturales). Para ello, recuperando la preocupación de los adultos por la eficacia de sus resoluciones en contextos vitales, en vez de "presentar" de modo empirista estos procedimientos es importante enfrentar a los adultos a las razones de eficacia detrás de los procedimientos algorítmicos canónicos (que son, justamente, aquellas que los diferencian del cálculo oral: la dirección del cálculo de derecha a izquierda, y la manipulación de dígitos en vez de cantidades) [7].

En cambio, la ausencia de un acceso previo a la escritura de los números y del cálculo o la excesiva valoración de la misma -frente a la ausencia de resistencias a una enseñanza que promueva su dominio- demandan centralmente una tematización de la reconstrucción de los procedimientos convencionales de cálculo y escritura. La ausencia de un acceso previo a la escritura y de mecanismos orales de cálculo eficaces, significan que la enseñanza de la escritura provee de un recurso más eficaz para representar los datos del problema (los números) y su resolución (mediante los algoritmos), por lo cual no aparece como necesario el explicitar el carácter de amplificador cultural del cálculo escrito y sí, develar las razones subyacentes de estos procedimientos para propender a un dominio autónomo de los mismos (con posibilidades de argumentación y, por ende, de generalización). La excesiva valoración de la escritura puede generar una adhesión irreflexiva a representaciones y procedimientos que hagan olvidar su origen cultural. Por ello, es importante también enfrentar a los sujetos que sostienen esta actitud a un proceso de argumentación de dichos procedimientos.

A modo de conclusión

La revisión presentada de los distintos modos de recuperar los saberes previos de los sujetos en propuestas de educación de adultos genera un cuestionamiento de su pretendida uniformidad. Como podrá advertirse en el desarrollo anterior, los alcances y concepciones implícitos en estas modalidades son diversos; siendo diferente así los modos de instituir al adulto analfabeto como sujeto de saber: como usuario del saber formal, como dueño de un saber no formal o como productor de saber o nociones acerca ambos tipos de saberes (estatuto y legitimidad relativa).

[7] "Los principios generales subyacentes al algoritmo y la (heurística) descomposición son los mismos, esto es, un número está hecho de partes, esas pares pueden separadas y podemos operar en consecuencia sobre esas partes obteniendo el mismo resultado que tendríamos si hubiésemos ejecutado la operación de una sola vez.. a esa propiedad de la suma y de la resta le damos el nombre de propiedad asociativa. (…) A pesar de estar basados en las mismas propiedades formales –y tener por lo tanto los mismos *invariantes* implícitos- los procedimientos usados en la calle y en la escuela presentan particularidades interesantes. Primero, el algoritmo escolar se realiza en la dirección unidad, decena, centena. Por el contrario, la descomposición tiende a hacerse en la dirección centena, decena, unidad. Segundo, en el algoritmo escolar los dígitos son vaciados de su significado relativo en el momento de la operación: las decenas y las centenas son 'leídas' como si fuesen unidades al hacerse el cálculo. Por el contrario, la descomposición preserva el valor relativo (…) Esta diferencia constituye, de hecho, una diferencia en la *forma de representación*, es decir, en los símbolos usados para la representación durante la ejecución del cálculo." (Carraher et. al, 1997, p. 159)

Se ha procurado advertir sobre la importancia de que estas opciones sean entonces objeto de reflexión en propuestas educativas que procuren hacer uso de estos saberes previos para generar propuestas relevantes. Una vez más, donde parecía erigirse un rasgo simple y eficaz para la "buena enseñanza" se abre un espacio de indagación y de pregunta.

Referencias Bibliográficas

Ávila, A. (1993). El saber Matemático Extraescolar en los Libros para la Educación de Adultos. *Educación Matemática, 5* (3). (pp. 60-77). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ávila, A. (1990). El saber matemático de los adultos analfabetos. Origen y desarrollo de sus estrategias de cálculo. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, *XX* (3), 55-95.

Ávila, A., y Waldegg, G. (1994). *Hacia una redefinición de las matemáticas en la educación básica de adultos*. México (DF): INEA.

Carraher, T., Carraher, D. y Schliemann, A. (1997, 4ª edición). *En la vida diez, en la escuela cero*. México (DF): Siglo veintiuno editores.

Delprato, Ma. F. (2002). *Los Adultos no alfabetizados y sus procesos de acceso a la simbolización matemática*. Maestría en Ciencias, Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. México DF.

Ferreiro, E., Fuenlabrada, I., Nemirovsky, M., Block, D. y Dávila, M. (1987). *Conceptualizaciones matemáticas en adultos no alfabetizados*. México (DF): (Documento publicado en versión rústica, DIE-CINVESTAV)

INEA. (2000a). *Matemáticas para empezar. Libro del adulto 1, 2 y 3*. México (DF): Educación para la vida. Matemáticas. INEA.

INEA. (2000c). *Cuentas útiles. Libro del adulto 1, 2, 3 y 4*. México (DF): Educación para la vida. Matemáticas. INEA.

Mariño, G. (1986). *Cómo opera matemáticamente el adulto de sector popular (Constataciones y propuestas)*. Bogotá, Colombia: Dimensión Educativa.

Propuesta Didáctica para la Enseñanza de las Matemáticas

Edith Dubon
ITESM Campus Estado de México
México
endubon@itesm.mx

Metacognición — Nivel Básico

Resumen

La investigación se realizó en el ciclo escolar 1999-2000, en el primer grado de secundaria en una institución privada de Tlalnepantla, Edo. de México. Ésta consistió en la implantación y evaluación de una propuesta didáctica, cuyo objetivo principal fue mejorar el rendimiento académico de los alumnos en el primer grado de secundaria. La estrategia didáctica se enfocó hacia la enseñanza de las matemáticas en grupos numerosos, en la cual se agruparon alumnos con necesidades similares en matemáticas, clasificándolos por sus habilidades para aprenderlas, con la finalidad de nivelar sus conocimientos con el de sus compañeros de rendimiento promedio.

Introducción

La investigación se realizó en el ciclo escolar 1999-2000, en el primer grado de secundaria en una institución privada de Tlalnepantla, Edo. de México.

En dicha institución como en algunas otras, el problema de la reprobación en matemáticas era tan evidente y aceptado como lo cotidiano que ya no se consideraba un problema tener en promedio 50 alumnos reprobados de 400 en cada ciclo escolar.

En busca de una solución a nuestro problema de reprobación en matemáticas, se inició la investigación sobre los factores que determinan dicha reprobación, las variables involucradas fueron:

- Habilidades Matemáticas.
- Creencias en torno a las matemáticas
- Enseñanza de los contenidos.

Con respecto a estas variables se estableció la siguiente hipótesis:

"Si se clasifica a los alumnos en grupos más homogéneos en cuanto a sus habilidades, entonces podrán aprender matemáticas significativamente y efectivamente mediante una didáctica constructivista"

Para comprobar la hipótesis anterior, la estrategia didáctica se enfocó hacia la enseñanza de las matemáticas en grupos numerosos, dicha propuesta incluyó la agrupación de alumnos con necesidades similares en matemáticas, clasificándolos por sus habilidades para aprenderlas.

En cuanto a las creencias, sólo el éxito de la propuesta podría arrojarnos un resultado positivo, ya que: si todos los alumnos aprueban la creencia del "no puedo" desaparece.

La estrategia consistió en la implantación y evaluación de una propuesta didáctica, cuyo objetivo principal fue mejorar el rendimiento académico de los alumnos en el primer grado de secundaria. Dicha propuesta fue de naturaleza constructivista ya que tomó en cuenta la realidad del contexto como punto de partida, incluida en ésta sus necesidades de aprendizaje de las matemáticas. Además de aplicar el enfoque de la educación orientado a proyectos.

Considerando lo anterior, las necesidades de los alumnos radican en la heterogeneidad de sus procesos cognoscitivos, debido entre otros factores a los cambios físicos propios de la pubertad (incluyendo la química cerebral), abriendo un abismo entre alumnos pubertos y los que no han iniciado el proceso de cambio.

En general, la investigación tuvo una duración de 4 años; dos previos a la implantación de la propuesta, uno de ejecución y recolección de datos, otro más de interpretación de resultados. Se presentó como Tesis de Maestría para obtener el Grado en Educación con área terminal en Innovaciones Educativas.

Primeros Dos Años de Trabajo (Investigación Documental)

En esta primera etapa se hizo la investigación documental, incluyendo algunas investigaciones de campo auxiliares acerca de *Habilidades del Pensamiento* sustentados en el modelo cúbico de **Guilford (citado en Blanco 1997),** la investigación sobre los referentes que utilizan los docentes (de acuerdo a su formación académica), para detectar un problema de aprendizaje.

Los instrumentos utilizados para dichos diagnósticos fueron:

Test de habilidades aritméticas, generado a partir del cubo de Gilford y ejercicios utilizados por el sistema HÁBIL (Blanco, 1997).

Cuestionario sobre la forma en la que los profesores detectan un problema de aprendizaje (Elaborado a lo largo del curso de metodología dentro de la maestría en educación. 1999).

En ambas investigaciones se obtuvieron resultados que nos acercaban más a la idea de generar una propuesta didáctica para mejorar el rendimiento académico de alumnos en una institución donde sólo existen grupos de 50 alumnos, en un contexto de mesa_bancos en filas con poco espacio y un pizarrón.

Lo anterior incorporado a nuestra experiencia a lo largo de 10 años de trabajo docente, nos dio la pauta para generar una propuesta didáctica dirigida a alumnos de bajo rendimiento sin modificar la estructura de la institución educativa en la que se llevó a cabo.

Por un lado Gimeno (1984, p.103) nos menciona que los grupos heterogéneos demandan más atención y en consecuencia más tiempo, del cual no se dispone por contar con clases tan cortas. Por otro lado los grupos más homogéneos permiten atender las necesidades que tiene en común, en menor tiempo, lo cual indica una posibilidad de solución más efectiva.

Considerando también el trabajo de Piaget (citado en Carretero 1998) en cuanto a sus estadios se refiere, en el primer grado de secundaria los procesos cognoscitivos de los alumnos son heterogéneos, quizá más que en cualquier otra edad, debido a los cambios físicos generados por la pubertad.

Atando todos los cabos sueltos generados por la investigación documental así como la auxiliar, se decide realizar solo una modificación en la didáctica, no así del contexto pedagógico en su totalidad, esto debido a que en México se tiene un programa establecido, el cual no da flexibilidad de contenidos y con respecto a la institución educativa no existió flexibilidad de infraestructura para mejorar las condiciones del aula.

Tercer Año de Trabajo (Puesta en Marcha)

Con todas las limitaciones mencionadas anteriormente se procedió a la implantación de la propuesta siguiendo la siguiente metodología.

- Se presentó el proyecto a los directivos. Dicho proyecto consistía en tres niveles de matemáticas, de acuerdo a la hipótesis planteada, cada uno de los niveles se eligió con respecto al test de habilidades Ilimitadas proporcionado por el sistema HÁBIL dirigido por el Dr. Isauro Blanco, fundamentado en el cubo de Guilford (Blanco, 1997).

Sin embargo debido a problemas con la infraestructura de la escuela no fue posible establecer tres niveles, sino sólo dos, la causa principal fue la falta de aulas y docentes para asignarse a la misma hora.

- Al tener la aprobación de los anteriores, se consideró el perfil del docente a cargo de los grupos en cuestión. Se analizó el perfil de los docentes disponibles en la institución, la elección se realizó considerando los siguientes factores:

Disponibilidad para trabajar en equipo, experiencia docente, así como conocimiento del adolescente.

1. Se reunió un equipo de trabajo formado por un pedagogo, un psicólogo, un directivo, un docente de matemáticas y un administrador de proyectos.
    - El pedagogo se encargó de revisar la aplicación de las teorías del aprendizaje para proporcionar la fundamentación pedagógica. El psicólogo se encargó de aportar ideas para que el proyecto fuera el adecuado para pre-adolescentes. Fundamentación psicológica. El directivo se encargó de monitorear y aportar ideas para la realización del proyecto. El docente de matemáticas se encargó de incluir todos los temas de su materia en el proyecto, así como llevarlo a cabo con éxito. Y por último el administrador se encargó de proporcionar y evaluar

los indicadores, así como de organizar y consolidar el trabajo de todos los integrantes del equipo.

- La clasificación de grupos y subgrupos se realizó de la misma manera que en inglés e informática, formando niveles de aprovechamiento de la materia en cuestión. Se proporcionó el nombre de un personaje de la historia de las matemáticas para cada nivel. (Euclides, Pitágoras, Descartes, Newton, Leibnitz, Euler, Hiparía, Einstein)

Se obtuvo la asesoría del personal involucrado en el proyecto D.H.I. (Desarrollo de Habilidades Ilimitadas) así como su apoyo para la realización del examen diagnóstico e identificar las habilidades que pueden desarrollarse con las actividades de clase con la finalidad de atender las necesidades especiales de cada uno y así desarrollar las habilidades que se requieran para la comprensión de las matemáticas, aumentando la posibilidad del acceso al currículo por parte de los alumnos.

La clasificación se realizó con un rango de puntaje de la siguiente manera: los alumnos en un rango de 1 a 3 en habilidades matemáticas se colocaron en el grupo de nivel bajo, los alumnos en un rango de 4 a 9 se colocaron en el grupo de nivel alto (de acuerdo a la escala de 1 a 9 utilizada por el sistema HÁBIL; en la cual de 1 a 3 es por debajo del nivel, de 4 a 6, en el nivel esperado y de 7 a 9 superior al nivel esperado)

Se trabajó con 6 grupos experimentales y 2 grupos control para poder hacer la comparación final y verificar la hipótesis.

2. La dinámica fue cambiar de salón a la hora de matemáticas, se estableció un intercambio de alumnos por cada dos grupos, para que los subgrupos fueran más homogéneos y se tuviera mayor atención a las necesidades.

Los alumnos del grupo A y B, se intercambiaban para formar dos subgrupos, uno de 55 (nivel alto) alumnos en promedio y otro de 43 (nivel bajo). La dinámica se repitió para los grupos C y D; E y F, manteniendo a los grupos G y H intactos.

3. Para cada nivel se estableció la profundidad de los contenidos, los objetivos de área, terminales, etc. Los cuales se determinaron a partir de las reuniones que realizó el equipo de trabajo en cada sesión.

4. Al término del ciclo escolar recopilamos nuevamente toda la información del primer grado de secundaria en matemáticas, en las mismas condiciones que al inicio de la investigación.

Los instrumentos de evaluación fueron, exámenes escritos, trabajos en clase y examen de habilidades matemáticas.

Los **exámenes** fueron elaborados por la academia de matemáticas, aplicando el mismo examen a todos los alumnos, no importando el nivel.

Los **trabajos** en clase fueron diferentes, los alumnos en el nivel alto con habilidades matemáticas realizaron actividades enfocadas más hacia la didáctica tradicional.

Los alumnos en el nivel bajo trabajaron con la didáctica orientada hacia proyectos, se realizaron 5 a lo largo del ciclo escolar, cada uno llamado práctica de laboratorio.

La primera práctica consistió en la elaboración de un supermercado, la segunda consistió en el manejo de paréntesis con material concreto, la tercera el uso cotidiano de los números con signo, la cuarta, manejo de literales con material concreto y la quinta la elaboración de una maqueta de su escuela, esta elección fue resultado del trabajo realizado previamente. A lo largo de cada práctica se abordaron los contenidos del programa oficial de la Secretaría de Educación Pública (SEP, 1994). Cada práctica fue evaluada independientemente del examen escrito.

EL examen de desarrollo de *habilidades (sistema HÁBIL)* se aplicó parcialmente, solo para evaluar aquellas referentes a matemáticas.

5. Analizamos los resultados para la comparación de los grupos muestra y de los grupos control.

Los 3 indicadores (exámenes, trabajos y habilidades) fueron evaluados con los mismos instrumentos en todos los grupos, tanto en los experimentales como en los control, no distinguiendo niveles establecidos en cada subgrupo.

Último Año de Trabajo (Recopilación y Organización de Datos)

Al término del ciclo escolar se recopilaron todos los datos, incluyendo el post-test de habilidades, las calificaciones de los alumnos en general y ya comenzado el siguiente ciclo escolar, las calificaciones de segundo de secundaria de los mismos alumnos sometidos a la propuesta didáctica.

Los dos primeros indicadores se vieron reflejados en las calificaciones de los alumnos y el tercer indicador directamente en el test de habilidades.

Al analizar los datos obtenidos, se obtuvieron los siguientes resultados:

En cuanto a calificaciones se refiere el rendimiento académico de los alumnos mejoró, de los 50 alumnos de 400 que en promedio reprobaban cada año, sólo reprobaron 10, 7 de los cuales pertenecían a los grupos control (los cuales no se sometieron a ninguna estrategia didáctica diferente) y 3 pertenecían a los grupos experimentales, cabe mencionar que los 3 alumnos pertenecían al nivel bajo, terminando con 100% de aprobados en el nivel alto.

Después del periodo de regularización, en el cual se les aplica exámenes extraordinarios a los alumnos para demostrar que son capaces de continuar con sus estudios, el índice de reprobación se redujo a cero. Todos los alumnos aprobaron sus exámenes extraordinarios, comenzando el segundo año de secundaria para esa generación con 100% de aprobados. Siendo que en años anteriores 20 de los 50 alumnos que reprobaban la materia, no aprobaban el examen de regularización.

Con los resultados anteriores la hipótesis quedó comprobada, al clasificar a los alumnos en grupos más homogéneos en cuanto a sus habilidades, aprendieron matemáticas significativamente y efectivamente mediante una didáctica constructivista.

¿Por qué Comparo el Rendimiento Académico con el Aprendizaje Significativo?

Porque al ser constantes las calificaciones, esto es que los mismos alumnos en segundo año de secundaria (sin ninguna didáctica especial), hayan logrado tener los mismos resultados que en primero; me dan la pauta para inferir que han aprendido significativamente las bases correspondientes al primer grado de secundaria. Aunado a que son la única generación que ha tenido estos logros dentro de la institución.

Los resultados nos expresan la funcionalidad de esta propuesta didáctica, no descartando la posibilidad de que sea perfectible, ampliada y profundizada.

Referencias Bibliográficas

Ainscow, M. (1994). *Necesidades Especiales en el Aula.* Madrid: UNESCO-NARCEA

Blanco, I. (1997). *Hay Más Dentro de Tí: El Universo de la Inteligencia.* México: Universidad Hispanoamericana.

Carretero, M (1998) *Construir y Enseñar las Ciencias Experimentales.* Argentina: Aique.

Coll, C. (1997) *Psicología y Currículo. México*: Paidós.

Gimeno, J. (1984). *El fracaso escolar en la Enseñanza Primaria: Medios para Combatirlo.* Suiza:UNESCO.

SEP. (1997) *Plan y Programas de estudio, secundaria básica.* México: SEP.

Qué Ideas Tienen los Estudiantes Acerca de Su Comprensión: Un Estudio Transversal

Inés Elichiribehety y María Rita Otero
Grupo de Investigación en Enseñanza de las Ciencias (GIEC), Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Argentina
ielichi@exa.unicen.edu.ar, rotero@exa.unicen.edu.ar
Representaciones de los Estudiantes acerca de la Comprensión – Nivel Medio, Superior

Resumen

Este trabajo presenta resultados parciales de un proyecto más amplio, cuyo propósito es generar conocimiento sobre la evolución de formulaciones algebraicas y su utilización en la resolución de problemas. Se realizo un estudio referido a actividades relacionadas con la resolución y tratamiento algebraico de ecuaciones y funciones, según lo prescripto para cada año por el currículum a enseñar. Conjuntamente con el instrumento utilizado para el estudio mencionado, los estudiantes respondían preguntas acerca de cómo comprendían cada actividad, si la habían estudiado anteriormente, o nunca, si no recordaban como resolver y si reconocían o no el tema como un conocimiento anterior. Esta presentación muestra los resultados obtenidos para cada año escolar en cada actividad propuesta.

Introducción

Para dar cuenta de las modificaciones que sufren las formulaciones algebraicas desde un marco cognitivo se realizaron estudios transversales que abarcan los dos últimos años de la Educación General Básica y la Educación Polimodal. La metodología utilizada en esta investigación es de naturaleza descriptiva y exploratoria. Nuestro trabajo consistió en dos estudios diferentes, empleando como instrumento para recoger los datos pruebas de lápiz y papel. El primer estudio consta de actividades relacionadas con la resolución y tratamiento algebraico de ecuaciones (Elichiribehety et al., 2003). El segundo estudio es la resolución de dos problemas encuadrados en un modelo lineal, con el objetivo de inferir las características de los modelos mentales que ejecutan los sujetos y los marcos de resolución utilizados (Elichiribehety & Otero, 2002; Elichiribehety et al., 2002; Elichiribehety & Otero, 2004). En esta instancia, se presentan los resultados pertenecientes a la primera prueba, en la que se investigó, entre otros aspectos, sí reconocían o no el tema como un conocimiento anterior y el grado de comprensión que tenían en cada actividad.

En este trabajo particular, se intenta responder la pregunta: ¿cómo se relacionan los resultados del nivel de algebrización que poseen los sujetos y sus ideas acerca de cuánto comprenden?

Metodología y diseño del estudio

Se realizó un estudio transversal en Octavo y Noveno Año de la Educación General Básica, Primero, Segundo y Tercer Año Polimodal del Sistema Educativo Argentino. Se escogieron tres escuelas del radio céntrico de la ciudad de Tandil que tienen dos y tres turnos, en los cuales funcionan todos los niveles de la escolaridad buscando además que los cinco años, funcionaran en la misma dependencia y que los establecimientos tuvieran tradición escolar, fuesen numerosos y abiertos a los diferentes segmentos sociales. Se seleccionaron al azar tres divisiones de cada año y siete sujetos de cada una de ellas. Se solicitó que realizaran las actividades en forma individual y anónima. En el momento en que se realizó la selección los alumnos estaban cursando el tercer trimestre. De esta manera se constituyó una población efectiva de N=264 sujetos.

Se diseñó una prueba de lápiz y papel para estudiar cómo se resolvían distintas clases de ecuaciones y cómo los estudiantes podían reconocer la solución que obtenían o no, en diferentes gráficas que se les proponían. En la misma prueba, para cada actividad, los estudiantes debían responder un cuestionario (KPSI) diseñado por Tamir & Luneta (1978), este instrumento permite obtener información acerca del grado de conocimiento que los alumnos creen que tienen sobre los contenidos propuestos.

Formulación y descripción de categorías de análisis

Una vez obtenidos los registros, realizamos un primer análisis para clasificar los N=264 protocolos disponibles. Se generaron las categorías y sus respectivas subcategorías que se presentan en la Tabla 1, considerando los siguientes aspectos en cada una de las actividades: *Reconocimiento del tema y Comprensión del tema* para cada una de las tres actividades. La categoría *Reconocimiento del Tema* se registra con el propósito de conocer si los sujetos manifestaban haber estudiado o no el tema que se proponía en cada actividad. Se clasificaron tres subcategorías: *Reconoce el tema de la Actividad* (RTA), *No reconoce el tema de la actividad* (NRTA) y *No responde la Actividad* (NRA). Mientras que, la categoría *Comprensión del Tema* se propone con la intensión de percibir el grado de comprensión que los estudiantes creían tener con respecto a cada actividad. Se generaron cuatro subcategoría: *No Responde* (NR), *No lo Comprendo* (NLC), *Lo Comprendo Parcialmente* (LCP) y *Lo Comprendo Bien* (LCB).

TABLA 1

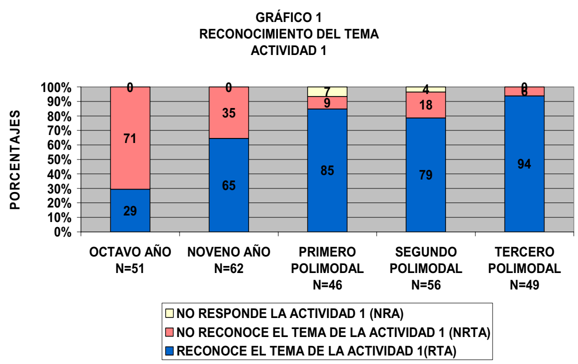
Categorías	***Subcategorías***
Reconocimiento del Tema	(RTA) *Reconoce el tema de la Actividad*
	(NRTA) *No reconoce el tema de la Actividad*
	(NRA) *No Responde la Actividad*
Comprensión del Tema	(NLC) *No lo Comprendo*
	(LCP) *Lo Comprendo Parcialmente*
	(LCB) *Lo Comprendo Bien*
	(NR) *No Responde*

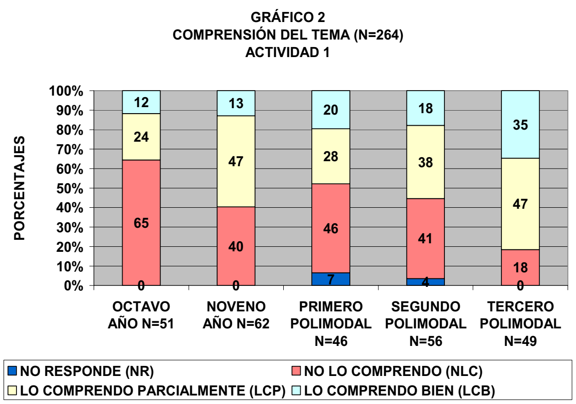
Descripción de los resultados para cada actividad

Actividad 1

El Gráfico 1 desagrega los resultados obtenidos en la *Actividad 1* para cada año escolar al que pertenecen los sujetos. Los porcentajes que aparecen en los gráficos asignan el 100 % al total de estudiantes pertenecientes a cada año escolar considerado.

La *Actividad 1* se vincula con la resolución de una ecuación de primer grado con coeficientes enteros y su relación con el gráfico para encontrar la solución. Los resultados muestran que la subcategoría *No Responde la Actividad 1* (NRA) se registra sólo en Primero y Segundo Año Polimodal con muy bajos porcentajes. Con excepción de Octavo Año la subcategoría *Reconoce el Tema de la Actividad 1* (RTA) se presenta en toda la escolaridad con altos porcentajes. Mientras que, la subcategoría *No reconoce el Tema de la Actividad 1* se encuentra con bajos porcentajes en el nivel Polimodal.





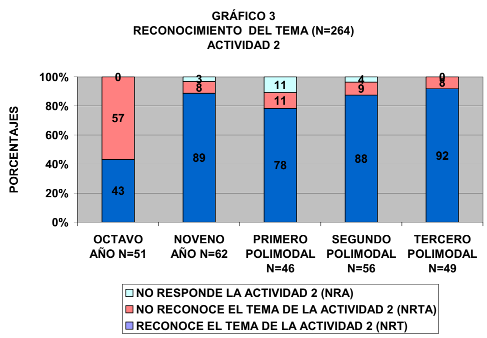
El Gráfico 2, desagrega los resultados obtenidos en la primera actividad sobre la *Comprensión del Tema*. El gráfico señala que la ausencia de respuesta se presenta con muy bajos porcentajes en Primero y Segundo Año Polimodal. La subcategoría *No lo Comprendo* (NLC) se presenta en toda la escolaridad. En Octavo, Primero y Segundo Año prevalece esta subcategoría sobre las demás. La subcategoría *Lo Comprendo Parcialmente* (LCP) está presente en todos los años, prevaleciendo en Noveno y Tercer Año con similares porcentajes. Mientras que, la subcategoría *Lo Comprendo Bien* (LCB) se encuentra en toda la escolaridad con porcentajes bajos con relación a las otras subcategorías.

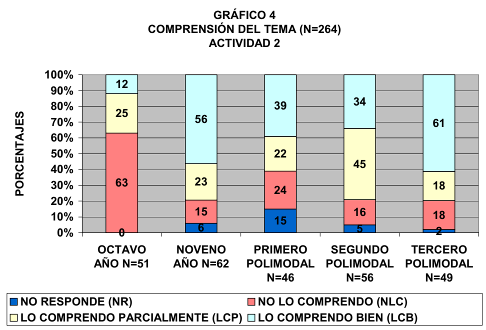
Actividad 2

El Gráfico 3, desagrega los resultados correspondientes a la categoría *Reconocimiento del Tema* de la *Actividad 2*. Esta actividad se refiere a la resolución de una ecuación de primer grado con coeficientes racionales. La subcategoría *No reconoce el Tema* prevalece en Octavo Año y con bajos porcentajes se encuentra presente en toda la escolaridad.

Los resultados muestran que la subcategoría *Reconoce el Tema de la Actividad 2* predomina en toda la escolaridad con altos porcentajes con excepción de Octavo Año.

Sin embargo es notable la diferencia encontrada entre la primera y segunda actividad para Octavo y Noveno Año. Para estos sujetos los resultados mejoraron sustancialmente en la Actividad 2. Pareciera que probablemente al no solicitar relacionar los gráficos con las ecuaciones pudieron reconocer el tema más fácilmente. La ausencia de respuesta sólo se registro en Noveno, Primero y Segundo Año con bajos porcentajes.





El Gráfico 4, desagrega los resultados correspondientes a la categoría *Comprensión del Tema* para la segunda actividad. Con excepción de Octavo Año la ausencia de respuesta se presenta en toda la escolaridad con bajos porcentajes. Para esta actividad, con la salvedad de Octavo Año, se observa una disminución de la categoría *No lo Comprendo* (NLC) en favor de la subcategoría *Lo Comprendo Bien* (LCB). Para la mayoría de los sujetos de Noveno y Tercer Año prevalece la subcategoría *Lo Comprendo Bien* (LCB). La subcategoría *Lo comprendo Parcialmente* (LCP) identifica a los sujetos de Segundo Año Polimodal, mientras que en el resto de la escolaridad se presenta con paridad de resultados.

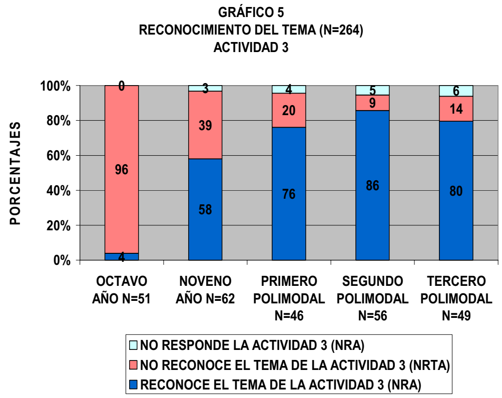
Estos indicadores parecieran mostrar que la comprensión de las ecuaciones de primer grado con coeficientes racionales no presenta una evolución de acuerdo al año escolar al que pertenecen los estudiantes.

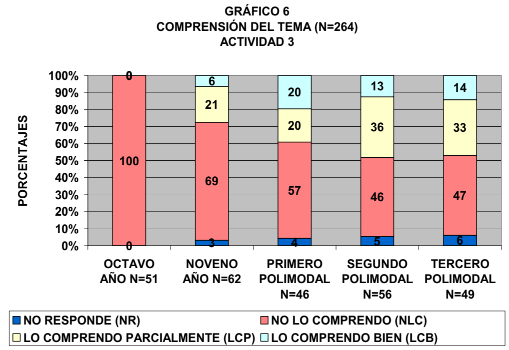
Actividad 3

En la tercera actividad se estudia por una parte, la relación entre los gráficos y los sistemas de ecuaciones y por otra parte, si encuentran la solución de los sistemas lineales a partir del gráfico. El objetivo de esta actividad es observar si los sujetos son capaces de relacionar los gráficos con los sistemas de ecuaciones.

A partir de los resultados que se muestran en el Gráfico 5, se observa que los sujetos pertenecientes a Octavo Año en su mayoría no manifiestan reconocer el tema correspondiente a los sistemas de ecuaciones lineales. En el resto de la escolaridad, esta subcategoría se encuentra con porcentajes más bajos.

La subcategoría *Reconoce el Tema de la Actividad 3* predomina con porcentajes elevados en Noveno, Primero, Segundo y Tercer Año. En estos mismos cursos se registra la ausencia de respuesta con muy bajos porcentajes.





El Gráfico 6, muestra los resultados obtenidos para las cuatro subcategorías formuladas sobre la Comprensión del Tema de la Actividad 3. A partir del gráfico se observa que la subcategoría *No lo Comprendo* (NLC) prevale con altos porcentajes en toda la escolaridad sobre las otras subcategorías. En Octavo Año el total de los sujetos manifiestan no comprender los sistemas de ecuaciones lineales. No obstante, cuando se solicita si reconocen el tema un bajo porcentaje responden afirmativamente. Para el resto de la escolaridad la subcategoría *Lo Comprendo Parcialmente* (LCP) supera en porcentajes a la subcategoría *Lo Comprendo Bien* (LCB) con excepción de Primer Año Polimodal que registra similares porcentajes en ambas subcategorías.

Los resultados del primer Estudio, que entre otros aspectos analiza la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, indican que son pocos los sujetos que resuelven algebraicamente de manera correcta (Primero 7%, Segundo 9% y Tercero 16%).Estos resultados se relacionan con la subcategoría *Lo comprendo bien* mientras que, la falta de comprensión o la comprensión parcial estaría indicando los bajos resultados encontrados. Se han observado casos en los que los sujetos citan como métodos de resolución al de igualación, sustitución y reducción por sumas y restas, sin embargo no consiguen actualizar los contenidos requeridos y optan por abandonar su resolución

De estos resultados podemos inferir que los estudiantes con excepción de Octavo Año en su mayoría reconocen el tema de ecuaciones de primer grado con una incógnita con coeficientes enteros y racionales, así como también sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Sin embargo, los resultados obtenidos en el estudio de la prueba de habilidad algebraica muestra que la ausencia de respuesta para la primera actividad se encuentra en toda la escolaridad con porcentajes muy elevados. Caracteriza a los sujetos de Primero, Noveno, Segundo y Octavo Año con indicadores muy elevados que prevalecen sobre las otras subcategorías. Sólo en Tercer Año es menor el porcentaje de esta subcategoría. Consideramos que una posible causa del bajo rendimiento se debe a la presencia de los gráficos asociados a la ecuación propuesta y a la dificultad de encontrar la solución de la ecuación gráficamente.

Con respecto a la Actividad 2, se advierte, con excepción de los sujetos pertenecientes a Octavo Año, una mejora sustancial en las resoluciones correctas y una disminución significativa en los porcentajes de sujetos que no responden. Dadas las dificultades advertidas en la primera actividad relativa a los distintos marcos de resolución, la presentación de esta ecuación sin relación con ningún gráfico, probablemente no haya inhibido a los sujetos para abordarla.

En las resoluciones de la tercera actividad se observa que los sujetos pertenecientes a Octavo Año no desarrollan la actividad correspondiente a los sistemas de ecuaciones lineales. Los resultados del resto de los estudiantes señalan que en su mayor parte no relacionan los sistemas de ecuaciones con los gráficos correspondientes, ni pueden encontrar la solución de los sistemas de ecuaciones a través del gráfico. Estos resultados colaboran con nuestra hipótesis de la falta de trabajo didáctico en el Juego de Marcos (Douady, 1984) en las clases de matemática. Con respecto a la resolución algebraica de los sistemas de ecuaciones lineales, la ausencia de respuesta predomina con porcentajes muy elevados en los cuatro cursos que intentan resolver los sistemas de ecuaciones.

Conclusiones

Los resultados de este estudio reflejan que en su mayoría con excepción de Octavo Año los sujetos reconocen como un conocimiento anterior las ecuaciones de primer grado con coeficientes enteros y racionales y los sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo, al analizar las respuestas acerca de su comprensión sobre estos temas, los resultados disminuyen notablemente en toda la escolaridad. La falta de comprensión señalada por los sujetos concuerda con los resultados obtenidos en el primer estudio que señalan que los estudiantes presentan grandes dificultades en la resolución algebraica de ecuaciones, independientemente de la edad y del año escolar al que asisten. Así podemos inferir que la mayoría de los sujetos son capaces de resolver sólo ecuaciones de primer grado con una incógnita. Por otra parte, se aprecia que los sujetos no logran obtener información pertinente a partir de los gráficos, es decir, no pueden identificar y seleccionar el gráfico que corresponde a la ecuación propuesta, y a obtener la solución gráficamente. Ni consiguen verificar o justificar sus propias realizaciones, por lo tanto, la verificación no es una herramienta de control para la mayoría de los sujetos. Estos resultados, unidos a la capacidad de los sujetos de no utilizar las herramientas algebraicas en la resolución de problemas sugieren la urgencia de cambiar la enseñanza -aprendizaje del Álgebra en la escolaridad obligatoria, por una ingeniería didáctica que tome en cuenta las resoluciones de los estudiantes y asuma sus características cognitivas, para obtener resultados más satisfactorios.

Referencias Bibliográficas

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7*(2), 5-32.

Elichiribehety, I. y Otero, M. (2002). Marcos de Resolución, Modelos Mentales y Comprensión *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 15 Tomo 1, pp. 611-617. México.

Elichiribehety, I., Otero, M. y Fanaro, M. (2002) Los Modelos Mentales que subyacen a la resolución de problemas algebraicos: un estudio transversal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 5 (2), 169-198.

Elichiribehety, I., Otero, M R; Corica, A. (2003) ¿Cómo resuelven ecuaciones los estudiantes de la educación media?: un estudio transversal. *Actas V Simposio Internacional de Ecuación Matemática*. Versión en CD, ISBN 987-20239-1-3, Universidad Nacional de Lujan, Argentina.

Elichiribehety, I. y Otero, M. (2004) La Relación entre los Marcos de Resolución y los Modelos Mentales en la Enseñanza del Álgebra. *Educación Matemática 16* (1), 29-58.

Tamir y Luneta, (1978). An Análisis of laboratory activitiesin the BSCS. Yellow Versión. *American Bilogy Teacher* 40, 426-428.

Enseñanza y Comprensión del Enfoque Frecuencial de la Probabilidad en Segundo Grado de Secundaria

Saúl Elizarraras
Cinvestav del IPN-DME
México
lizarrasa@hotmail.com
Probabilidad, Estadística y Combinatoria — Nivel Básico

RESUMEN

Se analizó la praxis del docente para identificar dificultades de enseñanza y de comprensión del enfoque frecuencial de probabilidad, de alumnos de segundo grado de secundaria, cuando el medio que se emplea es un libro de texto[1]. El papel de la enseñanza se identificó en tres fases: la *primera*, con el análisis de su *propuesta institucional*; la *segunda*, con la docencia y su praxis; la *tercera*, con la identificación de dificultades de comprensión de *ideas fundamentales de estocásticos* (Heitele, 1975). Sobre éstas, su ausencia en la formación de la docencia (Galván, 1996) define en el aula el predominio del pensamiento determinista, lo cual coarta el desarrollo del pensamiento de lo *posible* en los alumnos para el estudio de situaciones azarosas, que se promete más difícil en los niveles educativos medio superior y superior (Fischbein, 1975).

Introducción

Parte de una investigación más amplia sobre comprensión de la probabilidad en la educación secundaria, este estudio enfocó el segundo grado con los objetivos: i) identificar elementos de estocásticos requeridos para la práctica de la docencia en ese tema, mediante análisis de la enseñanza del enfoque frecuencial; ii) identificar dificultades de comprensión del enfoque frecuencial de probabilidad de alumnos en situaciones de enseñanza. Aquí presentamos sólo algunos de los resultados obtenidos.

1. Elementos teóricos

Aspectos epistemológicos y cognitivos fundamentan este estudio.
Se propone considerar para la enseñanza de estocásticos diez ideas fundamentales (Heitele, 1975), sistemática y continuamente, con conexiones significantes con el mundo del alumno: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de la adición, regla del producto e independencia, equidistribución y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable estocástica, ley de los grandes números y muestra.

Algunos estudios han señalado que la advertencia de la noción de azar ocurre en el período de las operaciones formales (12-15 años) debido a la concurrencia de las operaciones lógicas y aritméticas, las cuales constituyen un sistema de acciones interrelacionadas siempre bajo un camino riguroso y reversible (Piaget & Inhelder, 1951).

---

[1] (Filoy, E..; Figueras, O.; Ojeda, A. M.; Rojano, T & Zubieta, Gonzalo; 2001)

Las intuiciones son adquisiciones cognitivas que intervienen directamente en las acciones prácticas o mentales (Fischbein, 1975), con características globales, inmediatas, estructurales, extrapolatorias y autoevidentes. Las clasifica en primarias (experiencia del individuo, correctas, o incorrectas como sesgos) y secundarias (resultantes de la educación).

El cálculo de algoritmos bayesianos es más simple cuando la información está codificada en un formato de frecuencias que cuando lo está en un formato estándar de probabilidad (Gigerenzer & Hoffrage, 1995).

Una visión cognitiva del ser humano lo consideraría como máquina y como persona, pues lo interno y lo externo confluyen simultánea y de modo relacionado (Frawley, 1999). En este mismo sentido señala de la evidencia disponible tres tipos de subjetividad: el procesamiento no consciente, la conciencia y la metaconciencia (ver págs. 155-158).

2. Elementos metodológicos

Este estudio, de orden cualitativo (Eisner, 1998), se organizó en tres fases. Se estudiaron situaciones de enseñanza referidas al enfoque frecuencial de la probabilidad en segundo grado de secundaria, con identificación de dificultades en la práctica docente y de comprensión de los alumnos con un libro de texto como medio (Filloy *et al*, 2001).

2.1. Primera fase: propuesta institucional. Se analizaron los medios institucionales proporcionados al docente para la asignatura de Matemáticas, específicamente para el área de probabilidad en segundo grado de secundaria (SEP, 1993; SEP, 1999; SEP, 2000).

2.2. Segunda fase: Estudio dirigido. La conjugación de docencia e investigación en estas sesiones se orientó hacia el estudio de estocásticos, para posibilitar una indagación sobre la práctica docente en el aula, mediada por un libro de texto (Filloy *et al.*, 2001). Así, la interacción de docente e investigador se extrapoló al aula (*aula alterna*).

2.3. Tercera fase: Aula normal. Resultados de las fases anteriores orientaron la investigación hacia la comprensión de probabilidad de estudiantes, luego de su enseñanza en el aula realizada por este investigador. Se preservaron condiciones ordinarias de la práctica del docente de matemáticas con su grupo de alumnos, a excepción de la estrategia de enseñanza puesta en juego y de instrumentos y técnica para recopilar información.

Estrategia de enseñanza. Se utilizaron las lecciones de probabilidad en el libro de texto empleado en la segunda fase. El enfoque frecuencial se introdujo vía repeticiones independientes efectivas de fenómenos aleatorios, con cuyos resultados se elaboraron tablas y gráficas para organizar, analizar y describir comportamientos de las frecuencias absolutas y relativas respectivas, y se plantearon problemas sobre situaciones azarosas.

2.4. Criterios de análisis. Los elementos teóricos devinieron criterios de análisis, tanto de documentos como de datos recogidos. Se consideraron: ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos para organizar y tratar la información, términos utilizados, situación planteada y estructura. Las sesiones de *estudio dirigido*, *aula alterna* y *aula normal* fueron video grabadas, transcritas y analizadas; en bitácora escrita se anotó información fuera de cinta y lo que se consideró conveniente observar.

3. Resultados del análisis curricular de la propuesta institucional para probabilidad

El estudio documental proveyó un marco para el de la práctica docente.

- *Plan y Programas de Estudio* (SEP, 1993). Propone el orden del tratamiento de los contenidos a juicio de cada profesor (ver pág. 37); al final, la presentación de las nociones de probabilidad, por lo que es de esperar su enseñanza al último o incluso su omisión.

- *Libro para el maestro* (SEP, 2001). Reconoce la utilidad práctica del enfoque frecuencial. Señala que la enseñanza de probabilidad tendría que recurrir a un conjunto de "ideas fundamentales", pero no las explicita ni indica la bibliografía respectiva (pág. 334).

- *Fichero de Actividades Didácticas* (SEP, 1999). Plantea 18 fichas para cada grado, de las cuales sólo una por grado corresponde a probabilidad. Aunque la de segundo se refiere al enfoque frecuencial, es inconveniente por el empleo de agujas para la realización de ensayos de Bernoulli. La obra apela a que los profesores propongan más fichas, pero por su formación, los docentes carecen de elementos de probabilidad para ello (Galván, 1996).

- *Secuencia y Organización de Contenidos* (SEP, 2000). Se estructura en cuatro ejes: el primero, para orientaciones didácticas; el segundo, para los contenidos programáticos; el tercero sugiere actividades que remiten a los otros medios; y el cuarto ofrece comentarios.

- *Propuesta para la enseñanza de la probabilidad* (Filloy *et al*, 2001). Satisface los propósitos y contenidos del *Plan y programas de estudio de la asignatura de Matemáticas* (SEP, 1993); en total, cinco lecciones tratan sobre probabilidad, de las cuales tres se refieren al enfoque clásico, una al frecuencial y otra a la ley de los grandes números. Cada una se desarrolla respecto a una sola situación. No proponen ejemplos ni ejercicios; no usan notaciones simbólicas. Plantean tablas de doble entrada y gráficas para tratar el enfoque clásico y tablas de una entrada (para anotar frecuencias) y gráficas para el frecuencial. Sólo se emplean porcentajes en las lecciones sobre presentación y tratamiento de la información.

4. Docencia y praxis en segundo grado de secundaria

Como ya se señaló, en este estudio el medio utilizado para la enseñanza incluye dos lecciones (39 y 40; Filloy *et al*, 2001, págs. 193-201) que implican al enfoque frecuencial de probabilidad, por lo que nos referiremos a ellas. Plantean la situación de la suma de dos números obtenidos al azar de manera independiente, con posible repetición, del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (como la suma obtenida al lanzar dos dados ordinarios). Desarrollan las características de la densidad de probabilidad de la variable aleatoria en cuestión.

4.1. Estudio dirigido. La estrategia utilizada con la lección 39 consistió en su lectura e identificación de lo implicado en la situación que plantea para reconocerlo en las actividades propuestas: espacio muestra, cálculo de probabilidades de eventos, registro de datos en tablas y gráficas. Adicionalmente, se solicitó a los docentes que efectuaran 360 ensayos del lanzamiento de dos dados; previamente se discutió acerca de la frecuencia esperada de cada suma de los valores de la variable aleatoria y, al final, se le comparó con la frecuencia obtenida (ver Figura 4.1). Se atribuyó a coincidencia la obtención de la misma frecuencia para las sumas cuatro y diez (ver Figura 4.1), aunque sus probabilidades sean las mismas (46). Como se cita en el pasaje, donde "C" denota al conductor de la sesión y "P" al profesor, para el docente no había tal coincidencia, sino todo lo contrario (47), con lo cual manifestó predominio de lo determinista, relego del azar y desconocimiento de las ideas de independencia, muestra y ley de los grandes números.

46. C: Un último comentario, observen que en la suma cuatro nos da 34 y, casualmente, su simétrico de la suma cuatro, que sería el diez, [también] es una coincidencia.

47.P: Al contrario, no es una coincidencia, sino que se esperaba treinta y abajo treinta y, como lo mencionas, es simétrico también treinta y cuatro y treinta y cuatro. [Otro profesor mueve la cabeza afirmando que está de acuerdo con la afirmación de este profesor].

La lección 40, continuación de lo planteado en la 39, propone la comparación de la frecuencia relativa de ocurrencia de un evento con su probabilidad.

Los profesores evidenciaron desconocimiento acerca de la frecuencia esperada, lo cual se puso de manifiesto también en la enseñanza en *aula alterna*, pues no se discriminó entre los posibles valores y el número esperado de veces que ocurra cada posible valor (78).

78. P: ..., en donde dice frecuencia esperada en 200 tiradas. Esta columna la vamos a determinar apoyándonos de nuestro tablero donde tenemos todos los posibles resultados (en la página 197). Ahí vamos a determinar cuántos posibles resultados teníamos para cada suma y ésos son los resultados que esperábamos obtener.

SUMA	FRECUENCIA ESPERADA	FRECUENCIA	FRECUENCIA RELATIVA
2	10	11	11/360
3	20	15	15/360
4	30	34	34/360
5	40	42	42/360
6	50	56	56/360
7	60	61	61/360
8	50	39	39/360
9	40	33	33/360
10	30	34	34/360

11	20	23	23/360
12	10	12	12/360
TOTAL	360	360	1

Figura 4.1. Frecuencias obtenidas al realizar 360 repeticiones empleando dos dados.

5. La enseñanza y su influencia en la comprensión de estudiantes del enfoque frecuencial

Se implementaron 20 sesiones de enseñanza por este investigador, con un grupo de 20 estudiantes de segundo grado de secundaria pública, con las lecciones de probabilidad del texto utilizado en la segunda fase y, *grosso modo*, como estrategia de enseñanza la realización efectiva de repeticiones independientes de los fenómenos aleatorios referidos en el texto y la descripción de los resultados. Precedió a las sesiones la aplicación de un cuestionario de exploración para caracterizar condiciones iniciales de los alumnos respecto a probabilidad y, al final de ellas, se aplicó el mismo cuestionario para identificar variaciones en el desempeño de los estudiantes.

5.1 Diseño del cuestionario. Con formato de opción múltiple, cuatro opciones para cada uno de los ocho problemas planteados, el cuestionario solicitó justificación escrita de cada selección realizada y se permitió la corrección de respuestas; por su presentación, se insinuó la justificación en lengua natural (ver ejemplares de las preguntas en §5.2). La contestación, individual, requirió de 90 minutos. Los cuatro primeros problemas se refirieron al enfoque clásico, y los restantes al enfoque frecuencial.

Las justificaciones proporcionadas por los alumnos en las aplicaciones inicial y final del cuestionario fueron de cinco tipos: “determinista” (D), inadvertencia del azar; “sesgo” (S), como intuiciones incorrectas; “marco” (M), evocación de un referente familiar; “probabilística” (P), manifestación del pensamiento de lo posible; “frecuencial” (F), alusión a la mayor frecuencia de ocurrencia del evento. Los primeros tres tipos de justificación citados corresponderían a la etapa de procesamiento no consciente y los dos últimos a la etapa de conciencia o, incluso, a la de la metaconciencia (Frawley, 1999).

5.2. Condiciones iniciales para la enseñanza: resultados generales del cuestionario. Los cuatro últimos problemas (enfoque frecuencial) resultaron en mayor número de respuestas correctas que los referidos al enfoque clásico. Para los problemas 5 y 6, diez justificaciones (50 %) fueron correctas y congruentes, y doce (60 %) para el problema 7, en acuerdo con que el enfoque frecuencial es vía *natural* a la probabilidad (Gigerenzer & Hoffrage, 1995, pág. 8). En cambio, los alumnos parecieron desconocer el enfoque clásico; predominaron justificaciones deterministas sin advertencia del azar y escasa o nula familiaridad con el lanzamiento de dados y extracciones de contenidos de urnas. Como ejemplo, el problema 4:

4. Gustavo y Ángel juegan a los volados, pero lanzando dos monedas al aire. Gustavo gana al caer dos soles, mientras que Ángel gana en caso de que caiga águila y sol. ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar?

a) Gustavo b) Ángel c) tienen la misma probabilidad d) ninguno ¿Por qué?_______________

Las opciones propuestas completan las posibilidades con dos volados: el inciso **a** evidencia desconocimiento de la independencia por la preferencia de dos soles; el inciso **b** (correcto) consideró el evento más probable; el inciso **c** previó la dificultad para distinguir entre (águila, sol) y (sol, águila); el **d** revelaría desconocimiento de los casos posibles.

Se identificaron tres tipos de justificación. Tres estudiantes (15 %) seleccionaron el inciso **a** debido a su interpretación determinista (D) del enunciado, como si lo posible no se distinguiera de lo dado ni de lo necesario (Piaget & Inhelder, 1951): "*Gustavo, porque él ya tiene ganado su juego", "Gustavo, porque lleva dos soles ganados", "Ángel águila y un sol", "porque cayó la misma figura"*. De los cuatro alumnos (20 %) con selección correcta y congruente del inciso **b**, que identificaron el espacio muestra (probabilística), sólo uno enlistó las cuatro posibilidades y los otros tres emplearon lengua natural. De los 13 estudiantes (65 %) que seleccionaron el inciso **c**, 11 sólo consideraron los eventos (sol, sol) y (águila, sol), y como igualmente posibles; los otros dos no pusieron en juego lo posible (sesgos). Así, 16 alumnos (80 %) carecieron de elementos (de combinatoria) para enlistar el espacio muestra, indispensable para comprender el enfoque clásico de probabilidad.

El único estudiante que en condiciones iniciales seleccionó el inciso **b** (correcto) mediante una lista de todos los casos posibles (aa, ss, as, sa), en condiciones finales también lo seleccionó, elaboró un diagrama de árbol para enlistar todos los casos posibles y añadió: *Dos de cuatro eventos posibles son favorables para Ángel y en cambio uno de cuatro son posibles para Gustavo, por lo tanto, Ángel tiene mayor probabilidad de ganar*. De este modo paso de la etapa de la conciencia a la de la metaconciencia (Frawley, 1999).

*5.3. Condiciones finales de la enseñanza: resultados generales del cuestionario***.** La enseñanza resultó más efectiva para el enfoque clásico, pues aumentó el número de respuestas correctas significativamente; por ejemplo, para el problema 4 se pasó de cuatro (20 %) a diez (50 %) justificaciones correctas y congruentes. En cuanto al enfoque frecuencial, sólo para los problemas 5 y 6 resultó un incremento de cinco respuestas correctas (25 %) para ambos casos. Como ejemplo, el problema 5.

5. La compañía "Chocolates Baratos" distribuye sus productos en toda la República Mexicana, como promoción graba una estrella en el interior de la envoltura de uno de cada tres chocolates. Al juntar tres envolturas con estrella, puedes canjearlas por una pluma. ¿Cuál es el menor número de chocolates que hay que comprar para que sea más probable reunir tres estrellas?

a) 4 b) 8 c) 12 d) 16 ¿Por qué?__________

El inciso **a** anticipa desconocimiento de proporcionalidad. El inciso **b** es el correcto, pues ocho es el número más próximo a nueve. Podría considerarse correcto el inciso **c** si la justificación evidenciara proporcionalidad: en nueve chocolates pueden salir tres envolturas con estrella. Finalmente, el inciso **d** no considera la restricción "el menor número".

En la segunda aplicación, quince alumnos (75 %) seleccionaron el inciso **b** o el **c** y justificaron congruentemente, e indicaron la aproximación a nueve chocolates (F): *porque en cada 3 chocolates que compres viene una estrella, así comprando 8 te pueden salir 3 estrellas*; (F): *Multipliqué 3 por las 3* *estrellas y la mayor probabilidad es* [para] *12*. En las cinco respuestas restantes, incorrectas (25 %), se identificaron dificultades con variable aleatoria y la proporcionalidad no fue incorporada (S)*: porque piden sólo 3 envolturas*.

5.4. Enseñanza y comprensión de probabilidad de los estudiantes. Los resultados sugieren que la diferencia en frecuencias de respuestas correctas para preguntas referidas al enfoque clásico, en condiciones iniciales y finales de la enseñanza, podría dar cuenta de la contribución de ésta, basada en el enfoque frecuencial, a la comprensión de los estudiantes del enfoque clásico de la probabilidad; y, de manera particular, a su advertencia del espacio muestra, de lo que es *posible*. Ya se ha señalado la mayor dificultad que reviste considerar la probabilidad de un evento en un solo ensayo del fenómeno aleatorio correspondiente, que cuando se considera ese evento en repeticiones del fenómeno (Piaget & inhelder, 1951, Cáp. X). No obstante, parecería menos significativa la contribución de ese tipo de enseñanza a la comprensión del enfoque frecuencial mismo.

Consideraciones particulares

Las lecciones propuestas en el medio utilizado (Filloy *et al*, 2001) aluden al juego, lo que conlleva un reto para el docente por buscar el interés de los alumnos para tratar las ideas fundamentales implicadas. Es necesario que el docente se vuelva hacia su práctica para reflexionarla; una manera consiste en video grabar algunas sesiones que imparta, para disecar sus estrategias de enseñanza y estudiar dificultades surgidas bajo criterios de análisis específicos. Pero el docente también requiere de espacios para expresar y compartir reflexiones y experiencias del aula de estocásticos de manera sistemática, planeada y reconocida. Las sesiones de *estudio dirigido* permitieron acceder a la indagación en *aula alterna* y ésta, a su vez, a la investigación en *aula normal*. La organización del estudio realizado deviene una alternativa para un perfil nuevo de docencia, con rasgos para la autocrítica de la enseñanza. El binomio docencia-investigación es fundamental para contribuir a la mejora educativa (Eisner, 1998, págs. 137-140). Para ello, se requieren escuelas que promuevan la formación académica permanente de profesores y de alumnos. Además, es indispensable que los docentes sepan lo que es realmente fundamental en estocásticos y que puedan considerar a las ideas fundamentales desde un plano intuitivo hasta un plano formal (Heitele, 1975).

Referencias Bibliográficas

Alarcón, J., Bonilla, E., Nava, R., Quintero, R., y Rojano, T. (2001). *Libro para el maestro.* Educación Secundaria. *Matemáticas*. México: SEP.
Eisner, E. W. (1998). *El ojo ilustrado*. España: Paidós.
Espinosa, H.; García, S. y García, M. A. (1999). *Fichero de Actividades Didácticas* México: SEP.
Filloy, E., Figueras, O., Ojeda, A. M., Rojano, T. y Zubieta, G. (2001). *Matemática Educativa.* Segundo grado. México: Mc Graw-Hill.
Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking*. Holanda: Reidel.
Frawley, W. (1999). *Vygotsky y la ciencia cognitiva*. España: Paidós.
Galván, M. (1996). *Nubes y relojes en la curricula de secundaria*. Tesis de maestría. No publicada.. Cinvestav. México.

Gigerenzer, G. y Hoffrage, U. (1995). Cómo mejorar el razonamiento bayesiano sin enseñanza: Formatos de frecuencia. *Psychological Review*. EUA: APA.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*. 6 (pp. 187-205). Holanda,: Reidel.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *The Origin of the Idea of Chance in Children.* New York: The Norton Library.

SEP (1993). *Plan y Programas de estudio.* Educación Secundaria. Matemáticas. México: SEP.

Xique, J. C., Espinosa, H. & Montes, M. D. (2000). *Secuencia y Organización de Contenidos.* Educación Secundaria. Matemáticas. México: SEP.

Un Marco para la Evaluación de la Estadística en Ingeniería

Daniel Fernández y Mónica Guitart
Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo – Mendoza
Argentina
dsfernandez@speedy.com.ar, monicaguitart@hotmail.com.ar
Probabilidad, Estadística y Combinatoria – Nivel Superior

Resumen

En este trabajo presentamos un rediseño del método de evaluación, para dar un marco de evaluación al curso de Estadística en carreras de Ingeniería, revalorizando algunos instrumentos de evaluación, basados en la evaluación continua y una permanente interacción teoría-práctica, además de la incorporación de los proyectos de análisis de datos como técnica didáctica. Con este marco se aspira a que la educación se vuelque sobre el contexto, creando un escenario para la puesta en obra del aprendizaje de la Estadística a partir de un variado menú de actividades, abriendo puertas para enriquecer el aprendizaje a través de la búsqueda de información, la observación, las entrevistas, la interacción, la experimentación, la utilización de recursos tecnológicos e informáticos, la producción oral y escrita, y el trabajo en equipo.

Introducción

Según Garfield (1995), la educación estadística debe apuntar al desarrollo de sujetos que piensen estadísticamente y puedan aplicar su conocimiento a resolver problemas reales, por lo que ya no es apropiado evaluar el conocimiento de los estudiantes haciéndolos calcular y aplicar fórmulas.

Plantearemos nuestra propuesta según algunos principios de la evaluación matemática:

- El principio del *contenido*: La evaluación debería reflejar el contenido estadístico que es más importante que aprendan los alumnos.
- El principio del *aprendizaje*: La evaluación debería enfatizar el aprendizaje de la Estadística y apoyar la buena práctica educativa.

Estos principios conducen al uso de formas alternativas de evaluación para proporcionar una información más completa acerca de lo que los alumnos han aprendido y son capaces de hacer con su conocimiento, así como para proporcionarles una retroalimentación más detallada y prolongada acerca de la calidad de su aprendizaje.

Si se piensa ampliamente acerca de qué es lo que deseamos que los estudiantes aprendan, emerge un objetivo fundamental de la educación de la Estadística. Este objetivo es tal que hará que los estudiantes que están finalizando sus encuentros con la Estadística, se vuelvan ciudadanos aptos para:

- *Comprender y tratar con la incertidumbre, la variabilidad y la información estadística en el mundo que los rodea, y participar eficientemente en una sociedad abrumada por la información.*
- *Contribuir o tomar parte en la producción, interpretación y comunicación de datos en los problemas que encontrarán en su vida profesional.*

Como parte del logro de esta amplia visión, es necesario que los estudiantes de Estadística sean capaces de: *entender el propósito y la lógica de las investigaciones estadísticas*, *entender el proceso de las investigaciones estadísticas*, *entrenar en habilidades procedimentales*, *entender las relaciones matemáticas*, *entender probabilidad y posibilidad*, *desarrollar habilidades interpretativas y una cultura estadística*, *desarrollar habilidades para la comunicación estadística* y *desarrollar provechosamente las herramientas estadísticas*.

En resumen, los alumnos deberían ser capaces de lograr que el proceso de requerimientos estadísticos pueda llevarlos a mejores conclusiones que confiar en datos anecdóticos o en sus propias experiencias subjetivas, e incluso, en sus intuiciones, cuyos resultados no están garantizados. Los estudiantes deberían aprender a adoptar una actitud de cuestionamiento cuando se enfrentan con un argumento que supuestamente está basado en datos (por ejemplo, "todas las personas son...") o un reporte de resultados o conclusiones de una investigación estadística, un relevamiento o investigación empírica.

Un marco para la evaluación en Estadística

¿Por qué proponer un marco para la evaluación de la Estadística?

La evaluación, dentro del modelo didáctico, es un elemento de especiales características que la diferencian de las demás, pero a su vez, depende estrechamente de los elementos didácticos, es decir, es el momento de buscar datos que ayuden a decidir si la estrategia metodológica desarrollada es adecuada o no, y en qué medida lo es para guiar un proceso de enseñanza que configure y provoque un proceso de aprendizaje acorde con los objetivos previamente propuestos.

La evaluación es una instancia generadora de información durante todo el proceso de enseñanza-aprendizaje, permitiendo la toma de decisiones que fundamente modificaciones, ajustes y revisiones para las futuras prácticas docentes. Esta forma de considerar la evaluación se encuadra en una teoría del currículo en la cual el alumno genera sus propios saberes en el marco de las situaciones significativas que organiza y guía el docente. También insistimos en que la evaluación ayuda a los docentes a analizar las necesidades de los alumnos en relación con los objetivos, *a valorar las oportunidades y recursos disponibles, a elegir las estrategias de enseñanza y a evaluar la calidad de su trabajo*.

¿Cuáles son los propósitos de la evaluación en el rediseño del marco para la evaluación?

Los propósitos son:

- La *autoevaluación*, que permite:
  - ✓ Facilitar el autocontrol de los aprendizajes.
  - ✓ Analizar el proceso de enseñanza-aprendizaje en forma inmediata y permanente.
- El *diagnóstico* y el *seguimiento*, que permite:
  - ✓ Proporcionar información que contribuya a la toma de decisiones respecto a la mejora de la instrucción.
  - ✓ Ayudar a los estudiantes a conocer sus fortalezas y debilidades en el aprendizaje de un tema.

- La *información*, que permite:
  - ✓ Proporcionar información individual a los alumnos sobre cuánto han aprendido y en qué puntos tienen dificultades.
  - ✓ Proporcionar información a los docentes sobre cuánto parece comprender la clase un tema, si requiere de actividades adicionales o es momento de pasar a un nuevo tema.
  - ✓ Proporcionar información a los docentes acerca de la percepción global del curso: enfoque, clases, materiales y métodos.
- La *acreditación* y la *calificación*, que permite:
  - ✓ Proporcionar un indicador global del éxito de los alumnos para alcanzar los objetivos del curso.
  - ✓ Responder a los fines educativos.
- La *descripción global*, que permite:
  - ✓ Suplementar otros resultados de evaluación para proporcionar una descripción más amplia del conocimiento de los estudiantes.

Plantearemos nuestro marco para la evaluación de la Estadística en carreras de Ingeniería, siguiendo las **dimensiones** que rigen la evaluación, según Garfield (1997):

La primera dimensión de este marco es *QUÉ EVALUAR*, que puede descomponerse en: conceptos, habilidades, aplicaciones, actitudes y creencias.

La segunda dimensión del marco es el *FIN DE LA EVALUACIÓN*, esto es: por qué se recoge la información y cómo se usará.

La tercera dimensión se refiere a *QUIÉN HARÁ LA EVALUACIÓN*: el estudiante, sus compañeros (como miembros de su grupo de trabajo) o el profesor.

La cuarta dimensión es el *MÉTODO* que se usará para evaluar, por ejemplo: preguntas, informe, proyecto en grupo, proyecto individual, composición, dossier, etcétera.

La quinta dimensión es la *ACCIÓN* que se toma y la naturaleza del feedback dada al estudiante, el cual es un componente crucial del proceso de evaluación que proporciona el puente entre la evaluación y la mejora del aprendizaje.

Al elaborar el marco no se debe interpretar que la intersección de categorías cualesquiera de cada una de las dimensiones lleve a una técnica significativa de evaluación. Por ejemplo, si queremos medir la comprensión del concepto de variabilidad (*qué medir*) con el *fin* de averiguar si los alumnos comprenden este concepto, siendo los estudiantes en un grupo los que actúan como evaluadores (*quién*) con el *método* de hacer una pregunta y siendo la *acción / feedback* una puntuación numérica, podemos obtener resultados particularmente significativos y útiles.

Según Batanero (2001) *"... la evaluación es el estudio de la correspondencia entre el significado institucional de los conceptos que se trata de enseñar en una cierta institución escolar y el significado personal construido por los estudiantes y tiene, por tanto, un carácter social"* (p.129), podemos entonces, partir de la idea que la evaluación constituye un modo de dirigir el currículo, razón por la cual, deberíamos fijar lo que los alumnos deberían conocer y ser capaces de hacer como resultado de las instrucción estadística. La evaluación, entonces, debe proveer de indicadores para conocer el alcance de las metas.

Teniendo en cuenta que, además de revisar la metodología de trabajo actual en la programación del curso y sus resultados, se prevé incorporar innovaciones a tener en cuenta en el rediseño del marco para la evaluación del mismo, se cree oportuno hacer un alto en los objetivos curriculares que deben guiar la enseñanza y orientar la evaluación.

Las situaciones de prueba, entendidas como los conjuntos específicos de tareas que integran teoría y práctica en actividades contextualizadas, seleccionadas por ser representativas o más tipificantes del quehacer del campo para el cual se están formando los alumnos y para cuya resolución se requiere de un adecuado manejo e integración de saberes, nos ha permitido obtener resultados satisfactorios en la construcción de instrumentos que representen una totalidad construida especialmente para apreciar la existencia de variedad de aprendizajes que se articulan en torno de un eje que los integra y les da sentido. Este instrumento, nos ha permitido comenzar a experimentar con un formato que nos permite contextualizar el problema con un verdadero argumento de novela. Con diálogos, opiniones, formulación de preguntas y la necesidad de argumentar una postura frente a las mismas. Este formato es apropiado para insistir en la comunicación de resultados e interpretaciones, que tanto venimos pregonando.

Si bien la metodología de trabajo que se ha implementado también emplea procedimientos y métodos múltiples de evaluación, se ha visto que el análisis de los mismos se ha referido a tres métodos fundamentales que han sido registrados sistemáticamente: *pruebas objetivas*, *pruebas de resolución de problemas* y *encuestas de opinión* del curso.

El paso inmediato en las innovaciones a realizar en la programación del curso, consiste en incorporar los *proyectos de análisis de datos* como técnica didáctica, añadiéndose así a los instrumentos de evaluación del curso. No se trata de reemplazar el sistema de evaluación actual por el método de proyectos, sino de incorporarlo al sistema como un instrumento más.

Nuestra propuesta de evaluación

Basados en los objetivos propuestos y después del análisis de las dimensiones en las que vamos a desarrollar nuestro curso de Estadística en las carreras de Ingeniería, nuestra propuesta de evaluación consta de distintos instrumentos de evaluación, que nos permiten realizar un seguimiento y una importante retroalimentación del aprendizaje.

Nuestra concepción es que la evaluación forma parte de un todo integrado donde las acciones evaluativas posibilitan a quienes las llevan a cabo: *mejorar*, *perfeccionarse*, *ajustarse a cambios*, *corregir los errores* e *incidir en los aciertos*, en síntesis, aportan información sumamente rica para fundamentar la toma de decisiones que guiarán el quehacer educativo.
Basados en la propuesta sobre instrumentos de evaluación, materiales y recursos didácticos propuestos en Batanero (2001) y en base a las experiencias previas con grupos de alumnos de ingeniería, hemos desarrollado una serie de instrumentos para realizar la evaluación continua de nuestro curso.

Para el **diagnóstico y seguimiento** del proceso de enseñanza-aprendizaje, trabajamos con evaluaciones que apuntan fuertemente al aspectos conceptual, con el formato de opción múltiple y de verdadero-falso, que abarcan uno o dos temas. Además, de pruebas de resolución de problemas, en general no estructuradas, con situaciones reales o ficticias que planteen problemas del área de la Ingeniería y que exijan al alumno tomar decisiones y proponer soluciones, a partir de la información obtenida al resolver y analizar los problemas. En estas últimas se permiten el uso del texto de referencia.

Para la **autoevaluación**, los alumnos disponen del siguiente material:

- *Ítems de verdadero-falso y de opción múltiple*
  Estos ítems tienen por finalidad: proveer a los alumnos de un instrumento de evaluación que facilite el autocontrol de su propio aprendizaje, como parte de la autogestión del aprendizaje y entrenarlos en el uso de uno de los instrumentos de evaluación utilizados en el curso (las pruebas objetivas).

- *Pruebas ya evaluadas.*
  Es bien conocida la ansiedad generada en los estudiantes por saber de antemano cómo serán los exámenes, qué se pregunta, cuáles son los puntos del programa más importantes, cuáles los más difíciles, cuáles se dejan de lado, con cuánto se aprueba, y unas cuántas preguntas más. La transparencia con los estudiantes puede contribuir a atenuar esta incertidumbre. A tal fin, en nuestra propuesta de evaluación, además de poner a disposición de los estudiantes un número suficiente de exámenes finales y pruebas ya evaluadas, se da una guía con comentarios sobre los resultados obtenidos en su momento, las dificultades observadas y otras sugerencias que se consideren convenientes.
  Se ha elaborado, también, para el rediseño del marco de evaluación, la resolución de algunos exámenes, siguiendo las consignas explicitadas en los mismos con indicación del puntaje asignado a cada consigna de los problemas evaluados.

- *Documento de apoyo para la resolución de problemas. Criterios y parámetros de evaluación.*
  Hemos elaborado un documento especialmente preparado para orientar a los alumnos en la interpretación de las consignas de los problemas y en el criterio con que se revisa lo producido por ellos en el momento de asignar una calificación al examen. De ningún modo este material puede sustituir la actividad constructiva del docente con sus estudiantes, pero es un recurso que pretende acompañar al estudiante en el proceso de aprendizaje ofreciendo ideas, propuestas y sugerencias que favorezcan el trabajo profesional del docente y el esfuerzo individual del alumno. No se trata de hacer las cosas ‘fáciles’, sino de construir juntos, de ofrecer alternativas para orientar el esfuerzo.

- *Guía de problemas* propuestos por unidad temática, con resultados.
  La guía de problemas propuestos ha sido elaborada *reformulando* los problemas que presenta el texto de referencia y otros textos de la bibliografía, adaptándolos a la modalidad de rendir la evaluación con la posibilidad de consultar el texto durante la misma. También se han redactado aplicaciones de la Estadística al campo de la Ingeniería. Los problemas han sido revisados, se han resuelto y los resultados se publican. No todos los problemas propuestos en la guía son resueltos en clase. Precisamente, la idea es que los alumnos dispongan de material adicional para resolver mientras estudian y puedan verificar el resultado obtenido.

- *Guía de mediación del texto de referencia*
  La guía acompaña al alumno en su aprendizaje, con sugerencias para el estudio, planteo de preguntas, análisis de párrafos, cuestionamientos sobre algún tema y fe de erratas.

Para la **retroalimentación**, contamos con encuestas y entrevistas personales que nos permiten una rápida e inmediata respuesta del desarrollo del curso, además, obvio está, de contar con los resultados de las evaluaciones y el análisis de los errores.

Para **acompañar el aprendizaje**, además del material comentado, contamos con un sitio web, donde los alumnos encuentran dicho material, pueden comunicarse por correo electrónico para plantear dudas y consultas y conocer los resultados de sus evaluaciones.

Para **integrar** los conocimientos y **desarrollar las habilidades** propuestas en nuestro objetivo, hemos pensado en la incorporación de los *Proyectos de Análisis de Datos*, con los cuales se aspira a que la educación se vuelque sobre el contexto, abriendo puertas para enriquecer el aprendizaje a través de la búsqueda de información, la observación, las entrevistas, la interacción, la experimentación, la utilización de recursos tecnológicos e informáticos, la comunicación (verbal o escrita, produciendo informes) y el trabajo en equipo, dando lugar a una interacción y articulación con el contexto académico, científico, institucional, social y profesional. Esta forma de trabajo, promueve múltiples habilidades que no se limitan a una manera distinta de aprender Estadística, sino que abarcan también las capacidades sociales y emotivas a la hora de enfrentar un reto, así como la de evaluar su propia evolución a lo largo del desarrollo del mismo.

Conclusiones

Durante el desarrollo de este trabajo se han hecho comentarios concluyentes a partir de los resultados tratados en los apartados respectivos. No obstante, creemos oportuno sintetizar y concentrar las conclusiones obtenidas luego del análisis de la metodología propuesta:

- Las *pruebas objetivas*, no fueron sólo utilizadas como instrumento de autoevaluación que acompaña el autoaprendizaje del estudiante, junto con la guía de mediación del texto que hemos elaborado a tal fin, sino también, se utilizaron como un útil instrumento de evaluación continua del proceso de enseñanza-aprendizaje, prácticamente clase a clase, que permite la devolución inmediata de los resultados, a la vez que es posible tomar acciones correctivas en las prácticas docentes sobre la marcha y sugerir pautas a los alumnos en función de los resultados observados. Con una construcción, revisión y análisis de ítems, es posible construir pruebas objetivas que vayan mucho más allá de la evaluación de contenidos factuales y permitan movilizar el estado cognitivo del sujeto frente a un objeto matemático reconocido como objeto de saber. Éste es un instrumento potente en la quinta dimensión comentada para el marco de evaluación, es decir, la *ACCIÓN* que se toma y la naturaleza del feedback dado al estudiante, componente crucial del proceso de evaluación que proporciona el puente entre la evaluación y la mejora del aprendizaje.

- Las *pruebas de resolución de problemas*, tienen el carácter de evaluaciones integradoras, complementarias de las pruebas objetivas, que permiten la observación, no sólo de aspectos conceptuales, sino de procedimientos y actitudes.

- Sostenemos la idea de continuar calificando el desempeño del estudiante en el curso de Estadística mediante el uso de instrumentos múltiples, en función de la segunda dimensión comentada en el marco para la evaluación, esto es, según sea el *FIN DE LA EVALUACIÓN*. Los proyectos de análisis de datos se constituirán en otro instrumento que nos permitirá calificar el desempeño de los alumnos, en varios órdenes, entre los cuales están la comunicación oral y escrita.

- El identificar las dificultades y los errores más frecuentes que presentan los alumnos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Estadística y la Probabilidad, nos ha permitido saber cuáles son nuestras debilidades y fortalezas, a fin de progresar en el proceso de mejora continua de nuestra enseñanza.

- Analizada la efectividad de los instrumentos y procedimientos de evaluación del aprendizaje de los estudiantes y su complementación, hemos comprobado la eficacia y eficiencia de los métodos e instrumentos del sistema, y estamos en condiciones de poder considerar su inclusión en nuestro propósito final: la construcción de un marco de evaluación.

- Sobre esta plataforma, en el rediseño del marco para la evaluación del curso, incorporamos los proyectos de análisis de datos como estrategia didáctica, a fin de profundizar y mejorar el trabajo en la producción oral y escrita de los estudiantes, a la vez que ampliamos las competencias promovidas desde el curso, haciendo uso de la tecnología informática para el análisis de datos tomados del campo de las ingenierías, dando así, una gama de posibilidades para que el alumno se exprese y muestre sus habilidades en distintos contextos y en situaciones de prueba diferentes.

Referencias Bibliográficas

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística. Universidad de Granada.

Charles, R; Lester, F; O'daffer, P. (1987). *How to Evaluate Progress in Problem Solving*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Gal, I; Garfield, J. (1997) (Ed.). *The Assessment Challenge in Statistics Education*. Netherlands: IOS Press.

Garfield, J. (1993). *An Authentic Assessment of Students' Statistical Knowledge*. En N. Webb (Ed): National Council of Teachers of Mathematics 1993 Yearbook: Assessment in the Mathematics Classroom. Reston, VA: NCTM, 187-196.

Garfield, J. (1995). *La evaluación del aprendizaje de la estadística*. En UNO *5,* Julio 1995, 5-14.

Webb, N; Romberg, T. (1992). Implications of the NCTM Standards for Mathematics Assessment. En T. Romberg (Ed.): *Mathematics Assessment and Evaluation: Imperatives for Mathematics Education*. Albany: State University of the New York Press.

La Resolución de Problemas como Herramienta de Diagnóstico del Proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática en Educación Diversificada y Profesional

Thairo Figueroa y Mario Arrieche
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Venezuela
thairo@cantv.net, marrieche@ipmar.edu.ve
Formación de Profesores – Nivel Medio

Resumen

En esta investigación se pone en funcionamiento el marco teórico semiótico-antropológico para la investigación en Didáctica de la Matemática (Godino y Batanero, 1994). Se aplicará un paradigma metodológico de tipo mixto entre métodos cualitativos y cuantitativos (Goetz y Lecompte, 1988). El interés de este estudio está centrado en el análisis de la eficacia de la resolución de problemas como una herramienta para diagnosticar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en educación diversificada y profesional La población objeto de estudio son los estudiantes del primer año del ciclo diversificado y profesional del sistema educativo venezolano.

Introducción

Para darle solución al problema que se aborda en este trabajo se pone en funcionamiento el modelo teórico semiótico-antropológico (Godino y Batanero 1994,1997) para la investigación en Didáctica de la Matemática. Esta investigación está inmersa en la línea: *Perspectiva del enfoque semiótico antropológico para la didáctica de la matemática*, adherida al "Núcleo de investigación en Educación Matemática Dr. Emilio Medina" de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador- Maracay, Venezuela. Aquí se plantea la resolución de problemas como herramienta de diagnóstico del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, en educación diversificada y profesional del sistema educativo Nacional. Con esto se intenta englobar varios aspectos relevantes, tales como proponer una evaluación diagnóstica eficaz que motive al alumno y no lo encasilla en meras pruebas de respuesta cerrada. Con esta evaluación diagnóstica se pretende observar y determinar las actitudes de los alumnos, motivación, conocimientos previos, como comprenden, etc. Además también se pretende estudiar la práctica docente en el desarrollo de una clase. Por cuestiones de espacio describimos brevemente el planteamiento del problema, los objetivos, el marco teórico y la metodología de la investigación.

Planteamiento del problema

En la actualidad sigue teniendo vigencia lo tradicionalmente conocido como fases de una clase: *inicio, desarrollo y cierre*. En tal sentido, González (1997) señala que el profesor debe revisar información previa, en cuanto a contenidos y procedimientos, diseñar un plan de clases que incluya estrategias específicas de motivación. El Reglamento de la Ley Orgánica de Educación (1999), de la República Bolivariana de Venezuela en su artículo 92 propone que la "Evaluación diagnóstica: tendrá por finalidad identificar las aptitudes, conocimientos, habilidades, destrezas, intereses y motivaciones que posee el alumno para el logro de los objetivos del proceso de aprendizaje por iniciar." De tal manera que se piensa en la resolución de problemas como una estrategia de diagnóstico novedosa, la cual no solo identifique los conocimientos previos del alumno, sino también los procesos de pensamiento y formas de resolver ciertas situaciones matemáticas.

Debido a esto se genera la interrogante inicial de nuestra investigación: ¿Es útil la resolución de problemas para identificar los conocimientos previos, las dificultades de comprensión y la motivación hacia el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en educación diversificada y profesional? Para poder atender esta interrogante, nos planteamos a su vez responder sistemáticamente a los siguientes planteamientos, que clasificamos según tres dimensiones o categorías (Godino, 1999 y Arrieche, 2002); *epistemológica, cognitiva e instruccional*:

La problemática *epistemológica*: ¿Qué es la Resolución de Problemas? ¿Cuáles son sus concepciones según diversos autores? ¿Cómo se origina la utilización de la resolución de problemas? ¿Qué importancia tiene la resolución de problemas para la matemática?

La problemática *cognitiva*: ¿Cuáles son los conocimientos matemáticos previos que tienen los estudiantes de educación diversificada y profesional, al emprender el estudio de los contenidos matemáticos correspondientes? ¿Cuáles son las dificultades y/o obstáculos que presentan estos estudiantes? ¿Cuáles son los errores que cometen?

La problemática *instruccional*: ¿Qué estrategias remediales se pueden aplicar en el caso de que el alumno no esté preparado para iniciar el estudio de las nociones de trigonometría? ¿Cuál es la actitud de los estudiantes hacia el estudio de este contenido?

Objetivos de la investigación

1. Objetivo general de la investigación:

Analizar la eficacia de la resolución de problemas como herramienta para diagnosticar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en los estudiantes de educación diversificada y profesional.

2. *Objetivos específicos de la investigación:*

- Hacer un estudio epistemológico con el fin de precisar el origen y desarrollo de la resolución de problemas, las distintas concepciones según diversos autores y su importancia para la matemática.
- Analizar algunos ejemplos de los problemas que pueden ser usados para diagnosticar los conocimientos previos en los estudiantes de educación diversificada y profesional al emprender el estudio de las nociones básicas de trigonometría.
- Caracterizar los significados personales de los conocimientos matemáticos previos antes de estudiar estas nociones, en los estudiantes de educación diversificada y profesional.

Marco teórico

Antecedentes

Para dar soporte al estudio, se consideraron relevantes registros referenciales, consultados de libros y artículos de distintas fuentes; relacionados con el tema objeto de investigación, organizados en tres categorías: epistemológicos, cognitivos e instruccional, de acuerdo al esquema usado por Arrieche (2002).

- *Epistemológicos.* Hay variedad de autores que refieren a ciertas terminologías y teorías, enfocadas bajo distintas posiciones, pero que de alguna manera nos adentra al origen, desarrollo y construcción del término "resolución de problemas":
-

Bañuelos (1996), muestra el término resolución de problemas bajo el enfoque del procesamiento humano de la información, indicando que dicho término es un proceso cognitivo complejo que involucra el conocimiento almacenado en la memoria a corto y largo plazo, además supone la entrada como la percepción del problema, y la salida del sistema cognitivo como la respuesta, quedando entre una y otra los conocimientos mencionados. La estructura o espacio del problema es la que establece el estado inicial, la meta y las restricciones que deben tenerse en cuenta. Es la representación que el solucionador se hace en el momento de enfrentarse a un planteamiento.

Callejo (1996) manifiesta que resolver un problema no es un acto puramente cognitivo, ya que junto a una base de conocimientos y al control y regulación de dichos conocimientos, intervienen también los afectos, como creencias, emociones, etc. Pero además las condiciones socioculturales en que se realice la tarea.

Por otro lado Arenas y Cordeñozo (2000), detectan dos significados de este término, de manera extrema: una como ejercicios rutinarios, donde se entiende a los problemas como un conjunto de ejercicios organizados y preestablecidos para aplicar una técnica determinada, y el otro, como cuestión no rutinaria, perpleja o difícil, donde la situación se plantea novedosa, y no se dispone de una estrategia o técnica específica.

- *Cognitivos.* En relación a la resolución de problemas como una actividad determinada, es importante precisar también ¿cómo aprenden los resolutores? ¿cómo piensan y razonan?, etc., para ello es necesaria la revisión de algunos antecedentes cognitivos. Relacionado con este aspecto, Oteiza (2001) proporciona algunas ideas que se relacionan e introducen a estas incógnitas, tal es el caso de algunas alternativas para innovar en el proceso de evaluación de los aprendizajes matemáticos e invita a poner más atención, al momento de evaluar, en comprobar qué saben los alumnos y cómo razonan, centrar la evaluación como parte integrante de la docencia, que el alumno reconozca sus fortalezas y desarrollar un lenguaje en donde se permita expresar formas de razonar.

Guzmán (2000) introduce un aspecto cognitivo interesante y novedoso; como lo es la actividad subconsciente en la resolución de problemas, que si bien este tema no esta bien claro, como lo declara este mismo autor, esta es un área en que el inconsciente parece jugar un papel importante. Es difícil pensar que durante un proceso de resolución de algunos problemas, de la mente emerjan ideas del azar, tiene que haber un proceso de selección importantemente poderoso que permita que la mente consciente sea influenciada solamente por algunas ideas que tengan algún sentido.

- *Instruccionales*. Guzmán (2000) entre otras cosas pone de manifiesto la marcada importancia de la heurística en la enseñanza de la matemática, dejando ver que la enseñanza a través de la resolución de problemas es actualmente uno de los métodos más invocado. La intención de usar este método como estrategia de enseñanza, es que el alumno manipule los objetos matemáticos, que active su capacidad mental, ejercite su creatividad, reflexione sobre su propio proceso de pensamiento, que adquiera confianza en sí mismo; entre otras cosas. Este autor expone una forma de presentación de un tema matemático específico, basado en resolución de problemas, además estima que en todo proceso de educación matemática, el profesor debe tener mucho tino, para que coloque al alumno en situación de participar, sin aniquilar el placer de ir descubriendo por si mismo lo que los grandes matemáticos han logrado con tanto esfuerzo.

Bases teóricas

En esta investigación adoptamos el enfoque semiótico-antropológico, para investigación en Didáctica de la Matemática, propuesta por (Godino y Batanero 1994,1997). Entre las nociones teóricas descritas en este modelo que se ponen en funcionamiento en este trabajo para explicar las dimensiones epistemológica, cognitiva e instruccional del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática tenemos las de significado institucional y personal entendidas como el sistema de prácticas actuativas y discursivas que una institución (o una persona) realizan para resolver un determinado campo de problemas.

Los sistemas de prácticas significativas realizadas por una institución fueron definidas por Chevallard, Bosch y Gascón (1997) como praxeología matemática (teorías, contenidos u organizaciones matemáticas), asimilada en nuestro modelo con el de significado institucional. Otras nociones del modelo útiles para nuestro son la praxeología didáctica y función semiótica, para lo cual remitimos al lector a Godino y Batanero (1997).

Marco metodológico

Tipo de investigación

- Debido a la naturaleza de esta investigación se aplicará un paradigma metodológico de tipo mixto entre métodos cualitativos y cuantitativos (Goetz y Lecompte, 1988). De manera que diversas técnicas y enfoques se adecuan y combinan de acuerdo a cada faceta planteada; la epistemológica, la cognitiva e instruccional. De acuerdo a cada faceta planteada; la epistemológica, la cognitiva e instruccional. En la faceta epistemológica se combina el estudio documental y cualitativo. En la faceta cognitiva se utilizará un enfoque cuantitativo y experimental, pero también cualitativo-interpretativo. En la faceta instruccional se aplicará un enfoque cualitativo-interpretativo, conjuntamente con la faceta anterior, donde se analizará las estrategias de enseñanza y diagnostico bajo el contexto del estudio de las nociones básicas de trigonometría.

- La población objeto de estudio son los estudiantes del primer año de ciencias del ciclo diversificado y profesional de Venezuela. El estudio se realizará, en el contexto de las clases de matemática, a una muestra de 38 alumnos, cursantes de una sección de primer año de ciencias, en la Unidad Educativa Nacional "Mariño", ubicada en Turmero estado Aragua.

- La recolección de datos se realizará a través de una prueba, donde se escogerán una serie de problemas, considerados para el alumno, para analizar las respuestas de éstos, no como la contratación de respuesta correctas o incorrectas, sino realmente observar y estudiar analíticamente cada construcción de respuesta. Además de aplicar la prueba también se efectúa la observación no participante. La técnica utilizada es la que en Rodino y Arrieche (2001) se designa como "análisis semiótico", la cual permite caracterizar tanto los significados sistémicos (o praxeológicos) de un objeto matemático como los significados elementales puestos en juego en un acto de comunicación matemática.

Referencias Bibliográficas

Arrieche M. (2002). *La teoría de conjuntos en la formación de maestros: facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática.* Disertación doctoral no publicada, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España.

Callejo M. (1996). Evaluación de procesos y progresos del alumnado en resolución de problemas. *UNO 8*, 53 – 63.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona, España: Horsori e ICE de la Universidad de Barcelona.

De Guzmán, M. (2000). *Enseñanza de las Ciencias y la matemática.* Obtenido en enero de 2003, del sitio web de la Organización de Estados Iberoamericanos: http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm

Gaceta Oficial de la República Bolivariana de Venezuela (1999). *Reglamento de la Ley Orgánica de Educación*. (Decreto 36 787). Venezuela: Gaceta Oficial de la República Bolivariana de Venezuela.

Godino J. (1999). *Análisis semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática.* Obtenido en septiembre de 2002, del sitio web de la Universidad de Granada: http://www.ugr.es/jgodino/Doctorado/

Godino J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques 14*(3), 325 – 355.

Godino J. y Arrieche M. (2001). *Análisis semiótico como técnica para caracterizar significados.* Documento presentado en la Reunión del Grupo DMDC-SIIDM, V Simposio de la SEIEM, Almeria, España.

González, F. (1997). *La enseñanza de la matemática. Proposiciones didácticas*. FEDEUPEL.

Goetz, J, y Lecompte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativ*a. Madrid, España: Morata.
Padilla, F. (1999). *La evaluación en Matemática.* Madrid, España: Centro de Desarrollo Curricular.

Ecuación Cuadrática: Una Ingeniería Didáctica para su Enseñanza

María Rey Genicio, Graciela Lazarte, Silvia Porcinito y Clarisa Hernández
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Jujuy
Argentina
tresm@imagine.com.ar
Pensamiento Algebraico – Nivel Medio

Resumen

Este trabajo surge de un Proyecto de Investigación que busca el desarrollo de estrategias innovadoras en la enseñanza de la matemática, el cual se apoya en una concepción de aprendizaje constructivo y significativo y adopta la «Ingeniería Didáctica» como metodología para la investigación. En ese marco se elaboró una ingeniería didáctica para una enseñanza –aprendizaje más eficiente de ecuaciones cuadráticas. Mediante las actividades planteadas el alumno llega a obtener la fórmula de la ecuación cuadrática, a determinar las propiedades de sus raíces, a factorearla y a reconstruirla a partir de sus raíces. En esta propuesta se plantea una vinculación permanente entre los conceptos de ecuación cuadrática y función cuadrática; asimismo se trabaja en distintos marcos: numérico, algebraico, gráfico, geométrico y funcional.

Consideraciones sobre la propuesta

En el marco del Proyecto de Investigación " Innovaciones Didácticas en la Enseñanza de la Matemática" se ha desarrollado una propuesta didáctica para abordar el tema: Ecuación cuadrática. Esta investigación se nutre teóricamente de los aportes de la psicología del aprendizaje y de la didáctica de la matemática. Sintetizamos a continuación los aportes más relevantes de cada una.

De la fuente psicológica se toma las teorías cognitivas que entienden que el aprendizaje efectivo requiere participación activa del estudiante en la construcción del conocimiento, ya que este proceso está mediado por procesos de pensamiento, de comprensión y de dotación de significado. Entonces la actividad de los alumnos es base fundamental para el aprendizaje mientras que la acción del docente es aportar las ayudas necesarias, estableciendo esquemas básicos sobre los cuales explorar, observar, y reconstruir conocimientos. En esos esquemas se articulan la información (aportada por el docente, los textos, los materiales y los alumnos) con las acciones cognitivas de los sujetos.

Se toma también el concepto de Interacción Socio–Cognitiva: la cognición humana óptima se lleva a cabo con la colaboración de otras personas y de objetos físicos y simbólicos que potencian las capacidades individuales. Así los procesos grupales de construcción de conocimientos se constituyen en medios altamente eficaces para el logro de un aprendizaje significativo, aunque en ellos se hace necesaria una intervención del docente muy cuidadosa, optimizando las actividades, facilitando los intercambios cognitivos, supervisando, recuperando oportunamente lo producido en cada grupo, y logrando la reorganización final de los conocimientos.

Por otra parte, de la fuente didáctica general se toma el concepto de estrategia didáctica de Bixio: conjunto de las acciones que realiza el docente con clara y conciente intencionalidad pedagógica, o sea, de lograr un aprendizaje en el alumno. Algunos de sus componentes son el estilo de enseñanza, la estructura comunicativa de la clase, el modo de presentar los contenidos, las consignas, los objetivos y su intencionalidad, la relación entre materiales y actividades, los criterios de evaluación, etc. Las estrategias deben apoyarse en los conocimientos previos de los alumnos (significatividad), orientar la construcción de conocimientos a partir de materiales adecuados y ser factibles de desarrollarse en el tiempo planificado, con la cantidad de alumnos con que se cuenta y con la carga horaria destinada.

En el campo de la Didáctica de la Matemática, la propuesta se apoya en la «ingeniería didáctica» (Douady – 1996): elaboración de un conjunto de secuencias de clases concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo para efectuar un proyecto de aprendizaje. En los análisis preliminares se tuvieron en cuenta las dificultades y los errores más frecuentes de estos aprendizajes, las prácticas habituales para el tratamiento de este tema y los diferentes enfoques que presentan los libros de texto sobre el mismo.

La concepción y el diseño de las actividades se encuadran dentro de «la teoría de las situaciones didácticas» de Guy Brousseau: proponer situaciones «adidácticas» en las que el docente no debe mostrar su intencionalidad ni intervenir indicando al alumno qué hacer; sino provocar que el alumno acepte la responsabilidad de la situación de aprendizaje. Así, la llamada «Situación fundamental», dada por las situaciones adidácticas, enfrenta a los alumnos a un conjunto de problemas que evolucionan de manera tal que el conocimiento que se quiere que aprendan es el único medio eficaz para resolverlos. Intervienen las «variables didácticas» para que el conocimiento evolucione en niveles crecientes de complejidad, y las «recontextualizaciones» de los conceptos tratados en los marcos geométrico y algebraico le otorgan significatividad a la propuesta.

En la resolución de los problemas, se espera que aparezcan distintas estrategias. También se sugieren puestas en común en las que se validen los resultados, se detecten los errores, se analicen las distintas propuestas y representaciones que se hayan utilizado, se elijan las más eficaces, se debatan las argumentaciones, se identifiquen los conocimientos puestos en juego, etc. a fin de que esos conocimientos evolucionen en la totalidad del grupo de clase y converjan hacia el que se quiere construir.

Los problemas diseñados responden a las «condiciones del buen problema» enunciadas por Douady; ya que: los enunciados tienen sentido en relación con los conocimientos previos; todos los alumnos están en condiciones de dar alguna respuesta, al menos para el problema inicial; admiten distintas estrategias de resolución y se pueden formular en distintos marcos (geométrico y algebraico). Y, principalmente, el conocimiento buscado es un conocimiento adaptativo en tanto es el medio científico de responder eficazmente a los problemas. Además se propone que en la puesta en marcha se cumplan las fases enunciadas por Douady en las que, dado el problema inicial: 1º– Se movilizan los objetos matemáticos conocidos para resolver el problema (Fase: Antigua). 2º– Se ponen en marcha instrumentos nuevos. Aparece el "nuevo implícito" (Fase: Búsqueda). 3º– Se hacen explícitos los conocimientos construidos en la fase anterior (Fase: Explicitación). 4º– El docente descontextualiza el conocimiento dándole la categoría de «objeto matemático» (Fase: Institucionalización). 5º– Se da a los alumnos diversos problemas destinados a provocar el funcionamiento como instrumentos explícitos de lo que ha sido institucionalizado (Fase: Familiarización – reinversión). 6º– El nuevo objeto es susceptible de convertirse en antiguo para un nuevo ciclo de la dialéctica instrumento-objeto (Fase:

Complejidad de la tarea o nuevo problema).

Propuesta didáctica

La intencionalidad de este trabajo es que el alumno construya el concepto de ecuación cuadrática a través de una serie de actividades que plantean una mayor implicación y razonamiento que en las propuestas tradicionales de enseñanza.

El abordaje de la resolución de ecuaciones cuadráticas se realiza sobre la construcción previa de los conceptos de función cuadrática: forma polinómica y forma canónica, representación gráfica, desplazamientos y estiramientos de la gráfica, coordenadas del vértice, existencia de ceros a partir de la gráfica. Con la primer actividad culmina el estudio de la función cuadrática (Ejercicios del 1 al 9) y se inicia el de ecuación cuadrática (Ejercicios del 10 al 11).

La propuesta comienza con la siguiente actividad:

1) *En cada caso encuentra la fórmula polinómica correspondiente a la fórmula canónica dada:*

a) $y = (x + 3)^2 - 9$ b) $y = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}$ c) $y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

d) $y = 2(x + 1)^2 + 3$ e) $y = -5(x - 3)^2 - 1$ f) $y = -\frac{9}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$

2) *¿Podrías, sin representar gráficamente, decir cuáles de los gráficos, que corresponden a las funciones cuadráticas dadas en el ejercicio anterior, pasan por el origen?*

3) *En las fórmulas de las funciones cuyos gráficos pasan por el origen:*

a) Indica qué característica tiene la fórmula cuadrática polinómica

b) Indica qué característica tiene la fórmula cuadrática canónica.

c) Establece una vinculación entre las fórmulas cuadráticas: canónica y polinómica

4) *En cada caso, encuentra la fórmula canónica correspondiente a la fórmula polinómica dada y escribe las coordenadas del vértice de la parábola.*

a) $y = x^2 + 4x$ b) $y = x^2 - 6x$ c) $y = x^2 - 9x$ d) $y = x^2 + \frac{6}{5}x$ e) $y = x^2 - \frac{7}{3}x$

5) *a) Expresa* $y = x^2 + bx$ *en la forma canónica y escribe las coordenadas del vértice*

b) De qué otra forma podrías haber encontrado la ordenada del vértice?

6) *Escribe cada una de las siguientes funciones de segundo grado en la forma canónica e indica las coordenadas del vértice.*

a) $y = x^2 + 8x - 1$ b) $y = x^2 - 3x + \frac{1}{2}$ c) $y = x^2 + \frac{7}{5}x + \frac{11}{20}$

7) *Expresa* $y = x^2 + bx + c$ *en la forma canónica y escribe las coordenadas del vértice.*

8) *Escribe cada una de las siguientes funciones de segundo grado en la forma canónica e indica las coordenadas del vértice.*

a) $y = 5x^2 - 20x + 25$ b) $y = 3x^2 + 6x - 3$ c) $y = 2x^2 - 5x - 1$

d) $y = 4x^2 - 3x + 5$ e) $y = 5x^2 + 7x + 2$

9) *a) Expresa* $y = ax^2 + bx + c$ *en forma canónica y escribe las coordenadas del vértice*

b) Indica la concavidad de la curva

10) *Dada la siguiente función de segundo grado* $y = 2x^2 - 10x + 8$

a) Exprésala en forma canónica. *b)Escribe las coordenadas del vértice.*

c) Encuentra los ceros de la función *d) Grafícala en coordenadas cartesianas*

11) *Recordando el problema del área del cuadrado:* *Area* (x) = $2x^2 - 20x + 100$ *¿Cuánto tiene que valer* x *para que el área sea* 58*?*
12) *Encuentra una fórmula que te permita resolver la ecuación*: $ax^2 + bx + c = 0$

El objetivo del primer ejercicio es que el alumno adquiera destreza en el marco algebraico para pasar, la expresión de una función cuadrática, de la forma canónica a la polinómica. También permite repasar el desarrollo del cuadrado de un binomio y, junto con los dos ejercicios siguientes, sienta las bases para transformar la fórmula de una función cuadrática de la forma polinómica reducida a la forma canónica. En el ejercicio 4, se trabaja con el polinomio con coeficiente principal 1 y sin término independiente. En el ejercicio 6, se aumenta la dificultad con la incorporación del término independiente. En el ejercicio 8 se incluyen polinomios de coeficiente principal distinto de 1. En los dos ejercicios que siguen el estudiante debe resolver una ecuación cuadrática particular, en uno se pide que determinen los ceros de la función[1] y en el otro se pide obtener x, para un valor de y dado[2]. En el último ejercicio se realiza la generalización, obteniendo así la fórmula general que permite resolver una ecuación cuadrática.

El docente, en distintos momentos de esta actividad, deberá realizar las puestas en común que considere necesarias de forma tal que, al finalizar la misma, quede institucionalizado el concepto de ecuación cuadrática y raíces de una ecuación cuadrática.

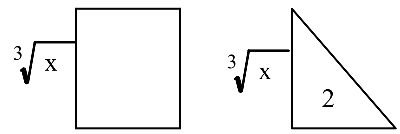
La organización de esta secuencia, elaborada según un grado de complejidad creciente, permite a los estudiantes pasar de una dificultad a otra usando como base lo construido en la actividad anterior. Por otra parte el estudiante aprende a completar cuadrados de una manera fácil y sencilla y obtiene la expresión general de las coordenadas del vértice de una parábola hasta lograr construir la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas; punto en el que sobresale la potencialidad de esta propuesta ya que el alumno, al superar los desafíos que se le presentan llega a ser el constructor de esta fórmula.

En la segunda actividad, el estudiante debe aplicar la fórmula recién obtenida, para resolver ecuaciones cuadráticas e indicar si las soluciones halladas son reales (iguales o distintas) o complejas. Luego, las ecuaciones que son incompletas, las deberá resolver sin utilizar la fórmula cuadrática. Aquí el alumno puede llegar a cometer distintos errores, y como consecuencia obtener distintos resultados que los hallados aplicando la fórmula. Esto lo llevará a revisar lo realizado y servirá al docente para reflexionar sobre los errores cometidos. Por último deberá indicar de qué depende que una ecuación cuadrática tenga distintos tipos de raíces. Al finalizar la actividad se institucionalizará las distintas formas de resolver una ecuación cuadrática y el nombre de "discriminante" para la expresión $b^2 - 4ac$; es conveniente que el alumno pueda darse cuenta del porqué de esta denominación.

En la siguiente actividad deben proponer una ecuación cuadrática, de forma que las raíces cumplan determinadas condiciones, como por ejemplo que tenga: raíces reales iguales, raíces complejas, raíces reales distintas o raíces reales distintas y una de ellas sea 5. Este problema, abierto a múltiples respuestas, tiene como propósito que el alumno se desprenda de la concep-

[1]En el trabajo previo sobre función cuadrática los alumnos determinaban la existencia de los ceros de la función a partir del gráfico.
[2] La secuencia previa sobre función cuadrática, se inicia con una situación problemática que da origen a la fórmula cuadrática planteada en el ejercicio N° 11.

ción de que un problema matemático tiene una respuesta única Además se persigue que el estudiante pierda el miedo a plantear ejercicios.



Para vincular ecuación cuadrática con función cuadrática (lo algebraico con lo gráfico), se da el gráfico de distintas funciones y deben indicar el tipo de raíces y, de ser posible, el valor de las mismas. Recíprocamente, a partir de una ecuación cuadrática deben obtener los puntos donde la gráfica de la función cuadrática correspondiente, corta al eje x.

También se plantea un ejercicio para resolver una ecuación cuadrática mediante el método gráfico. La intención del mismo es prepararlo para buscar las raíces de otras ecuaciones más complejas y / o difíciles de resolver en forma analítica.

Se ejercita la resolución de ecuaciones reducibles a ecuaciones cuadráticas (fraccionarias e irracionales). Aquí el alumno reforzará el manejo algebraico de expresiones.

Para resolver ecuaciones reducibles a cuadráticas se plantea la siguiente actividad**:**

Juan quería poner dos pósteres en la pared de su cuarto. Uno de ellos que tuviera la forma de un cuadrado y el otro de un triángulo rectángulo. Para que los pósteres no fueran demasiado grandes, se impuso la condición de que la diferencia de sus áreas fuese 2 y que tuvieran las medidas indicadas en el gráfico. Para determinar cuanto debía medir de alto, Juan llegó a plantear la ecuación:
Área (cuadrado) − Área (triángulo) = 2 , pero luego no pudo encontrar el valor de x.
Su amigo, que era un experto en resolver ecuaciones cuadráticas, inmediatamente determinó que el valor de x podía ser 8 ó −1, e indicó a Juan que los póster deberían tener una altura de 2. Para obtener la solución, el amigo ideó una forma muy ingeniosa de transformar la ecuación en una ecuación de segundo grado. Te animas a determinar cómo lo hizo y a desarrollar los pasos para encontrar la solución?

En la siguiente actividad, se incluye gran variedad de aplicaciones donde primero se debe modelizar el problema y luego seleccionar el método que mejor se adapte el tipo de ecuación cuadrática a resolver (completa o incompleta) . Por último se deberá decidir si las soluciones de la ecuación pueden ser la respuesta al problema. En algunos de estas aplicaciones se debe obtener la fórmula de la función, a partir de datos numéricos obtenidos en forma experimental.

Para que el alumno pueda llegar a obtener las propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática se plantea la siguiente actividad:

1) a) *Completa el siguiente cuadro (las ecuaciones ya se resolvieron en una actividad anterior)*

Ecuación	Escribe la ecuación en la forma $a x^2 + bx + c = 0$	$x_1 + x_2$	$x_1 . x_2$
a) $2x^2 + 4x - 6 = 0$			
b) $3x^2 = 2 - 5x$			
c) $9x^2 + 12x = -4$			
d) $-6x^2 + 2x - 4 = 0$			
e) $3x^2 + 6x = 0$			
f) $49x^2 + 9 = 42x$			
g) $x^2 - 7 = 0$			
h) $0,5 - 6x = 2x^2/3$			
i) $x(x + 1) = 3x^2$			
j) $3x^2 + 6 = 0$			

b) Encuentra alguna relación entre la suma de las raíces y los coeficientes de la ecuación cuadrática.
c) Encuentra alguna relación entre el producto de las raíces y los coeficientes de la ecuación cuadrática.
d) Teniendo en cuenta que $x_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$ y $x_2 = (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$, *realiza el producto y la suma de las raíces y observa si coincide el resultado con la relación encontrada en a) y b) respectivamente.*

2) *A partir de la relación encontrada en el Ej.1d),expresa la ecuación cuadrática* $ax^2 + bx + c = 0$ *a) En función de "a" y de la suma y el producto de sus raíces* x_1 *y* x_2
b) En función de la suma y el producto de sus raíces x_1 *y* x_2

Con el primer ejercicio, se espera que el alumno sea capaz de encontrar, a partir de ejemplos numéricos, las propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática que luego, al realizar la actividad propuesta en el inciso d), las estará demostrando.

El ejercicio Nº 2 prepara al alumno para reconstruir una ecuación cuadrática, a partir de la suma y producto de sus raíces.

A continuación se realiza una actividad donde se aplican las propiedades de las raíces. Primero se reconstruye la ecuación a partir de las propiedades y luego se realiza el proceso inverso: dada la ecuación, obtener la suma y producto de las raíces

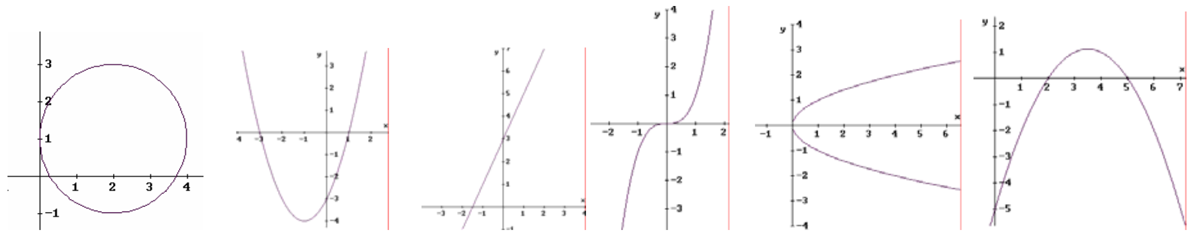
Para escribir en forma factoreada la fórmula de una función y una ecuación cuadrática se propone la siguiente actividad:

1) *a) Resuelve la ecuación cuadrática* $2x^2 + 4x - 30 = 0$
b) Factorea la expresión $2x^2 + 4x - 30$ *(ten en cuenta que* $4x = -6x + 10x$).
c) Puedes encontrar alguna relación entre la expresión factoreada y las raíces de la ecuación cuadrática

2) *Demuestra que la relación encontrada en el ejercicio anterior es válida para cualquier expresión cuadrática de la forma:* $ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + x_1 . x_2$ *(donde* x_1 *y* x_2 *son raíces de la ecuación cuadrática correspondiente a la expresión dada).*

Finalmente, la última actividad permite realizar una integración entre lo desarrollado para función cuadrática y para ecuación cuadrática.

1) *Dados los siguientes gráficos, identifica el que corresponda a una función cuadrática y luego en base a dicho gráfico responde los siguientes incisos:*
i) Determina el signo del coeficiente de x^2
ii) Indica las raíces de la ecuación cuadrática correspondiente a dicha función cuadrática.
iii) Encuentra las coordenadas del vértice de la parábola.
iv) Halla, de dos formas distintas, la fórmula que define a dicha función cuadrática



Referencias Bibliográficas

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gomez, P. ; (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. México. G.E.I.

Bixio, C. (1998). *Enseñar y aprender*. Bs. As. Argentina. Homo Sapiens.

Brousseau, G. (1994). *Los diferentes roles del maestro*. En Parra, C. y Saiz, I. (comps.), Didáctica de Matemática: *Aportes y reflexiones*. (pp 65–94). Bs. As. Argentina. Paidos

Duhalde, M., Gonzalez, M. (1997). *Encuentros cercanos con la Matemática.* Bs. As. Argentina. Aique.

Chevallard, I. (2000). *La transposición didáctica*. Bs. As. Argentina. Aique.

Fractal: Ideas y Percepciones de Estudiantes entre 15 y 17 Años

Sabrina Harbin y Miriam Mireles
Universidad Simón Bolívar, Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Venezuela
sgarbin@usb.ve, mmireles@ipmar.upel.edu.ve
Pensamiento Matemático Avanzado — Nivel Medio

Resumen

En este trabajo se presenta el estado actual de una investigación cualitativa que, en su primera fase, intenta aproximarse a cómo el estudiante pre-universitario concibe espontáneamente la idea de fractal. Participaron 70 estudiantes con edades comprendidas entre 15 y 17 años. Se encuentra que la mayoría de estos alumnos perciben al fractal en sus características de manera parcial, y principalmente lo definen como un proceso iterativo. Los resultados de esta primera parte y el reconocimiento de que los fractales tienen un valor matemático elemental, inducen a pensar en el valor didáctico que podrían tener los fractales y su geometría, para desarrollar destrezas matemáticas y favorecer formas de pensamiento matemático más avanzado, en la transición del PME al PMA.

Planteamiento del Problema, Antecedentes y Fundamentación Teórica

En los últimos años los objetos fractales (Mandelbrot (1984)) y su geometría han despertado gran interés no sólo en los matemáticos, sino también en las distintas disciplinas, en el público en general, en la educación matemática y en muchos profesores que ven en los fractales una posibilidad para ofrecer una matemática distinta, más moderna y relacionada con la naturaleza, desde una geometría que permite aproximaciones más cercanas a las que puede dar la geometría euclídea. Se han elaborado propuestas de innovación y experiencias para introducir al estudiante de educación secundaria en el conocimiento del fractal y su geometría (Fernández y Pacheco, 1991; Guzmán,1994; Martínez, 1994; García-Ruiz, 1994; Plá, 1994; Zapata, 1996; Komerek, Duit y Schnegelberger, 1998; Naylor, 1999; Frame, M.L. y Mandelbrot, B., 2002). Sin embargo hemos constatado que aún son escasas las investigaciones rigurosas de tipo cognitivo (la más cercana a los intereses de nuestro estudio es la de Komorek, Duit, Bücker y Naujack (2001) que concluye que las ideas de fractal, específicamente la autosimilitud y estructura "dentrite", son asequibles para la edad de 15 y 16 años), que exploren las percepciones e ideas intuitivas de los estudiantes al conocer estos objetos, y que justifiquen, el que, el cómo y el para qué de una posible integración de los fractales en la currìcula o como herramienta o estrategia para otros tipos de aprendizajes.

Nuestro interés es realizar una investigación que en su primera fase explore e intente aproximarse a las ideas y percepciones de los fractales en estudiantes preuniversitarios; descubrir qué características fractales son perceptibles en los estudiantes, cuáles resultan más o menos intuitivas, el cómo definirían un fractal tan sólo teniendo una experiencia de visualización dada por la construcción de éstos. De la teoría cognitiva desarrollada por Tall y Dreyfus en relación al desarrollo y crecimiento del Pensamiento Matemático Avanzado y en la de transición del PME al PMA, los conceptos que tratamos son de manera particular, el *esquema conceptual* (Tall y Vinner, 1981) y *esquema informal* (Tall, 2001). Los estudiantes se enfrentan en el cuestionario con los fractales sin enseñanza formal previa sobre éstos. Ante el ejercicio de visualización que se propone y los pasos de construcción de los fractales, las descripciones y observaciones de los alumnos dejan en evidencia sus esquemas informales asociados a estos objetos matemáticos, que son fruto principalmente de la intuición, y de la abstracción de las relaciones e interconexiones que establecen con sus conocimientos previos, especialmente los geométricos (euclídeos).

Metodología, descripción de los participantes e instrumentos de recogida de datos.

La investigación se enmarca en un estudio de tipo cualitativo. El foco de investigación tiene un carácter exploratorio, descriptivo e interpretativo. En la metodología de análisis se opta por utilizar las redes sistémicas (Bliss, Monk y Ogborn, 1983) como sistema de representación de los datos cualitativos obtenidos a partir de las respuestas dadas por los alumnos en el cuestionario. A partir de las redes sistémicas se establecen categorías y subcategorías asociadas a algunas de las características de la geometría fractal y etiquetadas como: autosemejanza, recursividad, complejidad, perímetro, área, longitud y números de puntos de Cantor, y alusiones a si el conjunto de Cantor desaparece o se hace polvo. Esto además permite diseñar unas tablas resumen. La experiencia se realiza con 70 estudiantes de primero y segundo año del ciclo diversificado (final de secundaria) venezolano, con edades comprendidas entre 15 y 17 años. En el momento de la aplicación de los cuestionarios no tenían conocimientos formales de cálculo (infinitesimal, diferencial, integral). Se aplican dos cuestionarios (C_1 y C_2); en este artículo se describe sólo los resultados de la primera parte del primer cuestionario. Las preguntas del C_1 se plantean bajo la hipótesis de que los esquemas conceptuales de los objetos geométricos se construyen principalmente a partir de experiencias de visualización, y sobre la opinión de que la experiencia es un factor fundamental en la formación de la intuición. El cuestionario tiene dos partes y aborda los fractales: Cantor, Kock, Árbol y Kock Aleatorio. Se muestra la construcción del fractal en sus primeros pasos: "Trata de imaginar cada paso que sigue de la construcción, el 4, 5, 6, 7 ... hasta el infinito. A)Describe lo que ves y lo que ocurre en la medida que se van haciendo más pasos. B) En el infinito resulta un objeto geométrico llamado: "se coloca el nombre del fractal respectivo". Imagina que dispones de un instrumento potente con el que puedes aumentar parte del objeto cuantas veces quieras. Ahora enfoca una parte del "se coloca el nombre del fractal respectivo". Describe lo que ves y lo que ocurre a medida que va aumentando la potencia del instrumento. ¿Puedes describir lo que ves cuando el instrumento tiene aumento infinito?. Dependiendo del fractal estas preguntas van acompañadas por otras: sobre la longitud y el número de puntos de Cantor, área y perímetro de Kock, y sobre el perímetro de Kock Aleatorio

Resultados

Las respuestas de los alumnos que reflejan las características fractales, muestran que la mayoría de los estudiantes percibe al fractal, en sus características, de manera parcial.
a) Recursión: En la construcción geométrica de los fractales con que trabajamos, en su proceso recursivo conformado por la base, la regla y el proceso iterativo, y específicamente relacionado con este último, encontramos dos tipos de iteración, la divergente y convergente, y diferente tipo de contenido, cardinalidad y espacio (en el sentido de Nuñez (1994)). La cardinalidad la da el número creciente de divisiones dadas por la regla, y el espacio, por la longitud de los segmentos que se van construyendo y que van configurando la representación geométrica de

cada fractal. La coordinación de ambos procesos, es el que permite cognitivamente "percibir o entender" al fractal en sus características específicas, por ejemplo en el conjunto de Cantor si bien el número de divisiones aumentan y el número de segmentos que se construyen crecen, los segmentos a la vez decrecen y entonces, ¿se hace polvo o desaparece?. En la siguiente tabla se puede observar, como resumen, el porcentaje de alumnos que se encuentran en cada categoría principal que reflejan las redes sistémicas construidas.

	Ocurren los mismos pasos (%)	**La Iteración es finita (%)**	**Proceso de divergencia (%)**	**Proceso de convergencia (%)**	**Explicita**	
					La regla (%)	**Otra regla (%)**
Cantor	0	7,14	15,71	25,71	1,4	2,8
Kock	1,4	2,85	13,85	4,28	2,85	0
Arbol	1,4	8,57	45,7	22,85	8,57	0
Kock Aleatorio	1,4	2,85	24,28	8,57	7,14	0
	2,8	**12,85**	**65,71**	**48,57**	**17,12**	**2,8**

Es bajo el porcentaje de estudiantes que hacen alusión explícita o implícita sobre algún aspecto del proceso de recursión en la construcción de los fractales, con relación a la base y al proceso iterativo en sus dos aspectos de convergencia y divergencia. Si bien el proceso es infinito explícitamente hubo un 12,85 % donde la iteración se percibió como finita en por lo menos un fractal. El motivo principal ha sido el que permanece en estos estudiantes el modelo tácito de punto, como una imagen de pequeños puntos que tienen espacio y dimensión. La explicitación de la regla en la recursión es sumamente baja, sólo un 17,12% de los estudiantes hacen la referencia a la regla en por lo menos un fractal. Por el tipo de respuestas dadas por los estudiantes, el porcentaje alto de respuestas que explicitan o aluden el proceso iterativo, así como teniendo en cuenta el segundo cuestionario en que se pedía una definición de fractal, hace pensar que en su mayoría los estudiantes perciben en la construcción geométrica del fractal un proceso iterativo más que recursivo, el retorno a la base queda poco consciente. En cuanto al proceso iterativo, es mayor el porcentaje de explicitación del proceso de divergencia que el de la convergencia. Queda en evidencia como obstáculo cognitivo la coordinación del proceso de convergencia y divergencia. El hecho específico del no reconocimiento del proceso de divergencia, es causal, de situaciones como el percibir que el área de Kock aumenta indefinidamente o que los segmentos que se construyen en el Árbol llega un momento en que "chocan" y se "unen". Para el 8,57% de alumnos, la característica del Fractal Árbol de que su trazado es continuo y que no hay intersección entre los segmentos que forman las ramas de los árboles, no se cumple, estos estudiantes indican que en algún momento los segmentos chocan. También queda en evidencia la influencia de las representaciones de los objetos fractales sobre cada proceso. Si observamos la tabla, en Cantor, el porcentaje de alumnos que hacen alusión al proceso de divergencia es superior que el resto de fractales, la representación geométrica del conjunto de Cantor alude al proceso de divergencia, sin embargo las representaciones de los otros fractales aluden visualmente a la divergencia, se expanden y se hacen "más grandes". Sólo tres alumnos explicitan el proceso completo de recursión haciendo referencia a la regla, y proceso de iteración (convergente y divergente), un alumno en Cantor (considera a la iteración como finita), un alumno en Árbol y otro en Kock Aleatorio.

b) Autosemejanza: Se observa en la siguiente tabla el porcentaje de alumnos que se encuentran en cada categoría principal que reflejan las redes sistémicas construidas.

	Por la recurrencia (%)	**Visualiza la figura inicial (%)**
Cantor	4,28	8,57
Kock	5,71	10
Arbol	8,57	11,42
Kock Aleatorio	1,42	14,28
	18,57	**34,28**

Es bajo el porcentaje de alumnos que explicitan o hacen alusión a la característica de autosemejanza en los fractales. Las respuestas de los alumnos fueron caracterizados bajo dos aspectos. La evidencia de la autosemejanza dada por el proceso de recurrencia (que en el caso de nuestros alumnos sería del proceso iterativo), el 18,57% está en por lo menos en uno de los fractales; y la evidencia de la autosemejanza dada por el aumento del instrumento, se observa las figura u objeto inicial o partes de esta figura inicial como ángulos, lados, triángulos; el 34,28% la expresa en por lo menos un fractal. No hay ningún alumno que en sus respuestas explicite o alude a la autosemejanza en todos los fractales.

d) *Complejidad/ escabrosidad*: La escabrosidad o complejidad, como característica fractal, es una de las menos esperadas en las respuestas de los alumnos, por ser los objetos geométricos escogidos considerados como “simples” en cuanto a su construcción y formulación. Sin embargo, a través de estos procesos simples está la posibilidad de dominar y construir estructuras complejas, esta complejidad proviene precisamente de la repetición infinita. Como en los casos anteriores se puede observar los porcentajes en la tabla:

	Figura compleja (%)	**Figura irregular (%)**	**Objeto intrincado (%)**	**Forma abstracta (%)**	**Objeto difícil (%)**
Cantor	0	0	0	0	0
Kock	8,57	4,28	1,42	0	0
Arbol	1,42	0	1,42	1,42	0
Kock Aleatorio	5,71	4,28	1,42	0	1,42
	14,28	**2,85**	**1,42**	**1,42**	**1,42**

Las respuestas de los alumnos que afirman que a medida que se van dando los pasos va resultando una figura compleja, responde a la idea del proceso, que se parte de figuras simples y que a través de la repetición infinita de pasos va resultando una estructura más compleja.

e) *Medida*: En el cuestionario además de pedir una descripción sobre el proceso geométrico de construcción de cada fractal, también se preguntó sobre el área y perímetro de Kock, sobre el perímetro de Kock aleatorio y sobre la longitud del conjunto de Cantor y el número de puntos del conjunto de Cantor. Por otra parte hubo alusiones y afirmaciones en las respuestas de los alumnos sobre si el conjunto de Cantor desaparece o se hace polvo. En este apartado no colocamos todas las tablas por falta de espacio. Sobre el área y los perímetros pedidos (y longitud de Cantor), ningún alumno trató de hallarlos. Todos contestaron a esta pregunta desde lo que visualizaban y las afirmaciones sobre el área y los perímetros son muy similares:

aumenta, es infinita, es grande, incontable, difícil de calcular, cambia, se reduce. El porcentaje mayor de alumnos se encuentra en la categoría que el área y el perímetro aumenta. Este aumento es dado por el proceso de divergencia, se agregan triángulos o segmentos, en este proceso, no hay conciencia o atención al proceso de convergencia. Relacionada con esta categoría están las de que el área es infinita, tiene un valor grande, cambia o es incalculable. Sigue estando relacionadas las afirmaciones asociadas a estas categorías a la idea de divergencia. Las apreciaciones sobre que al área y el perímetro aumentan nos hacen pensar que los estudiantes dieron sus respuestas desde la concepción finita y positiva de la suma, en la cual, a medida que aumenta el número de sumandos, aumenta su valor en sentido potencial. En el sentido antes expresado del proceso de divergencia y convergencia, no se tiene en cuenta el tipo de sumandos, es decir, se considera la cardinalidad de la suma pero no la cantidad numérica que se va sumando.

Con relación al número de puntos del conjunto de Cantor, un alto porcentaje (44,28%) afirma que hay infinitos puntos. El 7,14% observa un número finitos de puntos, uno de ellos afirma que no tiene puntos, es decir para este alumno el conjunto de Cantor desaparece. Otro alumno afirma que "*no hay cantidad de puntos definida*", esta respuesta podría aludir a, que el Conjunto de Cantor desaparece o que por el proceso infinito no se puedan determinar. Por otra parte, un grupo de alumnos 24,27%, comparan la cantidad con el segmento inicial, un 11,42% afirma que hay una menor cantidad de punto que el segmento inicial, un 10% que hay una mayor cantidad que en el segmento inicial y un 2,85% que hay igual cantidad. Hubo también alusiones a que el Conjunto de Cantor se hace polvo o desaparece: "*desaparece*"(15,71%), "se hace menos visible"(1,42%), "*llega un momento que se queda en blanco*"(1,42%), "*minúsculo, miscroscópico, incluso más pequeño*"(1,42%). Si bien es cierto que la influencia de la representación geométrica de este conjunto influye en la percepción de que el segmento desaparezca o que permanezcan minúsculos puntos, como ya se ha comentado en otras características fractales, estas respuestas están estrechamente relacionadas con el modelo tácito de punto que prevalece en la mente, que tiene dimensión y espacio.

Conclusiones

A partir de las redes sistémicas se establecen categorías y subcategorías asociadas a algunas de las características de la geometría fractal y etiquetadas como: autosemejanza, recursividad, complejidad, perímetro, área, longitud y números de puntos del conjunto de Cantor, alusiones a que el Conjunto de Cantor se hace polvo o desaparece. La mayoría de los alumnos percibe al fractal en sus características de manera parcial, y principalmente lo describen como un proceso iterativo más que recursivo, el retorno a la base queda poco consciente. En cuanto al proceso iterativo, en la construcción geométrica de los fractales, es mayor el porcentaje de explicitación del proceso de divergencia que el de convergencia (en el sentido cognitivo de Nuñez (1994)); la coordinación del proceso de convergencia y divergencia resulta un obstáculo cognitivo. El no reconocer el proceso de divergencia en algunos alumnos no permitió percibir, la característica del fractal Árbol de que su trazado es continuo, y que no hay posibilidad de que los segmentos que conforman las ramas de los árboles puedan "chocar" o "unirse". La autosemejanza como característica ha sido poco explicitada, no se sabe si es por lo "evidente" de esta característica o si hay dificultad o poco entrenamiento matemático en reconocer figuras semejantes. La autosemejanza se caracteriza en estos alumnos por el proceso de recurrencia, y por el aumento del instrumento. La complejidad o escabrosidad, en las respuestas de los alumnos, responde a la idea del proceso, que se parte de figuras simples y que a través de la repetición infinita de pasos va resultando una estructura compleja. Permanecen en los estudiantes el modelo tácito de punto, con dimensión y espacio, lo que da como consecuencia respuestas finitas, o la percepción de que el conjunto de Cantor desaparece, o se hace polvo, así mismo esto último es percibido por la influencia de la representación del conjunto de Cantor. Con relación a los aspectos de medida, prevalecen en muchos estudiantes una concepción finita y positiva de la suma, a medida que aumenta el número de sumandos, aumenta su valor en sentido potencial. Consideran la cardinalidad de la suma pero no la cantidad numérica que se va sumando. Por último acotar que los porcentajes de respuestas que aludían a las características de los fractales fueron bastante bajas, las respuestas de los estudiantes fueron directas y con argumentación limitada, y muestran escasas destrezas matemáticas. Ningún estudiante trató de poner en práctica algún procedimiento de resolución para tratar de responder las cuestiones que se plantearon, por ejemplo tratar de establecer una suma para calcular el área o perímetro del fractal. Las respuestas fueron dadas con poco lenguaje matemático y se usó el lenguaje común, la habilidad de explicar y justificar los procesos y resultados, apoyado en la capacidad de establecer relaciones entre las naciones y procesos matemáticos, se ha evidenciado poco. Son competencias importante para acercarse a la comprensión de la noción de objeto fractal. Todos estos resultados derivados en esta primera fase, y el reconocimiento de que los fractales tienen un valor matemático elemental, confirman el seguir investigando, en una segunda fase, sobre el valor didáctico que podrían tener los fractales y su geometría para desarrollar destrezas matemáticas y favorecer formas de pensamiento matemático más avanzado, en la transición del PME al PMA.

Referencias Bibliográficas

Bliss, J., Monk, M. y Ogborn, J. (1983). *Qualitative data analysis for educational research.* London: Croom Helm.

Fernández, F. y Pacheco, J. (1991). Valor matemático elemental de los fractales. *Suma* 9, 4-10.

García-Ruiz, J. y Otálora, F. (1994). El uso de la geometría fractal en las Ciencias Naturales. *Epsilon* 28, Vol. 10 (1), 109-125.

Guzmán, M. de. (1994). Introducción a los Procesos geométricos infinitos y a las estructuras fractales. *Epsilon* 28, Vol. 10 (1), 17-26.

Komerek, M., Duit, R y Schnegelberger,M. (Eds.) (1998). *Fraktale im Unterricht. Zur didaktischen Bedeutung des Fraktalbegriffs.* German: Inst. Fuer Paedagogik der Naturwissenschaften.

Komorek, M., Duit, R. Bücker, N. y Naujack, B. (2001). Learning Process studies in the field of fractals. Obtenido en: http://www.ipn.uni-kiel.de/projekte/esera/book/b185-kom.pdf

Frame, M.L.y Mandelbrot, B. (eds.) (2002). *Fractals, Graphics, and Mathematics Education.* USA: The Mathematical Association of America.

Mandelbrot, B. (1984). Los objetos fractales. Barcelona, España: *Metatemas 13.*

Martínez, J. (1994). Los conjuntos de Julia y la Familia de Transformaciones no lineales. *Epsilon* 28, Vol.10 (1), 81-97.

Núñez, E. (1994). Subdivision and small infinities Zeno, paradoxes and cognition. *Actas del PME 18* (Volumen 3, pp. 368-375). Lisboa, Portugal.

Naylor, M. (1999). Exploring Fractals in the Classroom. *The Matematics Teacher 92* (4), 360-66.

Plá, J. (1994). Los fractales. *Epsilon 28,* Vol. 10 (1), 27-53.

Tall, D. Y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12* (2), 151-169.

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics 48* (2-3), 199-238.

Zapata, R. (1996). Integración de la geometría fractal en las matemáticas, y en la informática, de Secundaria. Obtenido en: http://math.rice.edu/~lanius/fractals/WHY

Métodos Participativos, Un Arma Poderosa para el Aprendizaje

Yolanda Hernández y Armando de Pedro Lugo
Departamento de Teoría de Funciones, Facultad de Matemática y Computación, U. H. Cuba
yolanda@matcom.uh.cu, armando@matcom.uh.cu
Trabajo Cooperativo – Nivel Superior

Resumen

En este trabajo se muestran experiencias realizadas en primer año de las carreras de Ciencias Farmacéuticas y Microbiología de la Universidad de la Habana, durante un semestre, en las que se aplicaron la técnica Roldán - Cribeiro con el fin de lograr mayor grado de conciencia, de independencia y de solidez en el conocimiento. Escogimos estas características secundarias de la acción porque a través de ellas es posible valorar la calidad del aprendizaje. Así mismo se muestra como a través de la técnica aplicada es posible desarrollar de modo conciente aspectos positivos de la personalidad.

Esta técnica fue creada por las doctoras en Ciencias Matemáticas Rita Roldán Inguanzo y Josefina Cribeiro Díaz, especialmente para la Educación Superior pero es aplicable a otros niveles de enseñanza y mediante ella se logra una motivación interior que hace que el estudiante se sienta responsable de su aprendizaje y asuma esta responsabilidad a través de una serie de actividades individuales y colectivas. En ella se tiene muy en cuenta lo que las autoras llaman medio ambiente. Por medio ambiente se entiende no solamente las condiciones que rodean al alumno como son su condición de becario o externo sino además la importancia de la asignatura dentro del Plan de Estudio; importancia esta que viene dada en parte por el número de horas asignadas a la asignatura así como el tipo y número de sus evaluaciones.

Finalmente para comprobar la validez de los resultados en la adquisición de mayor grado de conciencia, de independencia y de solidez en el conocimiento, se utilizó la prueba U de Mann Whitney y el Método Biográfico para comprobar como influía el empleo de la técnica R-C en nuestros alumnos algunos aspectos de su personalidad como aumento de autoestima, seguridad, flexibilidad, etc.

Desarrollo

Una técnica grupal es un conjunto de procedimientos y recursos utilizados en un grupo de individuos con el fin de obtener un resultado determinado. Las técnicas que se utilizan en grupos de alumnos son fundamentalmente de dos tipos: técnicas relativas a los contenidos y técnicas relativas al desarrollo personal. Las primeras son aquellas específicamente dirigidas al objetivo de adquirir, consolidar o evaluar contenidos, mientras las segundas sirven más globalmente al desarrollo integral de la personalidad. Esta división, que no es única, está basada en cuál es el objetivo fundamental que se persigue con su uso, aún cuando se sabe que el aprendizaje de contenidos contribuye o debería contribuir al desarrollo personal.

También las técnicas grupales pueden clasificarse de acuerdo a la participación que en ellas tenga el profesor, ya que ésta no es siempre la misma. En ocasiones el profesor controla todo el proceso y sus orientaciones son muy estrictas, en este caso se habla de grupos dirigidos; en otras, da ciertas orientaciones, pero deja a los grupos cierto margen de libertad, hablaremos entonces de grupos orientados; mientras que finalmente en otras se deja a los grupos total libertad para organizar su trabajo y controlar los procesos grupales y en este caso hablaremos de grupos autónomos.

Sin embargo, cualquiera sea el tipo de técnica que se utilice, es necesario que se tenga en cuenta que ninguna de ellas tiene sentido por sí misma. El sentido se lo da quien la utiliza. Su bondad está en que se acerque o no a dónde se quiere ir.

Una técnica grupal es utilizada adecuadamente cuando mediante su aplicación es posible alcanzar el objetivo propuesto. Esto exige que quien la aplique sepa: explicar, escuchar, preguntar, contestar, resumir y concluir.

Nosotros utilizamos varios métodos participativos y entre ellos, una técnica creada por las doctoras en Ciencias Matemáticas Rita Roldán Inguanzo y Josefina Cribeiro Díaz (Roldán, R. y Cribeiro, J. , 1995 a). Esta selección se hizo basado en que muchas de las técnicas grupales relativas a los contenidos que aparecen en manuales y libros son en realidad técnicas de evaluación de conocimientos más que de adquisición del conocimiento y consisten generalmente en juegos cuya finalidad es comprobar si se han adquirido o no determinados conocimientos. Son técnicas de cooperación intergrupal y de competición intergrupal, que aunque motivadoras del estudio, no despiertan el interés por la materia que se aprende sino que fomentan cierto entusiasmo por la competencia. El incentivo no es el proceso de aprendizaje sino la competencia.

La técnica Roldán-Cribeiro, logra una motivación interior que hace que el alumno se sienta responsable de su aprendizaje y asuma esta responsabilidad a través de una serie de actividades individuales y colectivas. Fomenta el espíritu de colaboración, contrarrestando el protagonismo propio de otras técnicas. Ayuda a los alumnos a eliminar prejuicios y etiquetas en relación con los demás, con lo cual se liberan todas las capacidades creativas del alumno, convirtiéndose entonces la comunicación en un incentivo para el análisis y la profundización en los temas. Trabaja en la zona de desarrollo próximo (8) convirtiendo en capacidades reales las capacidades potenciales y les enseña a autoevaluarse, primero en el marco de la resolución de problemas y ejercicios, después se evaluará la clase para finalmente evaluar todo el tema a través de la proposición y resolución de temarios de examen.

Pretendemos que la aplicación de estas técnicas con flexibilidad al grupo de estudiantes, garantice el desarrollo no sólo de conocimientos y estrategias cognoscitivas en el estudiante, sino también de importantes cualidades de trabajo en grupo; fomentar su interés y motivación por el conocimiento y su propio desarrollo como personalidad, como sujeto de su actividad social

La técnica en sí consiste en que los grupos formados se responsabilicen con una serie de tareas. Estas tareas son de dos tipos: individuales y por grupos o equipos.

Según las tareas de carácter individual planteadas, el estudiante debe:

1. Resolver los ejercicios planteados en seminarios y clases prácticas y exponer su resolución, aclarando las propiedades y/o definiciones utilizadas en cada paso. Dicha exposición debe ser realizada inicialmente en forma totalmente desplegada, sintetizando luego y generalizando finalmente los casos comunes.

2. Evaluar de manera cualitativa al expositor respecto no sólo a la resolución del problema en sí, sino también al grado de despliegue, de síntesis y de generalización de la acción y dominio del lenguaje técnico.

3. Elaborar ejercicios y problemas que serán utilizados en la evaluación de otros compañeros del grupo (aula)

4. Resolver los ejercicios que él mismo plantea.

5. Resolver los temarios de control confeccionados por estudiantes de otro equipo.

En cuanto al trabajo por equipo se plantean como tareas:

1. Debate en el equipo de las preguntas y ejercicios propuestos y orientados por el profesor. Este tipo de tarea se realiza tanto en la clase como fuera de ella. De esta manera se ha podido lograr que los estudiantes "descubran" por sí mismos algunos conceptos importantes a través de la discusión y resolución de problemas que conducen a ello. Esto se ha comprobado mediante estudio estadístico en investigaciones realizadas por los autores.

2. Defensa ante el grupo del resultado del debate realizado por el equipo.

3. Elaboración de temarios de control sobre un tema o bloque de temas sobre la base del "banco de problemas" creado a partir de los ejercicios y problemas confeccionados por los miembros del equipo.

4. Evaluación de los temarios confeccionados por todos los equipos de acuerdo a su calidad. Para ello se debe tener en cuenta el grado de dificultad de los ejercicios planteados, la integración de conocimientos y la amplitud de los tópicos planteados en el control.

5. Calificación cuantitativa y cualitativa de la resolución de los temarios de control presentados por el equipo, teniendo presente para ello la importancia de cada pregunta de acuerdo a los objetivos tratados en el control.

6. Evaluación del trabajo del equipo a partir tanto del trabajo conjunto como de los resultados individuales de sus miembros.

El experimento se realizó en la asignatura Matemática I de nivel II en primer año de las carreras de Ciencias Farmacéuticas y Microbiología para desarrollar mayor grado de conciencia, independencia y solidez.

El programa analítico de Matemática I está elaborado con el enfoque sistémico estructural funcional, donde describe el objeto en su nivel más desarrollado, es decir más general. Las características estructurales funcionales estables de cada nivel del sistema recibe el nombre de invariantes del sistema.

Conciencia

El carácter consciente de la acción consiste en la habilidad que tiene el individuo para explicar la lógica de su acción, o sea, poder decir que hará y por qué. Esta característica está determinada por dos parámetros:

- el grado de despliegue logrado en la formación de la acción, que es lo que permite comprender su lógica
- la corrección con que se refleja en la etapa del lenguaje.

El grado de conciencia consiste en la habilidad de fundamentar, argumentar la corrección de su ejecución, depende de la calidad de su asimilación en la forma verbal externa. Esta propiedad da al hombre la posibilidad de observar sus acciones y con esto darse cuenta no sólo de saber, sino de lo que sabe.

Se midió en una escala nominal de: BF(bien fundamentada), RF(regular fundamentada), MF(mal fundamentada), SF(sin fundamentar),

Independencia

Se entiende por independencia la capacidad que tiene el alumno de realizar la acción correctamente sin ayuda de nadie. En un principio el alumno necesitará que se le enseñe la acción. Esta etapa que se realiza con la ayuda del que enseña se llama "fase de la acción compartida", pero con el tiempo el alumno empieza a asumir cada vez más la acción y finalmente puede realizarla sin la ayuda de nadie, avanzando de la acción compartida a la acción independiente.

Se midió en una escala nominal de bastante, regular y poca o ninguna independencia correspondiendo respectivamente a los siguientes niveles de ayuda:

nivel 1: cuando el estudiante necesita la ayuda en todas las acciones

nivel 2: cuando el estudiante sólo necesita la ayuda en las acciones esenciales o en algunas de ellas

nivel 3: cuando el estudiante no necesita ninguna ayuda.

Se entendió que un alumno tenía:

- bastante independencia cuando necesitaba que se le diera a lo sumo el 25% de los elementos esenciales del procedimiento de trabajo para realizar correctamente el mismo.
- regular independencia cuando necesitaba que se le diera entre el 25% y el 50% de los elementos esenciales del procedimiento de trabajo
- poca o ninguna independencia cuando necesitaba más del 50% de los elementos esenciales del procedimiento de trabajo.

Solidez

La solidez es una propiedad secundaria de la acción que consiste en la permanencia en la memoria y posibilidad de aplicación de los conocimientos en el tiempo, y que depende de cuán cerca esté la acción de la forma mental que es su forma superior, aquella que nos permite pensar con rapidez. Depende además del grado de generalización que es quien expresa la relación entre las posibilidades objetivas de aplicación del conocimiento y las posibilidades subjetivas del individuo. Respecto a esto último el grado de generalización es máximo cuando el individuo puede realizar la acción objetivamente en cualquier circunstancia posible. El contenido de la base orientadora de la acción es lo que determina precisamente el proceso de generalización.

Finalmente, la solidez depende del grado de automatización que es la posibilidad de combinar una acción con otra, de realizar más de una acción a la vez, de ejecutar una acción libre del control de la conciencia.

Dado que uno de nuestros objetivos era: "Determinar en que sentido el empleo de la técnica R-C influía en nuestros alumnos mejorando algunos aspectos de su personalidad", necesitábamos el testimonio subjetivo de cada uno de ellos que nos permitiera recoger tanto los acontecimientos como las valoraciones de la influencia recibida por su participación en el proyecto. Por esa razón nos decidimos a utilizar el método biográfico.

Este método tiene su origen en la obra de Thomas y Znaniesky (1927) The Polis Plasant, pero el mismo ha sufrido tantas modificaciones como usuarios ha tenido razón por la cual proliferan tantos términos diferentes que conducen a la confusión y a una difícil delimitación conceptual. En el ámbito de la Investigación Educativa el método se ha utilizado para explorar la dinámica de situaciones concretas a través de la percepción que de ellos hacen sus protagonistas. Como estas situaciones difieren del objetivo de nuestra investigación es que preferimos exponer brevemente tres etapas de la misma para mayor claridad.

Etapa I

Exposición personal y por escrito hecho por el alumno de los cambios subjetivos experimentados en cada actividad tales como aumento de autoestima, seguridad, flexibilidad, etc.

Etapa II
Al final del proyecto en cada equipo cada miembro debe fundamentar oralmente los cambios obtenidos.

Etapa III
Discusión colectiva entre los distintos equipos de los aspectos señalados con mayor insistencia en la etapa Di para de esta forma dar respuesta de manera colectiva y resumida a uno de los objetivos de esta investigación.
En esta etapa el docente puede participar utilizando todas sus observaciones.

Conclusiones

El uso de métodos estadísticos para comprobar los resultados obtenidos nos permite afirmar que con el empleo de la Técnica grupal Roldán-Cribeiro es posible lograr un mayor grado de conciencia, independencia y solidez en los conocimientos.

Además, guiados fundamentalmente por la interrelación con los alumnos se realizó una investigación cualitativa sobre determinados aspectos observados. El método utilizado para dicha investigación fue el Método Biográfico y mediante el mismo se pudo comprobar que como resultado del uso de la Técnica Roldán-Cribeiro, los alumnos habían ganado en autoestima, seguridad, flexibilidad y sociabilidad. Todo esto nos autoriza a recomendar el empleo de esta técnica no sólo en Matemática sino además en otras asignaturas.

Referencias Bibliográficas

Colectivo de autores. (2000). *Tendencias pedagógicas en la realidad educativa actual*. CEPES, Universidad de La Habana, Tarija-Bolivia.

Canfux, V. (1998). *Los métodos participativos ¿una nueva concepción de la enseñanza?* La Habana, Cuba: Poligráfico Evelio Rodríguez Curvelo.

Galperin, P.Y. (1982). *Sobre la formación de los conceptos y de las acciones mentales*. La Habana, Cuba: Lecturas de Psicología Pedagógica.

González, O. (1996). El enfoque histórico-cultural como fundamento de una concepción pedagógica. En *Tendencias pedagógicas contemporáneas*. Colombia: El Poira Editores e Impresores S.A. Ibagué.

Roldán, R. y Cribeiro, J. (1995a). *Sobre la activación de la Enseñanza de la Matemática en especialidades de las Ciencias Naturales*. Cuba: Facultad de Matemática y Computación, U.H.

Roldán, R. y Cribeiro, J. (1995b). *La evaluación dinámica y continua como elemento rector en la activación de la Enseñanza de la Matemática*. Cuba: Facultad de Matemática y Computación, U.H.

Rodríguez G., Gil J. y García E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Madrid, España: Aljibe.

Vigotsky, L.S. (1988). Interacción entre enseñanza y desarrollo. En *Selección de Lecturas de Psicología de las Edades I* (Tomo III). La Habana, Cuba: ENPES.

Concepciones que los Alumnos de Nivel Medio Superior Tienen sobre los Ángulos Negativos y Mayores de 360°

Rosario Lluck, Graciela Valdés, Santiago R. Velázquez y Gustavo Martínez
Universidad Autónoma de Guerrero
México
dianalluck@hotmail.com, vida_abundante_acapulco@yahoo.com
Pensamiento Geométrico – Nivel Medio

Resumen

En el aprendizaje de las matemáticas hay algunos temas como los ángulos negativos y los mayores de 360° que se presentan aislados de cualquier contexto práctico, social y de aplicación. Por este motivo nos interesa conocer las concepciones que tienen los alumnos al respecto, saber si pueden establecer relaciones entre las diferentes representaciones de estos ángulos. Pretendemos hacer una caracterización de los sentidos y significados que los alumnos del nivel medio superior atribuyen a los ángulos negativos y mayores de 360°. Para ello, efectuamos un análisis bibliográfico atendiendo a los aspectos conceptuales, didáctico-cognitivos y fenomenológicos. Además se hace una exploración con los estudiantes para conocer dichas concepciones.

Introducción

Durante la enseñanza de los ángulos negativos y mayores de 360°, así como de las funciones trigonométricas donde están inmersos, se inicia el tema tanto en las aulas como en los libros de texto de una manera repentina, sin justificar en modo alguno su existencia y su aplicación, lo único que se hace es "enseñar" sobre su manejo. Al revisar los textos nos podemos percatar que no se toca para nada el aspecto fenomenológico de los ángulos, siendo que su aplicación está presente en un sin número de fenómenos naturales y en aplicaciones de diferentes ramas de la ciencia y la tecnología. Podemos aseverar que el concepto de ángulo surge de la naturaleza misma ya que existen un sin número de fenómenos naturales, que se pueden explicar introduciéndolo, como por ejemplo los fenómenos de reflexión, refracción y difracción de la luz.

Los cambios en la incidencia de los rayos solares de acuerdo a las estaciones del año, la forma en que algunos animales se orientan, ya sea por la inclinación de los rayos solares o por el ángulo de reflexión de los sonidos. Los trabajos de Karl Von Frisch quien ganó el premio Nobel de Medicina y Fisiología en 1973, sobre la manera en que las abejas después de hacer un vuelo de exploración, trasmiten la información a sus compañeras sobre dónde están las flores en el panal. Lo hacen ejecutando una danza con una cierta inclinación y frecuencia, siendo la inclinación la dirección en la que se encuentran las flores y la frecuencia, la distancia. También podemos asegurar que no hay diseño alguno en ingeniería donde no intervengan los ángulos. Aún dentro de la medicina está presente su aplicación, por ejemplo un buen tratamiento de ortodoncia tendrá que estar fundamentado en una medición de ciertos ángulos craneales, los cuales determinan entre otras características, el tipo de mandíbula y de mejillas.

En este artículo se presentan avances de la investigación en términos de la experiencia con estudiantes, del análisis bibliográfico y finalmente se describen los resultados de la presentación del trabajo en diferentes eventos.

Antecedentes y Justificación

Sabemos que la trigonometría fue utilizada desde los primitivos babilonios, como un auxiliar para la agrimensura, la astronomía y la navegación. Los astrólogos y navegantes necesitaban calcular distancias no mesurables con una cinta métrica. La trigonometría les permitió realizar tales cálculos a través de la aplicación de las funciones trigonométricas, las cuales fueron utilizadas inicialmente por los griegos para analizar los arcos de los círculos. Hiparco fue el primero que en el año 140 a.c. las utilizó para determinar distancias en línea recta a través de la bóveda celeste.

Tomando en consideración esto, es indudable que los ángulos ya mencionados tienen su motivo de existencia tanto en la génesis de la trigonometría, como en las aplicaciones actuales de física, geometría analítica, cálculo vectorial, representaciones polares, etc. Basta con que pensemos en los giros de una rueda de engrane, movimientos vibratorios y muchos otros fenómenos cíclicos o periódicos. En la navegación tanto naval como aérea, encontramos giros "positivos" y giros "negativos"; si una nave debe de cambiar su rumbo con respecto a los puntos cardinales, las direcciones de giro deben quedar bien definidas, por lo cual se hace necesario adoptar ciertas convenciones, siendo en este caso necesaria la designación negativa y positiva de los ángulos y de igual forma de los ángulos mayores de 360°.

Si durante la enseñanza del álgebra nos encontramos frontalmente con el problema de la concepción de los números negativos, al trabajar con las funciones trigonométricas de ángulos negativos, tenemos dos dificultades, la característica negativa del ángulo y la obtención de sus funciones. También las correspondientes a ángulos mayores de 360°, presentan dificultades.

Puntualizamos que el concepto geométrico de ángulo, es suficiente para resolver los problemas que plantea la geometría, pero no para todos los problemas de la trigonometría y otras disciplinas.

Es importante entonces explorar qué significados dan los alumnos a un ángulo negativo y/o uno mayor de 360° y qué está representando cada una de las funciones trigonométricas en estos casos, ya que si este concepto es base para ser utilizado en otras disciplinas, no es clara la comprensión de otros conceptos relacionados con éste, tampoco tendrán claridad y acabarán aprendiéndolos de manera mecánica.

Marco Teórico

En Vigotsky se enmarca de manera adecuada la problemática tratada en este trabajo, ya que estamos explorando sobre conceptos que podemos considerar abstractos.

Las relaciones entre pensamiento y lenguaje, según Vigotsky, son profundamente complejas. *"Un pensamiento nace a través de las palabras. Una palabra sin pensamiento es una cosa muerta, y un pensamiento desprovisto de palabras permanece en la sombra. La conexión entre ellos sin embargo no es constante. Surge en el curso del desarrollo y evoluciona por sí misma"* (Vigotsky, 1998). La formación de los conceptos o la adquisición de la palabra significado, escribió Vigotsky, constituye el resultado de una actividad compleja (la operación con la palabra o el signo) en la cual participan todas las funciones intelectuales fundamentales en una combinación especial.

Aquí precisamente lo que tratamos de explorar son los sentidos y los significados, que los alumnos dan a los ángulos negativos y mayores de 360°. Porque si como establece Vigotsky, estos conceptos no tienen una representación mental para los alumnos, son cosa muerta y no se ha logrado que las diferentes funciones intelectuales, se combinen para darles significado.

Entendemos por *sentido* a lo que se concibe como una interpretación personal no institucionalizada que un sujeto le asigna a un objeto de conocimiento dentro de un contexto, donde el objeto adquiere relevancia y funcionalidad; y por *significado* la síntesis conceptual de dicho objeto como un producto social dado por la interacción, negociación y consenso. Algo institucionalizado y que por lo tanto se dará después de haber manipulado al objeto en diferentes conceptos, esto es, el sujeto construye el significado a partir de los sentidos en contexto.

Tanto los ángulos como las funciones trigonométricas, tienen diferentes representaciones.
En general, cada representación, según Duval (1998) *"Es parcial cognitivamente con respecto a lo que ella representa*". Esto es, cada sistema de representación puede resaltar características diferentes. Es decir, cada sistema de representación nos permite ver una faceta diferente del objeto a estudiar y pone de manifiesto algunas de sus propiedades relevantes.

Los registros de representaciones deberán permitir las tres actividades cognitivas fundamentales, según Duval (1998) ligadas a la semiosis: la primera se refiere a la *formación de una representación identificable* como una representación de un registro dado. La segunda, es el *tratamiento* de una representación. Esta actividad es considerada como la transformación de una representación en otra, pero en el mismo registro donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna al registro teniendo en cuenta las reglas de tratamiento propias del tipo de registro de que se trate. Y la última, es la *conversió*n. Esta actividad es una transformación externa al registro de partida, donde se produce una representación en otro registro y se conservan la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación original.

Refiriéndonos a las funciones trigonométricas podemos aseverar que estas actividades cognitivas deben haberse realizado para lograr una concepción adecuada de las mismas; pensemos solamente en las diferentes representaciones que puede tener la función seno de un ángulo.
Consideramos que un campo privilegiado donde se pueden aplicar los sentidos y significados es el estudio de los ángulos negativos y mayores de 360° que estamos realizando.

Metodología y Desarrollo

1. En esta investigación se diseña, valida y aplica una encuesta a una muestra de 20 alumnos del tercer semestre de bachillerato del CENTRO DE BACHILLERATO TECNOLÓGICO industrial y de servicios No. 14, (CBTIS 14), para explorar sus concepciones sobre el tema.

Se diseñó el instrumento de exploración, conteniendo dos apartados, uno con un problema de aplicación y otro con la representación de las funciones en el círculo trigonométrico. El primer apartado consistió en contestar, basados en un gráfico de la Rosa de los Vientos, la dirección que podía tomar un barco que se encontraba en el origen del plano cartesiano, anotando el número de grados que giraba y el sentido que tomaba. En el segundo, representar el seno, coseno y tangente de diversos ángulos negativos y positivos, en el círculo trigonométrico.

El instrumento se aplicó a la muestra mencionada de edades entre 14 y 16 años, que cursaban en el segundo semestre, la materia de Matemáticas II, con contenido de geometría y trigonometría.

En un primer momento dichos alumnos contestaron el cuestionario, posteriormente, analizando las respuestas obtenidas, se llevó a cabo la entrevista con cada uno de ellos para conocer lo que pensaban al responder las preguntas planteadas.

Después de analizar los resultados, observamos que en el apartado I, el 95% de los alumnos contestó en forma correcta, no así en el apartado II, que sólo el 5% lo hizo correctamente.

Pudimos observar en los resultados mencionados que los alumnos entrevistados:

- En el problema de la Rosa de los Vientos no tuvieron dificultad, identificando correctamente los sentidos positivos y negativos de los ángulos. (figura 1)
- Al preguntarles sobre otras aplicaciones de estos ángulos, su respuesta fue negativa.
- En el cuestionario, al representar las funciones de los ángulos en cuestión, en el círculo trigonométrico, no lo pudieron resolver porque forzosamente quieren ver el triángulo rectángulo y al no visualizarlo piensan que no hay solución. (figura 2)
- Confunden a los ángulos negativos con los signos de los cuadrantes. (figura 3)

FIGURA 1

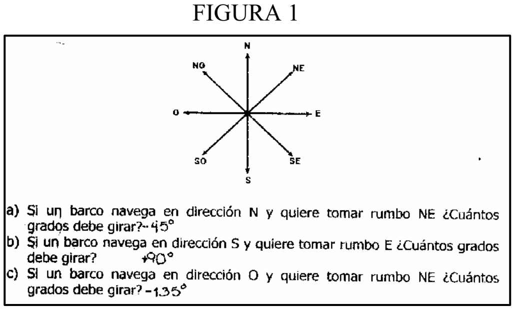


FIGURA 2

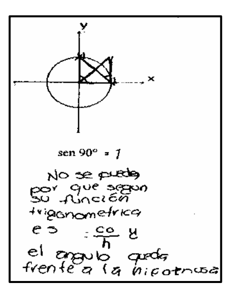
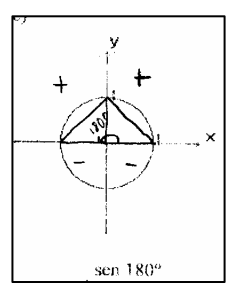


FIGURA 3



2. Como los textos reflejan el trabajo docente dentro del aula y en consecuencia la forma en que los conceptos les han sido manejados a los alumnos, también efectuamos un análisis de textos. Este trabajo se puede realizar desde diferentes perspectivas, nosotros tomamos el efectuado por Sierra (2003) en su trabajo sobre "El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria" en el que consideran tres dimensiones para el análisis:

Análisis conceptual, en el que se busca conocer las definiciones utilizadas y forma de organizar los conceptos, las representaciones gráficas y simbólicas, problemas y ejercicios resueltos y propuestos.

Análisis didáctico-cognitivo en el que se indaga los objetivos que el autor propone para estos contenidos.

Análisis fenomenológico caracterizado con los fenómenos que considera el autor para la presentación de los conceptos motivo de investigación.

Los textos utilizados se seleccionaron por su pertinencia y por estar contemplados dentro de la bibliografía sugerida por el plan de estudios correspondiente. Los resultados emanados de este análisis son los siguientes:

AUTOR	ANÁLISIS CONCEPTUAL
(Acosta, 2002)	Presenta la definición clásica de ángulo y la diferencia entre ángulo positivo y negativo conforme la convención del giro de las manecillas del reloj. A partir de la semejanza entre triángulos introduce las funciones trigonométricas, como una relación entre dos lados de un triángulo rectángulo. Posteriormente introduce el círculo trigonométrico y las curvas generadas a partir de él para 360°. No se encuentran aplicaciones, ejercicios o problemas referentes a los ángulos negativos y mayores de 360°.
(Sparks, 1998)	El concepto de ángulo lo introduce refiriéndolo a los segmentos rectilíneos dirigidos, ángulo negativo y positivo conforme la convención del giro de las manecillas del reloj. Manejando como antecedente el sistema cartesiano de coordenadas rectangulares, define las funciones trigonométricas a partir de las relaciones entre la abscisa, ordenada y radio vector. En el capítulo 4 "La Reducción de las Funciones Trigonométricas" en su segunda sección, desarrolla la obtención de las funciones trigonométricas de ángulos negativos, exponiendo la conveniencia de expresarla en términos de la misma función del ángulo positivo de igual magnitud. En el capítulo 5 "Medida en Radianes y Funciones de Números" al tratar con ángulos mayores de 360° lo hace en función del número de revoluciones. En el capítulo 6 trata todo lo referente a la graficación de las funciones trigonométricas, hasta 360°, mostrando como referencia, sin analizar –180° Contiene un gran número de ejercicios, solamente tocando los ángulos negativos y mayores de 360° en los capítulos arriba mencionados, y al tratar las coordenadas polares.

(Swokowski, 1997)	*Análisis conceptual*: Inicia el texto con algunos temas de álgebra relacionados: sistema de coordenadas rectangulares y gráficas, funciones y gráficas de funciones. Da una definición clásica de ángulo y también refiere la diferencia entre ángulo positivo y negativo conforme la convención del giro de las manecillas del reloj. Las funciones trigonométricas las define a partir del círculo unitario, haciendo referencia a los conceptos de función ya tratados. Posteriormente analiza las gráficas de las funciones trigonométricas desde -2π hasta 4π-. Contiene explicaciones sobre temas de física relacionados, como movimiento circular, movimiento armónico, la diferencia entre velocidad angular y velocidad lineal. También presenta una buena cantidad de ejercicios y problemas en los que incluyen tanto a los ángulos negativos, como los mayores de 360°

AUTOR	ANÁLISIS DIDÁCTICO-COGNITIVO
(Acosta, 2002)	Este texto fue elaborado basándose en el programa de la DGETI, con una intención de lograr una participación activa de los alumnos en la formación de los conceptos. No lográndose este objetivo en el apartado correspondiente a la trigonometría.
(Sparks, 1998)	En esta edición el autor trata de incluir las consideraciones matemáticas de la época sin perder su carácter tradicional. Específicamente en el capítulo referente a las funciones trigonométricas hace algunos cambios con respecto a las ediciones anteriores en cuanto al orden de los capítulos aunque conserva las mismas definiciones.
(Swokowski, 1997)	El autor trata de incrementar la claridad en el análisis de los conceptos con la finalidad de facilitar a los estudiantes, la comprensión de los conceptos, sin perder el rigor matemático.

AUTOR	ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO
(Acosta, 2002)	No contiene referencia alguna, solamente algunos ejercicios en los que se hace referencia al movimiento circular uniforme
(Sparks, 1998)	No contiene referencia alguna
(Swokowski, 1997)	Al tratar los temas de física da la oportunidad de manejar los conceptos de los ángulos dentro de un contexto en los que intervienen fenómenos relacionados.

Conclusiones

Este trabajo se presentó en diversos eventos como en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME) XVIII, en donde al mostrar los resultados obtenidos, los asistentes expresaron su interés por el diseño de alguna estrategia de solución a esta falta de conceptualización palpable de la temática investigada. Por lo que, concluimos que si como docentes podemos conocer los sentidos y significados de la temática aquí tratada, se podrá reconceptualizar la enseñanza de los mismos. Y una vez determinadas las concepciones de los alumnos sobre las funciones trigonométricas de ángulos negativos y mayores de 360°, éstas pueden ser base para el diseño de situaciones didácticas como notas de clase (Brousseau 1983, Chevallard 1998 y Velázquez 2001) para corregirlas.

Referencias Bibliográficas

Acosta R. (2002). *Geometría y Trigonometría.* Colección DGETI. México: Fondo de Cultura Económica.

Brousseau, G. (1983). *Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas de la Enseñanza.* México: DME-CINVESTAV-IPN.

Chevallard, Y., Bosch M. y Gascón J. (1998). *Enseñar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* México, SEP.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II.* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Sierra M., González M.T. y López C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Revista Educación Matemática*, 15(1) (pp. 21-49).

Sparks F. y Rees P. (1998). *Trigonometría.* México: Reverté Ediciones.

Swokowski E. y Cole J. (1997). *Trigonometría.* México: International Thomson Editores.

Velázquez, S., Flores C., García G., Gómez E. y Nolasco, H. (2001). *El Desarrollo de Habilidades Matemáticas en Situación Escolar.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Vigotsky, L. (1998). *Pensamiento y Lenguaje.* México: Quinto Sol.

Dificultades de Comprensión de Estocásticos en la Educación Secundaria

José Manuel López
DME, Cinvestav del IPN
México
josemanuellopez8@prodigy.net.mx
Probabilidad, Estadística y Combinatoria — Nivel Básico

Resumen

Este trabajo, con un enfoque cualitativo (Eisner, 1998), forma parte de una investigación más amplia sobre comprensión de probabilidad en tercer grado de secundaria. Con referencia a la propuesta de ideas fundamentales para un currículum de estocásticos (Heitele, 1975), el análisis del marco institucional vigente y del desempeño de docentes y alumnos en escenarios específicos, resultó en la identificación de dificultades de unos y otros durante su estudio de situaciones probabilísticas, así como de prácticas acríticas de enseñanza y de seguimientos de textos que no derivan en la advertencia de intuiciones erróneas (Fischbein, 1975) de los estudiantes durante la enseñanza.

1. Introducción

La formación de profesores en probabilidad, es deficiente, como lo señalan Galván (1996) y Alquicira (1998), por lo que con frecuencia su enseñanza es superficial o se le omite. Según Heitele (1975), para la enseñanza de estocásticos se necesitan profesores que sepan lo que de ellos es fundamental para aplicarlo en situaciones específicas dentro y fuera del aula, pues "la adquisición temprana de modelos explicativos inadecuados puede desarrollar intuiciones firmemente arraigadas" (pág. 4).

Parte de una investigación más amplia, ésta se planteó estudiar: ¿qué elementos requiere el profesor de tercer grado de secundaria para la enseñanza de la ley de los grandes números?; ¿qué elementos necesita el alumno de tercer grado de secundaria para comprender la ley de los grandes números? Sus objetivos fueron: identificar elementos para la enseñanza de la probabilidad en el tercer grado de secundaria e identificar elementos para la formación de docentes de probabilidad en el tercer grado de secundaria.

2. Ideas Fundamentales para la Enseñanza de Probabilidad y Estocásticos

Con contenidos de matemáticas en la escuela secundaria, "Un propósito central … es que el alumno aprenda a utilizarlas para resolver problemas, no solamente los que se resuelven con los procedimientos y técnicas aprendidas en la escuela, sino también aquellos cuyo descubrimiento y solución requieren de la curiosidad y la imaginación creativa" (SEP, 1993, *Plan y programas de estudio. Educación Básica Secundaria*, pág. 37). Esto es facti- ble si los alumnos comprenden lo enseñado en el aula.

Para el desarrollo de una base para el pensamiento probabilístico en un contexto es- colar, Heitele (1975) propone ideas fundamentales de estocásticos, las cuales define como aquéllas "que proporcionan al individuo modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, que sean tan eficientes como sea posible y que se distingan en los distintos niveles cognoscitivos, no de manera estructural sino sólo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración" (pág. 3). Luego, la enseñanza retroalimentará los conocimientos adquiridos previamente para relacionarlos analíticamente con la realidad y continuarlos hacia un conocimiento más elaborado, es decir, ir de un plano intuitivo hacia uno formal.

Las ideas fundamentales de probabilidad y de estadística (estocásticos) que Heitele propone son: medida de probabilidad; espacio muestra; regla de adición; regla del producto e independencia; equidistribución y simetría; combinatoria; modelo de urna y simulación; variable estocástica; Ley de los Grandes Números y la idea de muestra.

Según Fischbein (1975), la enseñanza de la probabilidad es necesaria y es factible con ella el desarrollo de las intuiciones, pues en las vivencias diarias debemos tomar decisiones entre varias opciones que se presentan. Según él, las intuiciones se clasifican en: *primarias*, que son adquisiciones cognitivas directamente de la experiencia, sin instrucción; *secundarias*, formadas por la educación sobre todo en la escuela. Fischbein señala, además, que existe un deterioro en el desempeño probabilístico con la edad y que la ausencia de la idea de proporcionalidad no es obstáculo para aprender el concepto de probabilidad.

3. Método, Organización y Criterios de Análisis

La información recopilada mediante videograbaciones, cuestionarios, entrevistas y documentos pertinentes, se analizaron con los siguientes criterios: ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975), recursos para organizar y tratar la información (Fischbein, 1975), otros conceptos matemáticos incluidos, términos de estocásticos utilizados en la enseñanza. Aquí sólo nos referiremos a las ideas fundamentales de estocásticos.

La investigación, de orden cualitativo (Eisner, 1998), se organizó en cuatro etapas.

a. *Primera etapa (documental)*. Caracterizó el marco institucional en el que se inscribe la enseñanza de la probabilidad en tercer grado de secundaria. Para ello, se analizó la propuesta educativa respectiva: *Plan y programas de estudio* (SEP, 1994), libros de texto (entre ellos, Filloy, 2001).

b. *Segunda etapa (estudio dirigido y aula alterna)*. Interesó caracterizar la comprensión de ideas de estocásticos mediante la interacción entre docentes (*estudio dirigido*), su enseñanza del tema y las dificultades que ésta enfrentó en *aula alterna*, contando con la participación de un docente-investigador (de ahí el adjetivo "alterna"), y las dudas manifiestas de los estudiantes. Mediaron el *estudio dirigido* y la enseñanza en el aula las lecciones de probabilidad (Filloy *et al.,* 2001), las cuales se refirieron a variable aleatoria y esperanza (lección 29), la paradoja de Bertrand relativa al teorema de Bayes (lección 30), distribución binomial (lección 31), el problema de los cupones como número de éxitos obtenidos en *n* ensayos (lección 32) y números aleatorios y simulación (lección 33).

b.1. *Estudio dirigido.* Consistió en el desarrollo de un programa de sesiones de estudio de probabilidad mediado por el texto ya citado, con 12 docentes de secundaria, para posibilitar la enseñanza del tema en el aula e introducir elementos de reflexión y crítica (autocrítica) de la práctica docente respecto al tema.

b.2. *Aula alterna.* Consistió en la conjugación de docencia e indagación en la práctica de la enseñanza de la probabilidad en el aula, mediada por el texto ya citado, con la participación de este investigador en las clases que el docente impartió a sus estudiantes y el registro de la información de interés.

c. *Tercera etapa (aula normal).* Con la orientación de los resultados de la etapa precedente, se enfocó la comprensión de los estudiantes acerca de la *Ley de los Grandes Números* al cabo de su enseñanza mediada por el texto citado. Participaron en el aula el investigador y sus 26 alumnos del tercer grado de educación secundaria.

c.1. *La estrategia de enseñanza* consideró resultados de *aula alterna* y lo que se observó en *estudio dirigido*, respecto a los siguientes aspectos: i) clarificación de la situación planteada; ii) realización de las actividades propuestas en el texto. Es decir, disposición en el aula de material (concreto) para ilustrar, mediante la realización de ensayos (efectivos), en qué consistía la situación por estudiar; en particular, se pretendieron condiciones para la advertencia de distintos resultados posibles y de la variación de ocurrencia de éstos mediante la introducción del enfoque frecuencial de la probabilidad.

c.2. *Aplicación de cuestionario* y cuantificación de los resultados obtenidos. En esta etapa se aplicó un cuestionario constituido por diez preguntas de opción múltiple (cuatro posibles resultados en cada pregunta y requerimiento de justificación de cada selección realizada), previamente a la enseñanza del tema; luego de ésta se aplicó nuevamente el mismo cuestionario para obtener información sobre resultados de esa enseñanza en las nociones de probabilidad de los estudiantes. Las preguntas se distribuyeron así: la primera planteó la intervención de azar; las siguientes tres, el enfoque clásico de la probabilidad; las siguientes tres correspondieron al enfoque frecuencial de la probabilidad; y las tres últimas, a la *Ley de los Grandes Números*. Las preguntas se refirieron a distintas situaciones, tales como extracciones de urna, ensayos de Bernoulli o del entorno familiar a los estudiantes.

d. *Cuarta etapa (entrevista semiestructurada).* Se entrevistó a un alumno de *aula normal*, seleccionado de acuerdo a sus resultados en las dos aplicaciones del cuestionario. El fin fue profundizar en su comprensión de la *Ley de los Grandes Números*, utilizando un guión de preguntas respecto a ideas fundamentales de estocásticos, recursos para organizar y tratar la información, términos de estocásticos y otros conceptos matemáticos.

4. Resultados

4.1. *Etapa documental.* Unos de los resultados de esta etapa es que, aún y cuando el *Plan y programas de estudios* (SEP, 1993, pág. 51) incluye temas de probabilidad que deben impartir los profesores, se privilegian en él dos ideas fundamentales (medida de probabilidad y espacio muestra), lo cual resulta en un programa de estudios incompleto y el reflejo consiguiente en los demás materiales de apoyo, en lo que a probabilidad se refiere.

4.2. *Estudio dirigido.* Se consideró la lección 29 referente a la realización de 100 volados, que se deben agrupar de diez en diez; si se obtiene águila, se gana un peso, pero si se obtiene sol se pierde un peso; cada partida de diez volados cuesta cinco pesos. La pregunta que se plantea es: ¿cuál es la ganancia que se puede esperar? Cada profesor realizó 10 lanzamientos para obtener los 100 lanzamientos que propone la lección. Se identificaron algunas dificultades de los docentes respecto a probabilidad, y algunos sesgos respecto a la idea de azar; así, un profesor se consideró "bueno" para la realización de los lanzamientos, aunque la probabilidad de cada cara de la moneda ordinaria es un medio. En la transcripción del pasaje en cuestión, "C" denota al conductor y "P" al profesor:

12 C	¿Cuál es la ganancia que razonablemente puedes esperar, es decir, por término medio? …..¿Te conviene jugar?	13 P_{6}	No podría.
14 C	Así como ve el problema, ¿le convendría jugar o no?	15 P_{6}	Sí, porque tengo las mismas oportunidades de ganar que mi otro contrincante.
16 C	Usted, maestra, ahora ¿cuánto en término medio?, ¿cuánto esperaría usted ganar, perder, o ninguna de las dos?	17P_{12}	Ganar veinticinco pesos.
18 C	¿Usted, maestra?	19 P_{8}	A lo mejor ganar.
22 C	¿Cuánto?	23 P_{11}	A lo mejor si gano y pierdo la mitad quedo en cero igual.
24 C	¿Usted, maestra?	25 P_{9}	Yo igual.
26 C	¿Cuánto?	27 P_{9}	O sea, de cero.
28 C	Usted, maestra, entonces usted 25, ¿verdad?	29 P_{12}	Yo soy buena para los volados.

4.3. *Aula alterna*. Se reveló escaso conocimiento del docente sobre probabilidad, por ejemplo al referirse a "frecuencia relativa", término específico de estocásticos. En las sesiones surgió la confusión de frecuencia relativa con frecuencia; se les consideró sinónimos y ocasionó incomprensión del valor esperado de la variable aleatoria en cuestión. En el aula, la gráfica de los resultados de la secuencia de lanzamientos de la moneda solamente consideró los favorables a águila; no se estableció la relación entre números de águilas ocurridas y el total de lanzamientos para que el alumno advirtiera la estabilización progresiva de la frecuencia relativa del evento en cuestión. En la transcripción del pasaje respectivo, "P" denota al profesor del grupo y "A" al alumno:

11 P	Poligonal, gráfica poligonal, vamos a hacer… vamos a ayudarnos del número con el cual… ustedes van a hacerlo, con el siguiente número, vamos a hacerlo rapidísimo. En la parte inferior dice número de lanzamientos de una moneda y ésta sería del 1 al 10; y por la parte izquierda está la frecuencia relativa, ésta sería también del 1 al 10, de dos en dos, 2, 4, 6, 8 y 10. Vemos por aquí [que] dice "frecuencia"...	12A_{1}	Relativa.
13 P	Relativa. Acá está el cero y acá esta el uno, dos, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. En la primera secuencia de volados, que fue de 10, ¿cuántas águilas obtuve?	14A_{2}	Cuatro.

4.4. *Aula normal.* Los alumnos no advirtieron la independencia de eventos para obtener caras distintas al lanzar dos monedas, pues aludieron a la trampa o a la suerte, a la manera en que se lanza la moneda:

174P	¿Crees que el primer resultado águila haya influido en el siguiente resultado	175A_{17}	Hubo trampa. ¡A la suerte!

que [también] fue águila?

176A_8 Puede ser trampa.
177A_4 Pudo haber sido que la moneda la
178A_5 echó con la cara hacia arriba dos veces.

También tuvieron dificultades para establecer la frecuencia relativa de eventos en diez lanzamientos, en particular, y el inventario del espacio muestra asociado a la situación en estudio (todas las diferentes secuencias de resultados de diez lanzamientos).

4.5. *Resultados generales del cuestionario.* La figura 1 resume los resultados de selecciones correctas en las aplicaciones del cuestionario antes y después de la enseñanza.

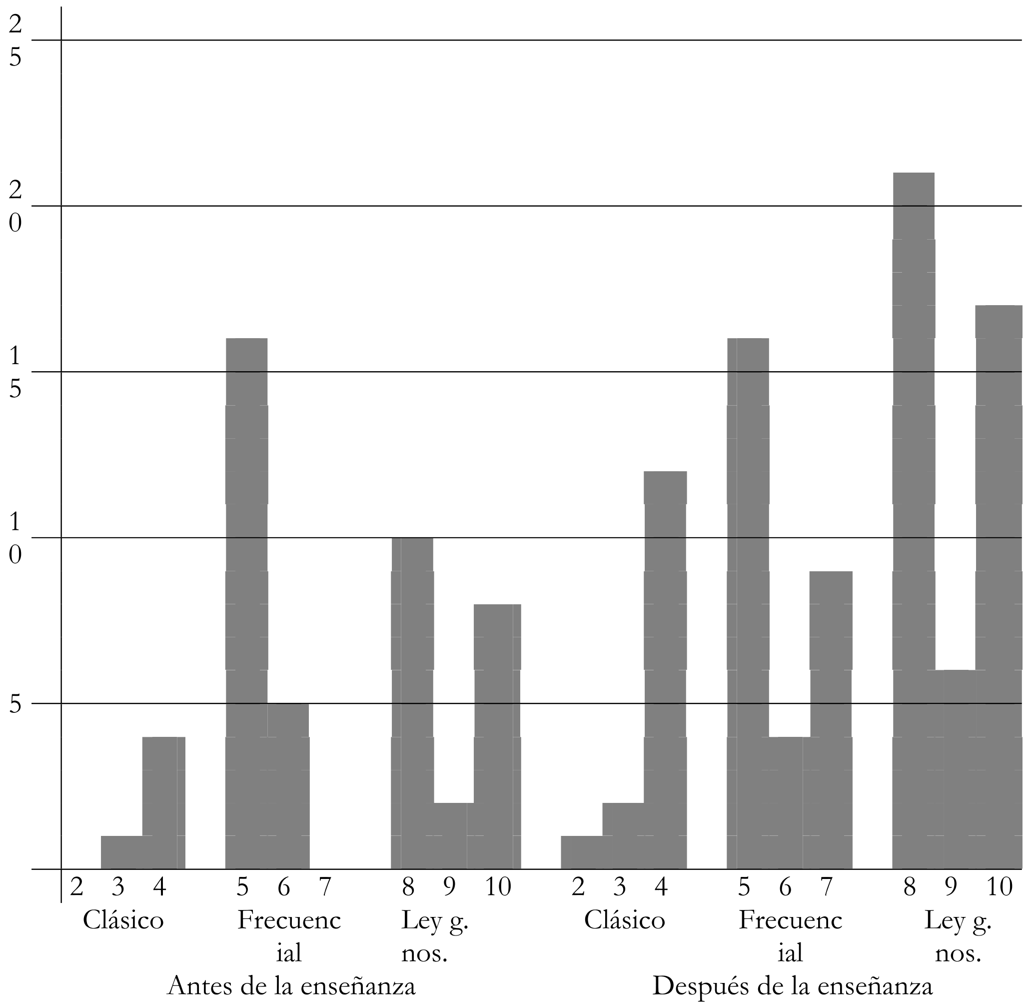


Figura 1. Resultados del cuestionario, selección correcta, antes y después de la enseñanza.

De modo notable, en los dos casos las preguntas que implicaron a la ley de los grandes números (8, 9 y 10); se obtuvieron mejores resultados, que las que corresponden al enfoque frecuencial (5, 6 y 7); y resultaron más difíciles las preguntas que corresponden al enfoque clásico (2, 3 y 4).
Por razones de espacio ejemplificamos sólo casos de enfoque frecuencial y de ley de los grandes números con un problema cada uno. Indicamos con negrita la opción correcta e incluimos ejemplos de justificaciones proporcionadas antes y después de la enseñanza.

6. Después de realizar un estudio en una universidad particular, en el área de posgrado, se estimó que 30 % de los estudiantes estaban seriamente preocupados por sus posibilidades de encontrar trabajo, 25 % por sus notas y 20 % por ambas cosas. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de último curso, elegido al azar, esté preocupado por al menos una de las dos cosas? ....( )

a) 5 % b) 20 % **c) 35 %** d) 55 %

Explica tu respuesta: si sumamos a 30% el 25% nos daria el 55% menos el 20% nos daria el 35%.

Explica tu respuesta: porque es el 30% y 25% son 55% Estarian preocupados por sus notas y 20% no por que incluye ambas cosas.

Figura 2. Desempeño del estudiante No. 5 en condiciones iniciales y finales.

10. Una bolsa contiene 15 fichas numeradas del 1 al 15. Un experimento de azar consiste en extraer al azar una ficha y en lanzar una moneda. ¿Cuál de los siguientes casos es más probable al repetir el experimento 900 veces, en las mismas condiciones? ....( )

a) (par, águila) **b) (impar, águila)** c) (par, sol) d) Ninguno de los anteriores.

Explica tu respuesta: No lo sé

Explica tu respuesta: Los impares son más que los pares, por eso es más probable que salga esa combinación

Figura 3. Desempeño del estudiante No. 11 en condiciones iniciales y finales.

En los dos ejemplos, como ocurrió con más de la tercera parte de los estudiantes (ver Figura 1), la aportación de la enseñanza se revela en el tipo de justificación otorgada, la cual, aunque proporcionada en lengua natural por la presentación misma del cuestionario, manifiesta ya adquisición de elementos para un análisis probabilístico.

4.6. *Entrevista semiestructurada.* Se presentó la situación siguiente a la que se refirió el guión de entrevista:

Un aprendiz de paracaidista debe realizar 10 saltos, cayendo dentro de cierta zona para pasar al siguiente nivel de instrucción; sus intentos son independientes. Si cae dentro de la zona gana un punto, si no, pierde un punto.

Se indicó al estudiante que interpretara la situación planteada mediante los resultados de diez secuencias de diez lanzamientos de una moneda ("águila" para adentro de la zona y "sol" para fuera de ella); así se le remitió a una situación estudiada en clase. Se realizaron efectivamente los 100 ensayos, se registraron los resultados en una tabla con papel y lápiz y se les capturó también en *Excel* para presentar, casi de inmediato en pantalla, la gráfica de las frecuencias de águilas correspondiente y la línea de tendencia respectiva. En el siguiente pasaje, "E" denota al entrevistador y "A" al entrevistado:

41 E ¿Qué podrías decir de estos resultados que obtuviste? [con los lanzamientos de la moneda].
42 A Que fue al azar, que fue la suerte de cada….
43 E Pero en cuanto a ... los volados […] ¿qué podrías decir ... de los resultados que obtuviste?
44 A Que se tuvieron que efectuar para saber cómo serían, ¿no?, qué tanta diferencia había, ¿cuántos son pares o impares…..?
45 E ¿Qué hubieras pensado si estos resultados, por ejemplo, hubieran sido 10, 9 u 8 [puntos obtenidos]?
46 A Que sería ganancia, sería una ganancia.
47 E Y ¿qué dirías si hubieras obtenido 0, 1, ó 2?
48 A Sería pérdida.
49 C ¿Pero qué dirías de esos resultados?
50 A Que podía haber sido mayor o menor cualquiera de los dos [resultados].

El alumno no atribuyó otro significado a los resultados según se planteó la situación de ganancia o pérdida, y no los abstrajo como sólo dos de todas las posibilidades. Estos eventos son poco probables en comparación con los eventos de obtener 3, 4, 5, 6 ó 7 puntos (águilas). Tampoco consideró el resultado "esperado" (la situación es justa), lo cual se señaló en las sesiones en aula. En resumen, con este alumno la enseñanza de la *Ley de los Grandes Números* no logró su cometido.

5. Observaciones

Conviene considerar las experiencias previas de los alumnos (intuiciones primarias) y discutirlas en el aula, lo cual contribuirá a un perfil distinto del futuro profesionista: capacidad de discutir sus puntos de vista, crítico de los diferentes a los suyos, creatividad, independencia. Con docentes en particular, de ahí derivaría el ejercicio crítico sobre su práctica en el aula y sobre los medios institucionales (SEP), pues la propuesta vigente para probabilidad es incompleta según el planteamiento de Heitele (1975).

Tanto alumnos como profesores pueden estimar bien la probabilidad de eventos de fenómenos sencillos (un solo lanzamiento de un dado o moneda), pero les es difícil calcularla cuando se hace referencia a varias repeticiones de ellos y se consideran eventos compuestos. Esto concuerda con lo señalado por Fischbein (1975) respecto a la capacidad de resol- ver problemas combinatorios, pues no siempre se le alcanza en el nivel de las operaciones formales, si se carece de una enseñanza específica. Al respecto, merece destacarse de este trabajo la dificultad y el insuficiente uso que hacen los estudiantes del diagrama en árbol. A pesar de la importancia que le concede Fischbein (1975) como recurso en la resolución de problemas probabilísticos y combinatorios, los alumnos evitan su uso y, cuando lo emplean es con escaso éxito. Consideramos que el uso de este recurso debe ser reforzado en la enseñanza.

Refrencias Bibliográficas

Alquicira, M.I. (1998). *Probabilidad: Docencia y Praxis. Hacia una fundamentación Epistemológica para la educación secundaria*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav, México.

Eisner, E. (1998). *El ojo ilustrado*. Barcelona, España: Paidós.

Filloy, E., Rojano, T., Figueras, O., Ojeda, A.M. y Zubieta, G. (2001). *Matemática Educativa. Tercer grado*. D. F., México: Mc Graw-Hill.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Galván, M. (1996). *Nubes y relojes*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav, México.

Heitele, D. (1975). An epistemological view of fundamental stochastical ideas. *Educational Studies in Mathematics,* 6, 187-205.

SEP, (1994). *Plan y programas de estudios 1993*. D. F., México. Educación Básica Secundaria.

La Habilidad Ubicación Espacial Matemática, como Habilidad Esencial, en la Visualización Matemática

Lilia López, Alfredo Alanís y Olga L. Pérez
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UANL
México
lilia_lopez@hotmail.com
Visualización — Nivel Superior

Resumen

Se investiga el desarrollo de la Habilidad Ubicación Espacial Matemática (HUEM) y la Habilidad de Transferencia entre Registros del Sistema Semiótico de Conceptos Matemáticos como habilidades componentes de la Visualización Matemática Tridimensional. Se analiza en la relación dialéctica conocimientos-habilidades del Pensamiento Geométrico, a la habilidad de identificar, comprender y comunicar relaciones de posición en el espacio sensible y en el espacio modelado (curvas, superficies y sólidos, ubicados en $\Re^2$ y $\Re^3$). Con base en la Teoría de la Actividad y Validaciones Didácticas, se identificó el deficiente desarrollo de la *HUEM* en estudiantes de Licenciatura en Física y Matemáticas, cuando se requiere de puntos de referencia no fijos y no observables.

Introducción

Es común hablar de la Geometría en función de las etimologías como "medición de la tierra", de la concepción Pitagórica como"Ciencia del espacio, arte práctico y ciencia obtenida por observación" o de Los Elementos de Euclides como "Ciencia contemplativa y descripción de formas y figuras de la cantidad continua que muestra las propiedades de las figuras (líneas, superficies y cuerpos)". Actualmente, se reconoce a la Geometría por su carácter formativo, como fuente de problemas y como medio para la articulación de problemas entre diferentes niveles de enseñanza. A la vez que, se enseña e investiga en el nivel superior, como *Ciencia Pura* (Geometrías Euclideanas y no Euclideanas). El presente trabajo, forma parte de una investigación mas completa sobre el *Desarrollo de Habilidad de Ubicación Espacial Matemática (HUEM), como Habilidad Esencial en la Visualización Matemática Tridimensiona*l, requerida en la solución de problemas de matemáticas de nivel superior y del ejercicio profesional. Coincidimos con Crowley M (1987), quien afirma que el Modelo del Pensamiento Geométrico de Van Hiele constituye una guía para la instrucción y evaluación de *habilidades geométricas* en los alumnos y lo consideramos como una relevante contribución al PEA de la Geometría Tridimensional, concebida como la Geometría que estudia a las *relaciones cualitativas y cuantitativas de las formas espaciales volumétricas, desde las nociones espaciales iniciales hasta la geometría Analítica del Espacio* y su relevancia en la Matemática de Nivel Superior.

Desarrollo

1. Visualización Matemática

De la investigación bibliográfica, respecto a las concepciones de visualización encontramos que a partir del Modelo Van Hiele se concibe a la Visualización como el Nivel 0 (o básico), en el que los estudiantes están conscientes del espacio sólo como algo que existe alrededor de ellos y los conceptos geométricos se ven como entidades totales. Pero En particular, Duval R.(1999b) analizó diferencias radicales entre *Visión Humana* (percepción de objetos físicos), *Visión* (visualización icónica espontánea) y *Tipos de Visualización,* afirmando que para *Ver en Matemática*s, "la visualización 3D/2D es una representación que, a diferencia de la percepción, no se desarrolla en el espacio real en 3D, sino que se proyecta sobre una superficie en 2D (roca, papel, pantalla electrónica...), no es una maqueta 3D/3D, pero se visualiza la profundidad propia de la percepción visual, gracias al surgimiento de la perspectiva". Apoyándonos en las concepciones de Zimmermann & Cunningham (1990), De Guzmán, M.(1996) y de Duval R.(1999b), arribamos a la siguiente concepción: *La Visualización Matemátic*a, no es una visión inmediata, es un camino de codificación y decodificación de objetos matemáticos abstractos (ideas, conceptos y métodos de las matemáticas), que presentan una gran riqueza de contenidos visuales (imágenes mentales, o a lápiz y papel o con la ayuda de tecnología), representables geométricamente en un sistema coordenado, para la solución de problemas. Respecto a la formación y desarrollo de habilidades matemáticas, consideramos a la Visualización como una habilidad profesional, coincidiendo con Fariñas,G.1995, en Velásquez, B. et al (2001), quien afirma que *Comprender, Visualizar y Comunica*r, son Habilidades Matemáticas (HM), de carácter integrador, que se desarrollan en la solución de problemas en la actividad matemática y en diversas esferas de la vida. En el marco de la Ingeniería Didáctica (Brousseau,1980), las representaciones geométricas, constituyen al *registro geométrico* del Sistema Semiótico de los conceptos, por lo que es fundamental el desarrollo de la habilidad de visualización matemática en la solución de problemas.

2. Sistema de Habilidades de la Visualización

De experiencias didácticas realizadas en diferentes niveles académicos, identificamos como *habilidades componentes* de la Visualización Matemática a *la Habilidad de Transferencia y la Habilidad de Ubicación Espacial Matemátic*a. Respecto a la *habilidad de transferencia* en el sistema semiótico de conceptos matemáticos, hacemos referencia, tanto al *pensamiento visual* en el *pensamiento matemático* en términos de imágenes mentales, como a la cita de Hilbert en Rey Pastor (1977) "los signos y fórmulas de la aritmética son figuras escritas, y las figuras geométricas son fórmulas dibujadas, ningún matemático podría prescindir de éstas fórmulas dibujadas, así como no podría realizar cálculos sin paréntesis ni signos operativos"; e implementamos estrategias del "El curriculum basado en el Modelo de la Representación Triple (TRM)", enunciada por Schwartz. Dreyfus & Bruckheimer (1990) en el cual, la Transferencia parte de una *Situación Real* hacia una *Representación numéric*a, o hacia una *Representación algebraic*a, o hacia una *Representación geométrica* y viceversa … y está basado en la resolución de problemas incluyendo *transferencia entre representaciones.*
Concebimos como una de las habilidades elementales de la HUEM, a la *habilidad de representar,* definida en la Geometría Descriptiva y en el aporte teórico de Álvarez García J. (2001), quien define a la habilidad de *representación gráfica* como *proceso* y como *macrohabilida*d, para la

formación del arquitecto. Pero el objetivo en programas de Arquitectura o Dibujo Industrial, es analizar propiedades de los Sistemas de Proyección con *punto al infinito* o *propio* y desarrollar la habilidad de trazar y/o analizar Intersecciones, Paralelismo o Perpendicularidad entre rectas o entre planos, sin considerar *Sistemas coordenados*. Desarrollar la habilidad de transferencia de las percepciones tridimensionales a representaciones bidimensionales y viceversa, forma parte de la formación básica exigida en el nivel universitario. Pero, en La Geometría Analítica del Espacio, en la Geometría Diferencial, en el Cálculo de dos variables, en el Cálculo Vectorial y la Matemática que requiera de gráficos en el sistema coordenado tridimensional, las *referencias espaciales* deben darse en relación a las siguientes *lateralidades definidas para el nivel superior*: "Arriba – abajo del piso"(del plano coordenado Z=0), "Al frente – atrás del plano X=0" o "A la derecha – izquierda del plano Y=0". Por lo tanto, en la presente investigación se concibe a la *visualización matemática tridimensional* como la habilidad de codificar un objeto volumétrico de 3D para modelarlo, representarlo y ubicarlo en un sistema coordenado tridimensional en 2D o viceversa (decodificarlo).

3. Habilidad Ubicación Espacial Matemática (HUEM)

Del análisis curricular sobre temas de Geometría, en libros de texto de Primaria y Secundaria en los Programas oficiales de la Secretaría de Educación Pública (SEP), México, se identificó que: una primer etapa de la *Habilidad de Ubicación Espacial* (en el Plano), se debe desarrollar en 1° y 2° grado, con actividades para ubicar a su persona y objetos en el entorno, en mapas sencillos y en dibujos sobre hojas planas con "dos "pares de referencia". Como una segunda etapa, en 3° y 4° grado se trabajan "tres pares de referencia" en mapas y dibujos con las nociones iniciales del sistema coordenado bidimensional, en términos de cuatro puntos cardinales. Saiz,I (1998) constató dificultades conceptuales presentes en 2° y 3° grado, al identificar las lateralidades del objeto y transferir las del sujeto. Pero, a partir de 5° y 6° grado y en Secundaria, ya no se define explícitamente el objetivo de desarrollar la habilidad de ubicación espacial y se trabajan propiedades, fórmulas y construcciones de sólidos básicos. En Programas del Nivel Medio Superior, se incluyen conceptos y gráficas de funciones lineales y cuadráticas, en el Sistema coordenado bidimensional, pero se adolece de estrategias didácticas que contribuyan al desarrollo de la habilidad de ubicación espacial tridimensional. Acuña C. (2001), investigó en grupos de bachillerato, sobre la localización de puntos y regiones en el plano a partir de ecuaciones o signos de las componentes de los pares ordenados, pero no hace referencia explícita a la habilidad de ubicación espacial. A través de entrevistas a los docentes de matemáticas de Licenciaturas e Ingenierías de la UANL, México, se identificó que los docentes presuponen que la alfabetización geométrica y la habilidad de visualización tridimensional se desarrollaron en los estudiantes, en niveles educativos precedentes. Pero las experiencias didácticas con los grupos de matemáticas de FCFM, dan cuenta de deficiencias en la relación dialéctica conocimientos-habilidades del pensamiento geométrico para la enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el Nivel Superior.

A partir del análisis curricular, de la investigación bibliográfica y experiencias didácticas, identificamos tres niveles de desarrollo de la HUEM, con carácter secuencial y de ascenso en la relación dialéctica *conocimientos-habilidades* del Pensamiento Geométrico:

- *Ubicación Espacial*: Es la habilidad del sujeto de controlar (identificar, comprender y comunicar) sus relaciones de posición con el *espacio sensible*. Permite establecer espacialmente la relación objeto-sujeto e identificar las direcciones principales del espacio y de las referencias espaciales. Se basa en una Percepción Espacial bidimensional o tridimensional, a partir de un Punto de referencia (Martínez y Rivaya, pp. 49-65). Se identifican lateralidades del objeto (arriba-abajo, al frente y atrás, a la izquierda y derecha) y se transfieren las del el sujeto (Saiz, I, 1998)
- *Ubicación Espacial Matemática*: Se caracteriza en la relación dialéctica *conocimientos-habilidades del Pensamiento Geométrico*, considerando, la transferencia entre los conocimientos (símbolos, definiciones y propiedades) y la ubicación espacial de objetos (gráficos) en el *espacio modelado* (Sistema coordenado bidimensional o tridimensional).
- *Ubicación y Reubicación Espacial Matemática*: En éste nivel, los objetos tridimensionales deben ser modelados, ubicados e interpretados antes y después de transformaciones geométricas (traslaciones, rotaciones y reflexiones) y/o antes y después de efectuar transformaciones de coordenadas.

4. Implementación de instrumentos semióticos para el desarrollo de la HUEM

Coincidimos con Godino y Flores (1998) respecto a que "un recurso didáctico, es una *situación didáctica integral* ... que en la praxis, no debe desplazar a la expresión matemática". También estamos de acuerdo con Velásquez, B. et al (2001), quien afirma que las *situaciones didácticas* que se estructuran para promover el desarrollo de la habilidad de comprender, *visualizar* y comunicar, constituyen una forma de integrar las orientaciones didácticas de los diversos Materiales de Apoyo oficialmente establecidos. Por tanto, se concibe la demanda de desarrollar e implementar *instrumentos semióticos* en el PEA de la Geometría, para el desarrollo de la Habilidad de Transferencia entre los registros de Representación de los conceptos. En la actualidad, los gráficos especializados y la Visualización Científica son un soporte para la investigación en el desarrollo de la Ciencia y la Tecnología. Por lo que la investigación basada en superordenador, es urgente ante las complejas demandas de la globalización, la competitividad e internacionalización de los mercados, el desarrollo vertiginoso de las tecnologías de la comunicación y la abrumadora generación de conocimientos.

Para la Validación Didáctica, se enfrentó al alumno en clase ante la demanda de aplicar la Transferencia entre el Status Objeto y el Status Herramienta en el TRM, por ejemplo:

I. Se pidió modelar matemáticamente al diseño de *dos ductos* que descansan sobre una superficie plana (Fig.1), tales que uno tiene el doble del diámetro del otro, con tareas:

Tarea 1: Representar y Ubicar "de manera adecuada" a los objetos tridimensionales en el sistema coordenado tridimensional. (3D/2D en la hoja de la libreta o en el pizarrón) (Fig.2)
Tarea 2: Identificar la Ecuación algebraica de cada cilindro, en función de la elección del plano coordenado al que son tangentes. (Transferencia hacia el Registro Algebraico)
Tarea 3: Parametrizar la curva de intersección y obtener el gráfico de la Curva de Intersección, mediante el uso de Tecnología (Matemática, Derive, Maple o el diseño de algún graficador programado por los mismos estudiantes). (Fig.3) Ver figuras en Anexo.

II. Se aplicó la estrategia de Transferencia entre el *registro simbólico* propio a un software y el *registro geométrico (Fig. 4)* y un cuestionario a un grupo de 25 alumnos de Cálculo Vectorial, el cual, ya cursó Cálculo Diferencial e integral de una variable y cálculo con Geometría Analítica en el Plano y en el Espacio con los siguientes resultados:

Respuestas de 25 alumnos de Cálculo Vectorial:
1. ¿EN DÓNDE ESTÁ EL ORIGEN?
44 % en la esquina del cero, 10% adentro de la caja, 5% no se, 30% intentó pintarlo
2. ¿EN QUÉ OCTANTE ESTÁ ESTA LA GRÁFICA DE LA CURVA EN LA Fig. 2?
24% no se, hay dos ceros, 44% en el primer octante, 32% en varios
3. ¿LA CURVA ESTÁ ARRIBA DEL PLANO XY?
24% no se ve el plano xy, no están marcados los ejes coordenados, 44% si, 32% no
4. ¿CUÁL ES LA ORIENTACIÓN POSITIVA DE LA TRAYECTORIA? 48% "anti-horario"
5. ¿EN DÓNDE ESTÁ EL PIE DEL RADIOVECTOR QUE LA GENERA?
76% en el origen, 24 % en la esquina del cero

Conclusiones

De realizaciones didácticas análogas, aplicadas a grupos de Matemáticas III y Cálculo Vectorial se constató que: La deficiente Habilidad de Transferencia desde y hacia el registro geométrico de los conceptos para resolver problemas de libros, laboratorios o exámenes, se refleja en la dificultad para *traduci*r, mediante el lenguaje científico y coloquial, el registro numérico, el registro algebraico y el registro geométrico, provocando un aprendizaje defectuoso que obstaculiza el aprendizaje significativo.

Se concluye que cuando el estudiante, enfrenta el problema de "ubicar adecuadamente las superficies" para encontrar la curva de intersección, para aplicar Teoremas de Cálculo Vectorial o para definir la dirección que tendría una partícula en un punto fijo o móvil sobre una curva o una superficie, que a su vez está afectada por un campo vectorial, *es esencial la habilidad de ubicación espacial matemática* (del punto, curva o superficie) en la habilidad de reubicación espacial del vector cuyo pie está en dicho punto, para saber si la dirección y sentido de dicha partícula es hacia arriba-abajo, a la izquierda-derecha y/o al frente- atrás de un plano coordenado o un objeto geométrico.

Sumado a la habilidad de estructuración de conceptos elementales y nociones espaciales iniciales, es necesario que en el estudiante se desarrolle o incluso se formen las siguientes habilidades, la habilidad de ubicación espacial física de los objetos, la habilidad de representar objetos en una hoja plana y la habilidad de ubicación espacial en el Plano coordenado, para que en él, se desarrolle (o forme) la habilidad de ubicación espacial en el sistema coordenado tridimensional, como habilidad esencial de la Visualización Matemática Tridimensional, requerida en la solución de problemas de matemáticas de nivel superior y del ejercicio profesional.

Referencias Bibliográficas

Acuña, C. (2001). Concepciones en graficación, el orden entre coordenadas de los puntos del plano artesiano: *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4*(3), 203-217.

De Guzmán, O. (1998). Visualización Matemática. *Universidad Computense de Madrid, España.*[En Línea] Disponible en: http://www.oli.org.co/oeivirt/edumat.htm

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

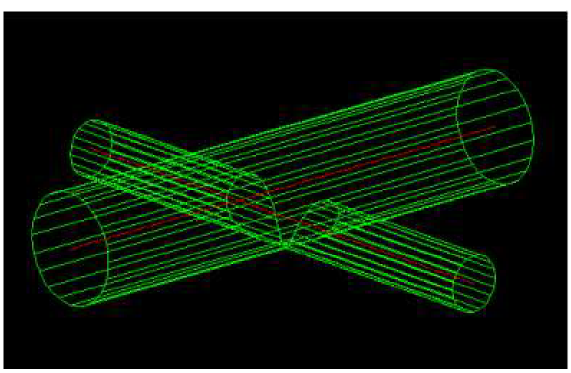
Fuentes, H. (2000). Didáctica de la Educación Superior y Dinámica del PDE de la Educación Superior. *Publicación del Centro de estudios "Manuel F Gran" Universidad de Oriente, Santiago, Cuba.*

Godino, J. D. y Flores, P. (1998). Papeles instrumentales y semióticos de los recursos manipulativos en el estudio de las matemáticas. *Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada*; [En Línea] Disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino/

Saiz, I. (1998). Ubicación espacial en los primeros años de escolaridad: *Educación Matemática 10*(2). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

ANEXO

Fig. 1



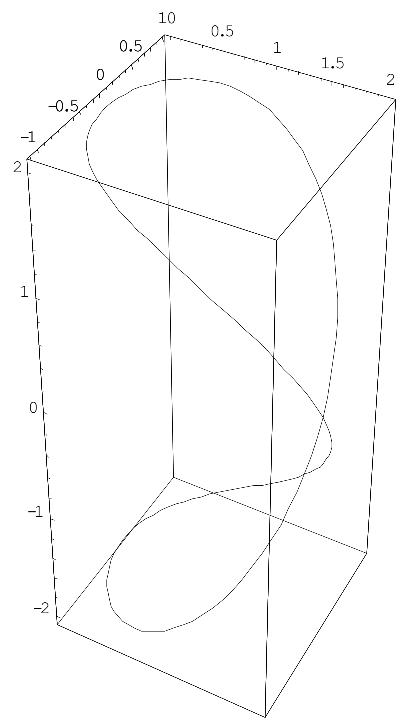
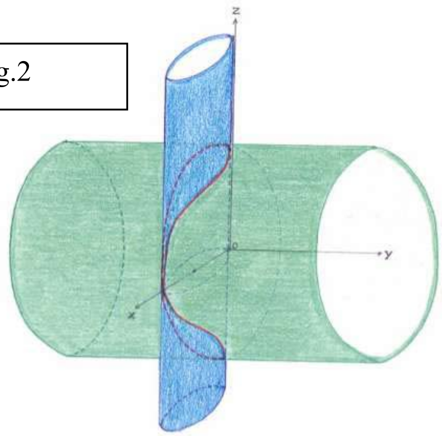


Fig. 3

Fig.2



$S_1 : x^2 + z^2 = 4$ cilindro circular (horizontal).

$S_2 : (x-1)^2 + y^2 = 1$ cilindro circular (vertical).

$z = 2 \cos t$

de $S_1 \quad x^2 + z^2 = 4 \qquad r = 2,\ x = 2 \operatorname{sen} t \qquad t \in [0; \pi]$

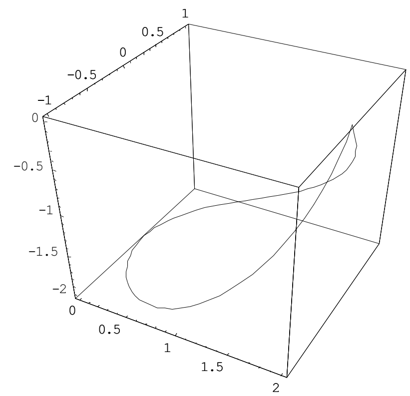
de $S_2 : (x-1)^2 + y^2 = 1 \qquad y = \pm\sqrt{2x - x^2}$

$x^2 - 2x + y^2 = 0 \qquad y = \pm\sqrt{4 \operatorname{sen} t - 4 \operatorname{sen}^2 t}$

$\therefore R(t) = (2 \operatorname{sen} t)i + (2\sqrt{\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^2 t})j + (2 \cos t)k$

ó $R(t) = (2 \operatorname{sen} t)i - (2\sqrt{\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^2 t})j + (2 \cos t)k$

Fig. 4



Convención Didáctica sobre la Demostración Geométrica

Efrén Marmolejo y María del Carmen Solano
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
México
Efrenmarmolejo@yahoo.com
Pensamiento Geométrico – Nivel Básico

Resumen

Presentamos en este artículo cuales son las condiciones que guarda la demostración geométrica en la escuela secundaria. Se comienza por presentar lo que las normas oficiales nacionales e internacionales nos indican al respecto. Mediante una exploración de campo se determina como es el trabajo en el aula en contexto escolar. Se analizan las diferentes corrientes que en matemática educativa sobresalen al respecto. Finalmente se discute como es que la demostración en contexto escolar no se aproxima a la norma oficial; y como el estudiante si acaso llega a un nivel de explicación en la que emplea propiedades geométricas que no necesariamente son verdaderas. Planteándose la necesidad de establecer una convención didáctica de la demostración geométrica.

I. Introducción

En la práctica docente muchos maestros observamos, respecto a los estudiantes de nuevo ingreso al nivel medio superior, que no tienen herramientas para enfrentarse a situaciones como las de argumentar, conjeturar, deducir o demostrar, pues todas sus herramientas mentales han sido desarrolladas para otro tipo de problemas como el cálculo, la construcción y el uso de algoritmos. También, que la evaluación hecha por PISA en el año 2001, en la que participo México, nuestros jóvenes de 15 años, quedaron en el lugar 31° de 32 países participantes. Es preocupante que, en alumnos de maestría, se dificulte la resolución de problemas geométricos que impliquen una demostración.

Por todo lo anterior, nos dimos a la tarea de investigar como vive la demostración geométrica en la escuela mexicana, enfocándonos al nivel de secundaria, siendo ahí donde oficialmente se da el encuentro del estudiante con el razonamiento deductivo y la demostración.

II.- Las normas oficiales

El Plan y Programas de estudio, de nivel secundaria, proponen actividades para que los alumnos utilicen el razonamiento deductivo. Lo que implica el manejo de ciertas reglas lógicas que no se abordan en ningún grado de educación secundaria..

Así mismo, en el Libro del Maestro de Matemáticas, se enfatiza lo siguiente: " Es importante no demostrar teoremas o resultados aislados, sino proponer actividades que permitan a los alumnos utilizar el razonamiento deductivo para establecer cadenas de teoremas, al principio pequeñas y extraídas de una misma situación, después un poco más largas y que vinculen situaciones diferentes. Los alumnos deberán aprender en forma paulatina a distinguir lo que se ha probado de aquello que se ha aceptado sin demostración y a redactar sus demostraciones.

En resumen resolver un problema de geometría o hacer una demostración pasa por varias fases: la comprensión del problema, investigación y búsqueda de la solución, la redacción de la solución."

Por su parte la Nacional Council of Teachers of Mathematics (NCTM) en 1993 publica que el estudiante estándar de secundaria podrá aplicar el razonamiento deductivo, construirá y evaluará conjeturas matemáticas y argumentos...."las conjeturas y la demostración de su validez lógica es la esencia del acto creativo de hacer matemáticas".

El proyecto PISA [1] define la formación matemática como: la capacidad del individuo, a la hora de desenvolverse en el mundo, para identificar, comprender, establecer y emitir juicios con fundamento acerca del papel que juegan las matemáticas como elemento necesario para la vida actual y futura de este individuo como ciudadano constructivo, comprometido y capaz de razonar. Los estándares de matemáticas tienen tres aspectos que deben estar presentes en la actividad matemática: planteamiento y resolución de problemas; razonamiento matemático (formulación, argumentación, demostración); comunicación matemática; consolidación de la manera de pensar (coherente, clara y precisa). Por otra parte, considera la existencia de varias destrezas matemáticas que deben ser relevantes y pertinentes en todos los niveles de educación, (Slisko, 2003). En total son ocho destrezas, y para esta investigación, nos interesa en particular la "Destreza de argumentación matemática", que consiste en:

- Saber que son las demostraciones matemáticas y en que difieren de los otros tipos de razonamiento matemático.
- Seguir y evaluar las cadenas de los diferentes tipos de razonamientos matemáticos.
- Tener un cierto sentido de la heurística ("qué puede – o no – ocurrir, y por qué")
- Crear razonamientos matemáticos.

Como hemos analizado, tanto las normas oficiales nacionales e internacionales indican que un alumno de nivel secundaria ha de desarrollar habilidades para llevar a cabo la demostración de propiedades geométricas.

III. El trabajo en el aula

Se realizó una investigación de campo, para determinar como estas disposiciones oficiales se llevaban a cabo en el aula. Se aplicaron instrumentos para explorar como los alumnos de

[1] PISA (acrónimo derivado del titulo del proyecto en inglés: Programm for International Student Assesment, Programa para la evaluación internacional de estudiantes. Es auspiciado por la UNESCO y la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). Es la evaluación internacional estandarizada, desarrollada en conjunto por los países participantes y administrada a estudiantes de 15 años que se encuentran actualmente en los sistemas educativos.

tercero de secundaria demuestran, argumentan o explican sobre las soluciones de problemas geométricos. Y a los maestros para determinar acerca de su concepción sobre los teoremas y su demostración. En particular, se efectuaron entrevistas clínicas a diferentes alumnos y maestros. Para seleccionar a los alumnos que fueron entrevistados, primero se aplicó el instrumento a todo un grupo, el cual estuvo dividido en equipos, con un máximo de cuatro integrantes. De acuerdo a su desempeño se seleccionaron 3 estudiantes únicamente. Los resultados obtenidos en los alumnos fueron:

- No dominan las propiedades básicas de ángulos, triángulos, cuadriláteros y circunferencia, si acaso utilizan propiedades de las que no están seguros que sean verdaderas.
- Pocos estudiantes conocen las propiedades, pero no saben emplearlas.
- No se observa secuencia lógica en sus razonamientos.
- No tienen estrategias de demostración.
- Fundamentan sus afirmaciones a partir de explicaciones de bases intuitivas.
- No utilizan símbolos matemáticos, predominando el lenguaje común.
- En cuanto a los maestros se encontró:
- Si por su formación académica consideran importante hacer una demostración, entonces los profesores la explican a sus alumnos.
- Los maestros explican los teoremas y sus demostraciones en el pizarrón, los alumnos son pasivos.

Sobre la base de estos resultados, se constata que los alumnos desconocen las propiedades geométricas que se exploraron, se pudiera ubicar el nivel de conocimiento de acuerdo al modelo de Van Hiele en el nivel 1 y en casos excepcionales hasta el nivel 2. Generalmente utilizan la explicación, entendida ésta como un intento personal para auto convencerse de la validez de una proposición. Además, se puede afirmar que los alumnos no manejan el concepto de demostración tal y como lo aproximan las normas oficiales, si acaso llegan a dar una explicación basada en conocimientos intuitivos.

IV. Diferentes perspectivas de la demostración geométrica en Didáctica de las Matemáticas

La demostración es una de las herramientas más potentes de las matemáticas. "Parte de la educación matemática consiste en que los estudiantes aprendan a demostrar o al menos ver la necesidad de ello", Alsina (1997). Ningún resultado es aceptado en el cuerpo de las matemáticas hasta que ha sido demostrado deductivamente a partir de un conjunto explicito de axiomas. Durante generaciones, en la geometría euclidiana, la enseñanza de la demostración deductiva ha sido el objetivo principal [2].

---

[2] En la escuela secundaria, la enseñanza de la geometría, comprende básicamente la obra magistral de los Elementos de Euclides, sin embargo esta no apareció en forma deductiva, hicieron falta 300 años, de exploraciones, argumentos vagos e incluso incorrectos, antes de que se plasmara en los Elementos. Esta estructura que intenta ser estrictamente lógica, se apoya demasiado sobre argumentos intuitivos, definiciones

Uno de los trabajos mas sobresalientes en el estudio de la geometría es el modelo de los esposos Van Hiele, el cual surgió a raíz de los problemas cotidianos que se presentan en el aula. Es descriptivo porque intenta explicar como razonan los estudiantes (niveles de razonamiento) y prescriptivo porque da unas pautas a seguir en la organización de la enseñanza (fases de aprendizaje).Las propiedades características de este modelo son: su secuencialidad, no es posible alterar el orden de la adquisición de los niveles de razonamiento; cada nivel tiene un lenguaje propio; hay períodos donde aparecen razonamientos de dos niveles consecutivos, el nivel de razonamiento es local o sea que si un individuo razona a cierto nivel en un concepto, es posible que razone a otros niveles en otro concepto, la adquisición de los sucesivos niveles no es un aspecto biológico, pues interviene en gran medida la instrucción recibida y la experiencia personal. No existe una edad a la cual se alcancen cada uno de los sucesivos niveles, Flores, C. y Toledo, E. (2001).

Balacheff, N. (1988), considera que la interacción social del individuo tiene una importancia relevante, lo cual lleva a los alumnos a realizar discusiones para convencerse unos a otros de los argumentos de cada uno. Esta interacción social resulta ser un instrumento potente que sirve para favorecer los procesos de devolución a los alumnos de la responsabilidad matemática sobre sus actividades y producciones, al tiempo de favorecer la aparición de procesos de demostración en ellos. Además, hay que considerar no solo el ámbito social, sino a los alumnos en relación con el contexto en general. La argumentación no la considera un camino directo hacia la demostración ya que tiene el objetivo de obtener el acuerdo de un compañero, convirtiéndose en un obstáculo epistemológico de la demostración. A diferencia de la demostración que busca la validez a través de la descontextualización del discurso, la desaparición del actor y del tiempo.

Duval, (1999), ha visto que para los alumnos, y especialmente al inicio de su escuela, las diferencias que perciben entre argumentar y demostrar no son muchas, de hecho son casi sinónimos. Aclara que, la demostración es un razonamiento válido. La argumentación no tiene vínculos de validez, sino de pertinencia, es decir, la demostración busca la validez de un enunciado y la argumentación su pertinencia. El desarrollo de la argumentación incluso en sus formas más elaboradas no abre una vía de acceso a la demostración. Es necesario que el alumno utilice un lenguaje muy específico como el de la lógica y no únicamente un lenguaje natural

Fischbein, citado por Mariotti, (1998) afirma que en la matemática y en la ciencia en general, existen dos tipos de conocimientos, aquellos que son auto evidentes y los que están basados en una serie de pasos y que proporcionan una prueba indirecta. A los primeros se les denomina intuitivos a los segundos lógicos o lógicamente basados. Un conocimiento intuitivo es auto evidente, se acepta sin una necesidad de validación; coercitivo, se impone con un carácter de verdad obligatoria; puede ser representado globalmente; tienen un carácter de necesaria certidumbre intrínseca, que no requiere de soportes externos para apoyarse, pues de hecho tiene la experiencia del individuo; tiende a llevarse mas allá de la información dada, mas allá del soporte empírico.

---

injustificadas y demostraciones inadecuadas como comprendieron los matemáticos del siglo XIX. (Kline, 1976, páginas 46 y 177)

La aceptación intuitiva es parecida a la "fe", Fischbein, se refiere al grado de aceptación directa y subjetiva de la relación correspondiente en cuanto a lo intrínsecamente necesario. Esta aceptación esta basada en convicciones, las cuales pueden ser autoritarias (si el profesor o un libro lo dice), formales (cuando se basan en una prueba formal), o intuitivas (se basan en la evidencia). Por sus reglas lógicas y deductivas la demostración queda fuera del flujo fundamental del comportamiento del adolescente. El pensamiento analítico, el basado en la lógica, tiene como característica, su claridad, pero en la práctica carece de algo esencial: su inmediatez. En situaciones prácticas se necesitan validaciones globales y rápidas. Los teoremas y sus demostraciones serán aceptados por el alumno cuando se de la aceptación intuitiva de los mismos.

Por su parte Boero (1999), propone el uso del concepto de unidades cognitivas de los teoremas como una herramienta para predecir y analizar algunas dificultades de los alumnos, proporcionando un camino para abordar la enseñanza de la demostración. El concepto de unidad cognitiva de un teorema, esta basado precisamente en la continuidad existente entre la producción de una conjetura y la construcción posible de su prueba. Si esta unidad se rompe, como cuando se pide "demuestre que…", se pierde la continuidad y solo se recupera cuando existe una re-aprobación del enunciado a través de un ciclo completo: explorar, conjeturar, explorar y reorganizar una nueva demostración. Este ciclo básicamente se divide en dos fases: la producción de las conjeturas y la construcción de la prueba. Los resultados de los alumnos variarán enormemente de los producidos por los matemáticos. El maestro juega el papel de mediador en la formulación de enunciados, incluyendo todos los instrumentos efectivos para expresar y probar teoremas. El proceso de producción de conjeturas es determinante para introducir a los alumnos a la argumentación para la construcción de la demostración.

V. Necesidad de un replanteamiento de la demostración geométrica en el ámbito escolar.

No existe una concepción única e inmutable de la demostración, entonces no es posible esperar que, en la escuela, la demostración tenga una sola concepción. Larios (2003), utiliza el concepto de transposición didáctica, el cual tiene que ver con el trabajo de adaptación o transformación del saber en objeto de enseñanza, en función del lugar, del público, y de las finalidades didácticas que se persiguen. Al docente le toca la tarea de tomar el conocimiento matemático y adaptarlo o contextualizarlo al momento particular de su aula.

El concepto de demostración es uno de los conceptos matemáticos centrales en la matemática y por lo tanto se considera indispensable su enseñanza a los alumnos en los distintos niveles educativos. A pesar de esto es bien sabido que las diversas formas de pensamiento lógico no siempre son logradas satisfactoriamente en la escuela, e incluso en los niveles superiores, Crespo (2003).

Al revelar, lo que realmente se hace en la escuela secundaria, surge la necesidad de establecer una reconceptualización del significado de la demostración en contexto escolar. Encausar la argumentación con bases empíricas y científicas hacia la construcción de conjeturas; potenciando el paso de la conjetura a la prueba, dándose la veracidad de las conjeturas del consenso a la prueba, formando una Unidad Cognitiva resumida en las fases de: explicar, argumentar, conjeturar – demostrar. Durante la construcción de conocimientos, el estudiante está en una permanente búsqueda de explicaciones y argumentos que permitan la aceptación de "teorías", proposiciones y aproximaciones conceptuales constituidas en conjeturas, cuya práctica persistente, formará habilidades en el estudiante para comprender y manejar la extensión y limite de los conceptos matemáticos (propiedades), a utilizar la intuición y los procedimientos heurísticos en la creación de "razonamientos matemáticos". Siendo el campo semántico del estudiante el punto de partida para la enseñanza de un nuevo conocimiento, aceptando válido ejercer su intuición, admitiendo y promoviendo que éste pueda conjeturar ascendentemente, se estará más próximo a lograr que éste descubra la prueba.

La explicación y la argumentación como una forma de construcción conjeturas, por medio de procedimientos heurísticos, permiten la elaboración de enunciados, con no sólo argumentos de sentido común, sino también son argumentos matemáticos. El aprovechar como se hizo el proceso constructivo del enunciado auxilia en la exploración y búsqueda de las vías de la demostración. Podría ser que bastara con que los alumnos pudieran encadenar las propiedades geométricas aunque carecieran de un estricto rigor lógico. No es conveniente en la escuela secundaria mantener una conceptualización de la demostración a la manera de cómo lo hacen los matemáticos.

Como afirmamos antes, es necesario que en la comunidad de educadores matemáticos se convenga en una reconceptualización que de significado a la demostración en contexto escolar, con características como las arriba citadas, y que esta convención pueda incorporarse al sistema educativo. Lo cual coadyuvaría a mejorar la competencia de los estudiantes en cuanto a la formulación, argumentación y demostración matemática.

Referencias Bibliográficas

Alsina, C., Fortuny, J. y Pérez, R. (1997). Pensar geométricamente., en *¿Por qué geometría?* (pp.37-70), Síntesis. Madrid.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez les éleves de collége. Thése d´etat.* Université Joseph Fuourier, France.

Boero, P. (1999). Argumentación y Demostración. Una relación compleja, productiva e inevitable en las Matemáticas y la Educación Matemática. En *Preuve.*[En línea] Disponible en: http://www.lettredelapreuve.lt/Newsletter/990708Theme/990708ThemeES.html.

Crespo, C. (2003). *Las demostraciones como contenido matemático.* En CIMATE-UAG (Ed.). Memorias de la VII Escuela de Invierno y VII Seminario Nacional en Didáctica de las Matemáticas. (pp. 144-145), Chilpancingo, Gro.

Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del currículo. *Matemáticas y Educación*. (pp. 125-133). Graó, Barcelona.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* Iberoamerica.México.

Flores, C. & Toledo, E. (2001). *La Geometría En Un Taller Para Profesores de Educación Primaria* .PRONAP, SEP. , México.

Kline, M. (1976). *El fracaso de la Matemática Moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* Siglo XXI España

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutation. The Logic of Mathematical Discovery. C*ambridge University Press.

Larios, V. (2003). Si no demuestro… ¿enseño matemáticas? *Revista de Educación Matemática.* Vol. 15, Num. 2, Agosto del 2003. (pp. 163-176). Santillana XXI. México.

Lerman, S. (1987). *Investigations, where to now? Or problem-posing and the nature of mathematics*. University of Exter.

Mariotti, A. (1998). La intuición en la Prueba: reflexiones sobre los aportes de Fishbein. En *Preuve*. [En línea] Disponible En:http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/981112Theme/981112ThemeES.html

NCTM. (1993). *Curriculum y Evaluation. Standarts for School Mathematics*. USA

Slisko, J. (2003). Los conocimientos y destrezas para la vida según el proyecto PISA: ¿Cuáles son sus implicaciones para la enseñanza de las matemáticas y ciencias naturales? Curso corto. En CIMATE-UAG (Ed.) *VII Escuela de Invierno y VII Seminario Nacional en Didáctica de las Matemáticas*. (pp. 171), Chilpancingo, Gro.

Significados Personales de la Derivada en Estudiantes de Ingeniería

Albéniz A. Meléndez y Mario J. Arrieche
Universidad Rómulo Gallegos, Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Venezuela
albenizamq@yahoo.com, marrieche@ipmar.upel.edu.ve
Didáctica de la Matemática – Nivel Superior

Resumen

Esta investigación se centra en la caracterización de los significados personales de la derivada en estudiantes de Ingeniería y se desarrolla considerando diferentes dificultades que surgen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las derivadas. El marco teórico se fundamenta en la adopción del modelo semiótico-antropológico propuesto por Godino y Batanero (1994) y utilizado por Arrieche (2002), entre otros. Se establecen y estudian las tres facetas que deben ser consideradas en un proyecto de investigación en Didáctica de la Matemática: epistemológica, cognitiva e instruccional. Metodológicamente, se combinan enfoques cualitativos en las fases epistemológica e instruccional con esquemas cuantitativos en la fase cognitiva. Mediante el análisis semiótico se evalúan los resultados.

Introducción

La ingeniería y la matemática están estrechamente vinculadas debido a que los conocimientos matemáticos son algunas de las herramientas fundamentales conque los ingenieros analizan, evalúan y resuelven muchos de sus problemas o proyectos. Para los estudiantes de ingeniería la derivada constituye uno de los conceptos fundamentales a aprender y a aplicar, por sus aplicaciones para la evaluación del comportamiento de modelos matemáticos representativos de situaciones reales, como es el caso de análisis de rapidez de variación, rata de cambio, sensibilidad, optimización, análisis de curvas, etc. El propósito de esta investigación es determinar el grado de conocimiento sobre el manejo de las derivadas y sus aplicaciones que tienen los estudiantes de Ingeniería, específicamente los estudiantes Agronomía en la Universidad Rómulo Gallegos (Edo. Guárico-Venezuela).

Siguiendo el modelo semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de las matemáticas, propuesto por Godino y Batanero (1994, 1997), se toman en consideración las tres dimensiones básicas involucradas en un problema de investigación sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática: epistemológica, cognitiva e instruccional. Este estudio está inmerso en la línea de investigación: "Perspectiva del enfoque semiótico-antropológico para la investigación en Didáctica de la Matemática", registrada en la Coordinación General de Investigación de la UPEL-Maracay y liderizada por el Dr. Mario Arrieche.

I.- El problema

1.1.- Planteamiento del problema

Existe un bajo rendimiento y un alto índice de repitencia y deserción de los estudiantes de cálculo en el nivel universitario, en particular y según la experiencia del investigador durante más de veinte años de ejercicio de la docencia en la Universidad Rómulo Gallegos, en San Juan de los Morros, Estado Guárico, Venezuela. Los ingenieros en proceso de formación deben recibir una instrucción en Matemática que les permita identificar, interpretar, modelar y resolver situaciones relacionadas con su ejercicio profesional. La derivada es una de las herramientas matemáticas de mayor utilidad para los Ingenieros y otros profesionales, en virtud de sus múltiples aplicaciones: análisis de rapidez de variación, optimización, esquema de variación, sensibilidad al cambio de alguna variable, etc., de algunos fenómenos o situaciones reales modelados matemáticamente. Esto ha inducido al investigador formularse la pregunta: ¿Cuáles son los significados personales que tienen los estudiantes de ingeniería, sobre las derivadas y sus aplicaciones? Luego surgen así otras interrogantes que, siguiendo a Godino (1999) y Arrieche (2002), pueden clasificarse en:

Epistemológicas: ¿Qué son las derivadas?, ¿Cuál es el origen de las derivadas?, ¿Cómo evolucionan las derivadas?, ¿Qué importancia tienen las derivadas para la matemática?

Cognitivas: ¿Cuál es el nivel de comprensión que tienen los estudiantes de Ingeniería Agronómica, sobre las derivadas y sus aplicaciones?, ¿Qué dificultades, errores y obstáculos presentan los estudiantes de ingeniería en el estudio de las derivadas?

Instruccionales: ¿Cómo se enseñan las derivadas a los estudiantes universitarios?, ¿Qué reformas curriculares será necesario hacer, para adaptar la enseñanza de las derivadas a los requerimientos reales de los profesionales modernos?, ¿Qué expectativas se plantea la institución con la enseñanza de las derivadas?, ¿Los libros de texto disponibles o más utilizados en la región, se adaptan a esos requerimientos?

1.2.- Objetivos de la investigación

1.2.1.- Objetivo general: *Determinar los significados personales con respecto a las derivadas en estudiantes de Ingeniería*. Mediante un análisis epistemológico, cognitivo e instruccional, con la perspectiva de mejorar los resultados del proceso de enseñanza y aprendizaje de este tópico matemático, en los estudiantes referidos.

1.2.2.- Objetivos específicos de la investigación:

1. Realizar un estudio epistemológico de las derivadas, considerando su origen, desarrollo y aplicaciones, e identificar los problemas obstáculos que dieron origen a esta noción.
2. Distinguiendo los aspectos global, declarado y logrado (Godino, 2003), caracterizar los significados personales de los estudiantes sobre las derivadas, tras un proceso de estudio.

2.- MARCO TEÓRICO

2.1.- Antecedentes

Siguiendo el esquema de la tesis doctoral de Arrieche (2002), se analizan los aspectos epistemológicos, cognitivos e instruccionales de las derivadas, mediante la revisión de diversas fuentes relacionadas con el tema objeto de investigación.

2.1.1.- Aspectos epistemológicos:

Grabiner (1983), señala que el desarrollo histórico de la derivada comienza por su utilización, luego su descubrimiento, desarrollo y definición. Newton y Leibnitz, en forma independiente inventaron el cálculo infinitesimal; sin embargo, algún conocimiento existía desde tiempos remotos. Las paradojas de Zenón sobre la imposibilidad del movimiento se relacionan con los conceptos de infinitésimos; el principio de exhausción de Eudoxo introduce operaciones que requieren límites de sumas infinitas y es usado por Arquímedes en la búsqueda de la cuadratura de la parábola (Ríbnikov, 1987). Fermat fue el primero en utilizar la derivada; mediante un ingenioso método puramente algebraico determinó máximos y mínimos de funciones polinómicas. Newton utilizó un lenguaje que dificultó el entendimiento de su descubrimiento; cantidades fluentes, fluxión y momentos eran equivalentes a funciones, derivadas y diferenciales. Leibnitz introdujo la notación $\frac{dy}{dx}$ para la derivada y utilizó el triángulo diferencial. La fase de desarrollo de la derivada corresponde a Euler y Lagrange; Cauchy formula la definición actual de la derivada como un límite.

2.1.2.- Aspectos cognitivos:

En algunos trabajos realizados por investigadores en enseñanza y aprendizaje de la matemática, se consideran obstáculos epistemológicos y conflictos semióticos presentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática y de la derivada en particular.
Inglada y Font (2003), analizan algunos conflictos semióticos relacionados con la notación $\Delta y/\Delta x$ así como el generado por *"La complejidad del paso de la derivada en un punto a la función derivada"* (p. 8) y presentan un detalle del entramado de funciones semióticas que debe activar el alumno para comprender la definición de derivada.

Hitt (2003), analiza las dificultades presentes en el aprendizaje del cálculo; respecto a la derivada, estudia la dificultad que representa para los estudiantes establecer la representación visual de los conceptos matemáticos y su resistencia a hacerlo.

2.1.3.- Aspectos Instruccionales:

Andreu y Riestra (2002) proponen como alternativas para la enseñanza desde la perspectiva histórico-epistemológica, con dos ejemplos de aplicaciones de la derivada que *reproducen* el esquema original, aplicando los métodos utilizados por Fermat y Kepler .
Azpilicueta y Ledesma (2002) proponen un cambio de paradigma en el proceso de enseñanza-aprendizaje, desde la óptica conductista hacia modelos de mayor participación por parte del alumno: Modelo Constructivista y por Investigación.

2.2.- Bases teóricas

La investigación en Didáctica de la Matemática articula las facetas epistemológicas, cognitivas e instruccionales puestas en juego durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática; el modelo semiótico-antropológico propuesto por Godino y Batanero (1994) es una de sus principales herramientas. Algunas nociones teóricas de este modelo son: la *práctica*, la *Institución*, los *Significados Institucional* y *Personal* de un objeto matemático, los *Sistemas de prácticas*, el *Objeto matemático* y la *Función semiótica*.

3.- MARCO METODOLÓGICO

3.1.- Tipo de investigación:

Se sigue un paradigma metodológico de tipo mixto, combinando esquemas cualitativos y cuantitativos, de acuerdo con la faceta de estudio y la parte del problema que se estudie.
La faceta epistemológica se lleva a cabo mediante un estudio documental y cualitativo, en la faceta cognitiva se utiliza un enfoque cuantitativo y experimental combinado con un enfoque cualitativo e interpretativo y en la faceta instruccional se estudian casos de experiencias fundamentadas en estrategias de enseñanza y el análisis semiótico (Godino y Arrieche, 2001).

3.2.- Población y muestra:

La población está constituida por los estudiantes del 1er. año de Ingeniería; la muestra la representan 71 estudiantes de Ingeniería Agronómica de la UNERG.

3.3.- Técnica de recolección de datos:

La recolección de datos se ha hecho mediante: a) un cuestionario escrito para evaluar los conocimientos sobre las derivadas. El esquema cuantitativo consiste en la *medición* mediante las respuestas de los alumnos y el esquema cualitativo consiste en la caracterización e interpretación de los errores cometidos por los estudiantes, que son reflejados en las respuestas; b) La observación no participante de nueve sesiones de clase, dedicadas a la enseñanza de la derivada y sus aplicaciones.

4.- Análisis epistemológico de la derivada

Se hace un análisis epistemológico sobre los factores que determinan el origen de las derivadas, los fundamentos teóricos mediante los cuales se definen y sus aplicaciones, para lo cual se realiza un estudio documental mediante la revisión y lectura de diversas fuentes bibliográficas que tratan el tema en cuestión, además del aporte complementario producto de nuestras propias reflexiones; tales fuentes consisten en tesis doctorales, trabajos de investigación y libros de texto especializados en historia de la matemática.

El estudio epistemológico tiene un importante significado para la enseñanza de la matemática porque, según las modernas concepciones didácticas, el uso de la historia en la enseñanza de la ciencia toma en cuenta una relación teórica entre la Ontogenia y la Filogenia. Según Kline

(1978) para apoderarse de un saber, el ser individual debe reproducir durante el proceso de aprendizaje y en forma muy sintética, las etapas por las que pasó el ser social a través de la historia de formación de ese conocimiento, incluyendo los obstáculos encontrados.

Durante más de 20 siglos, desde los griegos hasta Descartes, se trató de dar solución a cuatro problemas fundamentales para obtener: la velocidad y la aceleración instantánea de un cuerpo en movimiento, la tangente a una curva, el valor máximo o mínimo de una función, y longitudes de curvas, áreas, volúmenes, etc. Fermat, según Boyer (1999), expuso en uno de sus tratados un ingenioso procedimiento para determinar los máximos o mínimos de las curvas dadas por ecuaciones, que en notación moderna tienen la forma $y = x^n$; sin saberlo, aplicaba la noción de derivada. Isaac Barrow en su obra *Lectiones Geometricae*, expone un método para obtener tangentes a las curvas; "*En él utilizaba métodos geométricos,* «*liberados*»*, según decía,* «*de las abominables cargas del cálculo*»" (Kline, 1994, p.457). El método es similar al de Fermat, pero usa dos cantidades incrementales que en terminología actual son equivalentes a Δx y Δy.

Newton y Leibnitz son considerados como los creadores del cálculo infinitesimal, a pesar de la controversia planteada entre los matemáticos de la época en torno a la paternidad de esta invención; sin embargo, hoy día está claro que "*el descubrimiento de Newton precedió al de Leibniz en unos diez años, así como que Leibniz hizo sus descubrimientos independientemente de los de Newton. Por otra parte, a Leibniz le corresponde la paternidad de la publicación*…"(Boyer, 1999, p.502).

Newton plantea un método que generaliza la obtención del cambio relativo de una variable respecto a otra. Kline (1994) explica el método de la manera siguiente: el área bajo una curva está dada por la expresión: $z = ax^m$, con m entero o fraccionario, considera los incrementos infinitesimales, $z + oy = a(x + o)^m$. Por aplicación del teorema binomial, restar $(z + oy) - z$, dividir por o y despreciar los términos que aún contienen o, queda la expresión: $y = max^{m-1}$. Así demuestra Newton que "*el cambio relativo del área en cualquier x es el valor de y de la curva en ese valor x. Recíprocamente, si la curva es $y = max^{m-1}$, el área de la curva encerrada es $z = ax^m$.*" (Kline, 1994, pp.473 – 474).

En otro artículo Newton cambia la visión estática de los momentos de las variables, heredada de los indivisibles de Cavalieri; considera a las "*variables como generadas por el movimiento continuo de puntos, rectas y planos, más que como agregados estáticos de elementos infinitesimales*…" (Kline, 1994, p.478). Llama a x e y cantidades fluyentes, $\dot{x}$ la fluxión de x (similar para y), o: intervalo de tiempo infinitamente pequeño, $\dot{x}o$: momento de x (incremento infinitamente pequeño de x), plantea la relación entre $\dot{x}$ e $\dot{y}$ para la fluyente $y = x^n$ y concluye que $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

En un tercer artículo, Newton critica el desprecio de los términos alegando que en matemáticas, ni los errores más mínimos son despreciables, porque considera a "…*las cantidades matemáticas, en este punto, no como consistentes en pequeñas partes, sino como descritas por un movimiento continuo. Las líneas están descritas, y por tanto generadas, no por la yuxtaposición de partes, sino por el movimiento continuo de puntos*…" (Kline, 1994, p.480).

Explica Boyer (1999) que con esta nueva visión del cálculo, Newton evita tanto las cantidades infinitamente pequeñas como las cantidades fluentes y las reemplaza por una nueva teoría:

razones primeras y últimas. Para ello calculaba la razón primera de incrementos nacientes o la razón última de incrementos evanescentes, luego para obtener la razón primera y última, deja desvanecer la o. "*Newton está aquí realmente muy cerca del concepto de límite, aunque la objeción principal que se le podría hacer sería al uso impreciso de la palabra «desvanecerse»: ¿Es que existe realmente una razón entre incrementos que se han «desvanecido»?*" (Boyer, 1999, p.500)

5.- Análisis de resultados

La prueba fue presentada por 71 estudiantes y está constituida por cinco ítems, que involucran la definición de derivada, aplicación de las reglas de derivación, interpretación geométrica de la derivada. Para el análisis de los errores para caracterizar los significados personales se han establecido tres categorías de respuesta: correcta, parcialmente correcta e incorrecta; sobre esta última se analizan los errores cometidos por los estudiantes; en Meléndez (2005) se hace un estudio detallado de todos los ítems. Por cuestiones de espacio en este trabajo mostramos solo el ejemplo del análisis realizado al ítem 1.

Item 1.- Determine $f'(x)$ a $f(x) = (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8)\cdot Arsec(2x)$

Respuesta del Alumno 16: "$f'(x) = \left(12x^3 + 10^2 + 10\right)\cdot\left(\dfrac{2}{x\sqrt{x^2-1}}\right)$"

Errores: No aplica la fórmula de la derivada del producto de funciones y no deriva bien ninguno de las funciones propuestas.

La prueba en general fue difícil para los estudiantes, puesto que solo el 15% de los mismos lograron aprobarla.

6. Conclusiones

El análisis epistemológico realizado nos permitió encontrar que el desarrollo de la definición de derivada fue muy lento, y se vio limitado por la ausencia de una estructura matemática para justificar los conceptos casi intuitivos que se manejaron desde la antigüedad hasta la aparición de la geometría analítica, en primer lugar, y después la definición de límite. En relación al estudio cognitivo (caracterización de los significados personales) encontramos que los estudiantes cometieron los siguientes errores: operaciones algebraicas elementales, interpretación de las reglas de derivación, especialmente la de la regla de la cadena y errores conceptuales. Esto nos insta a afirmar que los profesores que enseñan las derivadas en la carrera en referencia, deben dedicar más tiempo a la resolución de ejercicios donde se aplique las reglas de derivación; además de implementar estrategias de enseñanza que le permita a sus alumnos un aprendizaje eficaz y de una forma más rápida.

Referencias Bibliográficas

Andreu, M. y Riestra, J. (2002). *Propuesta alternativa para la Enseñanza del Concepto de Derivada desde una perspectiva histórico-epistemológica de su desarrollo. Disponible:* http://www.dns.smm.org.mx/durango2002/final/node356.htm.

Arrieche, M. (2002). *La Teoría de Conjuntos en la Formación de Maestros. Facetas y factores condicionantes del estudio de una Teoría Matemática.* Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Azpilicueta, J y Ledesma A (2002). *La enseñanza y el aprendizaje del Análisis Matemático en carreras de Ingeniería a partir de situaciones problema. Un Modelo Conceptual Constructivista y por Investigación para la derivada y la integral definida.* Disponible: http://www.asee.org/international/INTERCH2002/829.pdf

Boyer, (1999). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques, 14*(3): 325-355.

Godino, J. y Batanero, C. (1997). A semiotic and antropological research in mathematics education. *Philosophy of Mathematic Education Journal.* 10. *Disponible*: http://www.ex.ac.uk/local/PErsnest/pome10/art.htm

Godino, J.D. (1999). Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de las matemáticas. *Actas del III Simposio de la SEIEM.* Valladolid.

Godino, J.D. y Arrieche, M. (2001). *El análisis semiótico como técnica para determinar significados.* Comunicación presentada en el V Simposio de la SEIEM, Grupo de Trabajo DMDC. Almería.

Godino, J.D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas en didáctica de las matemáticas.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible: http://www.ugr.es/local/jgodino/.

Grabiner, J.V. (1983). The Changing concept of change. The derivate from Fermat to Weiersstras. *Mathematics Magazine, 56*(4), 195-206.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *XI Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior.* Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia. Disponible: http://www.hemerodigital_unam.mx.

Inglada, N. y Font, V. (2003). *Significados Institucionales y Personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación Incremental.* XIX Jornadas del SI-IDM. URL: http://www.ugr.es/~/jgodino/siidm/cordova_2003/IngladaFont.pdf.

Kline, M. (1972). *El fracaso de las Matemáticas.* Madrid: Siglo XXI.

Kline, M. (1994). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días, I.* Madrid: Alianza.

Meléndez, A (2005). *Significados personales de la derivada en estudiantes de ingeniería.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Rómulo Gallegos. Guárico, Venezuela.

Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas.* Moscú: Mir.

Una Propuesta para la Enseñanza de la Geometría en la Educación Primaria

Hermes Nolasco

Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero

México

nolascohh@hotmail.com

Pensamiento Geométrico — Nivel Básico

Resumen

Esta propuesta, es el producto de un trabajo de investigación que tuvo como objetivo fundamental elaborar una propuesta de actualización didáctica, como resultado de la reflexión y la reconstrucción de la experiencia docente, que compete al trabajo de la geometría en la educación primaria. También el trabajo aporta información sobre las conceptualizaciones de los maestros sobre contenidos geométricos, la manera de cómo logran arribar a ellas y las habilidades que desarrollan en la búsqueda de estrategias para resolver problemas geométricos. La estrategia metodológica contempla el diseño de una serie de situaciones didácticas, concebidas principalmente sobre las fases de la apropiación del conocimiento matemático (Brousseau, 1994), que permitirán a los profesores, la reorganización y reconceptualización de contenidos geométricos en este nivel educativo.

Introducción

Esta propuesta, es el producto de un trabajo de investigación que me permitió obtener el Grado de Maestro en Ciencias por la Facultad de Matemáticas de Universidad Autónoma de Guerrero, tuvo como objetivo fundamental elaborar una propuesta de actualización didáctica, como producto de la reflexión y la reconstrucción de la experiencia docente, que compete al trabajo de la geometría en la educación primaria. También el trabajo aporta información sobre las conceptualizaciones de los maestros sobre contenidos geométricos, la manera de cómo logran arribar a ellas y las habilidades que desarrollan en la búsqueda de estrategias para resolver problemas geométricos.

Las concepciones de los maestros que se ponen en juego al resolver un problema geométrico, están determinadas por su familiarización con ciertos contenidos relacionados con el área y por los saberes que han ido conformando mediante la práctica docente y el contacto cotidiano con los niños.

Utilizamos aquí el término "concepción docente" en el sentido que lo define Thompson, quien sostiene que "es una estructura mental más general, que abarca creencias, significados, conceptos, reglas, imágenes mentales, gustos y preferencias". A pesar que el concepto creencia permite entender algunos comportamientos de los maestros no posibilita aproximaciones por ejemplo, a los saberes que se construyen en un contexto escolar

La identificación de ideas o concepciones de los docentes, nos permitió proponer cambios fundamentados a algunas actividades con el fin de movilizar dichas concepciones. En este sentido, se diseñó un curso actualización dirigido a profesores que les ayudará a entender el sentido de la metodología recomendada en los planes y programas de estudio de educación primaria y a conocer otros materiales de apoyo al trabajo docente. Para tal fin se propuso a la Coordinación Estatal del PRONAP (Programa Nacional de Actualización Permanente), un curso Estatal de Actualización con valor en la décima segunda etapa de Carrera Magisterial. Esta propuesta está enfocada a que los maestros tomen conciencia de la importancia de los contenidos de la asignatura de geometría en la educación primaria, como antecedente obligado para diseñar situaciones didácticas acordes con la naturaleza de los contenidos.

El tipo de investigación que se realizó, está enmarcada en el paradigma cualitativo y se basa en el análisis de los registros de observación y de las producciones de los maestros, con el fin de indagar los efectos producidos por las secuencias didácticas de geometría en sus concepciones sobre contenidos geométricos.

La propuesta se presenta como un conjunto de situaciones didácticas y se conciben principalmente, sobre la base de las fases de la apropiación del conocimiento matemático Brousseau, G. (1994) establece que las fases de adquisición del conocimiento matemático, son: la acción, Formulación, validación e institucionalización. Esta estrategia de instrumentación es atractiva para los profesores que están interesados en mejorar su práctica docente, y que sientan la necesidad de actualización fuera de los tiempos escolares.

Este trabajo tiene relevancia ya que pone al día los conocimientos de los maestros sobre las matemáticas, modificar en cierta medida el proceso de enseñanza de esta asignatura. Es razonable plantear la actualización como proceso permanente que compromete a los interesados a vivir algunos aprendizajes de manera similar a como lo viven los alumnos.

Antecedentes

Los antecedentes de esta investigación se encuentran en investigaciones realizadas en donde se identificaron algunas concepciones de los profesores en proceso de formación (Fuenlabrada, I; 1994),

Asimismo (Gálvez, 1985), realiza un estudio experimental con un grupo de alumnos de educación primaria denominado: "El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano", en donde se diseñaron una serie de situaciones didácticas, se experimentaron y luego se analizaron los datos obtenidos, con la pretensión de contribuir de este modo, a la comprensión de los procesos didácticos que tuvieron lugar durante la experimentación.

Otros estudios que han abordado esta problemática (Ávalos, 1997), el estudio deriva de la puesta en práctica de las actividades de la Unidad V de Geometría, del paquete didáctico: "La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria", con un grupo de maestros en servicio, con la modalidad de curso-taller coordinado por un asesor.

En las conclusiones derivadas del trabajo de investigación mencionado en el párrafo anterior se destaca que:

a) La geometría es un conjunto de configuraciones que los niños tienen que identificar.
b) La geometría es un conjunto de configuraciones que los niños tienen que saber trazar.

c) Las figuras y cuerpos geométricos se definen en términos de su posición relativa y se denominan en términos de su "regularidad".
d) La medición forma parte de los conocimientos geométricos.
e) El estudio de la geometría en la primaria se ha centrado en las figuras planas.

Las investigaciones antes mencionadas, proporcionan una primera aproximación al objeto de estudio en donde pretendemos indagar en que medida las creencias y concepciones influyen en la práctica de los profesores, y en que medida las situaciones planteadas permiten evolucionas dichas concepciones.

Desarrollo

Los resultados que se presentan a continuación corresponden a una situación didáctica instrumentada a un grupo de 30 profesores de quinto y sexto de educación primaria, pertenecientes a la zona escolar No. 31 ubicada en Acapulco, Guerrero, México.

Situación Didáctica. Mensajes Geométricos

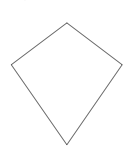
Se organizó el grupo en seis equipos de trabajo de 3 y 4 maestros, a cada equipo se le entregó una figura geométrica dibujada en una cartulina de 22 x 14 cm. También se les hace entrega de una hoja en donde se les pide que escriban un recado, sin incluir dibujos, en donde expliquen cómo es la figura, cuáles son sus propiedades que consideren necesarias para que el equipo receptor, situado en el extremo opuesto de la sala, pueda reproducir en base al mensaje una figura exactamente a la que se les entregó. Puesto que cada equipo recibió una figura, todo el grupo trabaja simultáneamente en la redacción de su mensaje.

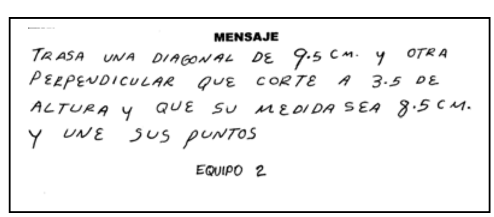
Como se puede observar, se trata de una situación de comunicación en la que se intenta provocar el tránsito de una comunicación escrita a una interpretación gráfica.

En un primer encuentro de los maestros con los mensajes enviados por los equipos, algunos maestros comentaban que los mensajes eran confusos lo que dificultaba su comprensión. En los equipos que hubo menos problemas para comprender los mensajes, la discusión se centró, en qué propiedades debería cumplir para definir a las figuras geométricas. En ocasiones en los equipos la discusión se convirtió en un "juego de nombres" con respecto a la conceptualización de las figuras geométricas.

En el desarrollo de la actividad podemos observar resultados interesantes por ejemplo: Un equipo define así, a un trapezoide, llamado papalote por los maestros (figura No. 1). En el momento de la confrontación, el equipo que recibió el mensaje, no reproduce la figura solicitada y justifican que no fue redactado correctamente el mensaje.

Figura No. 1



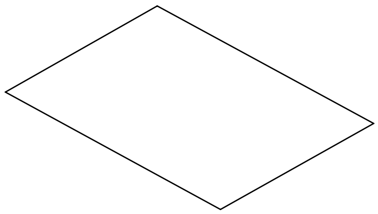

MENSAJE

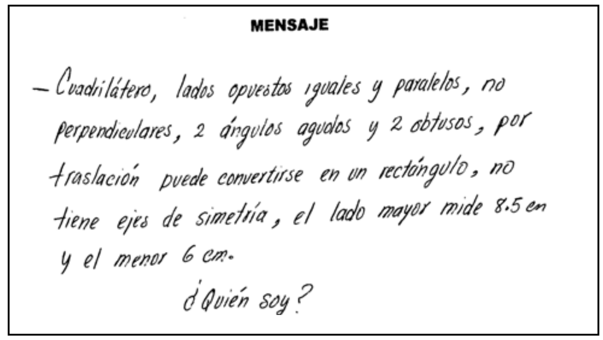
TRASA UNA DIAGONAL DE 9.5 CM. Y OTRA PERPENDICULAR QUE CORTE A 3.5 DE ALTURA Y QUE SU MEDIDA SEA 8.5 CM. Y UNE SUS PUNTOS

EQUIPO 2

Otro equipo que escribió un mensaje, menciona que si el romboide sufre una traslación puede convertirse en un rectángulo, lo que no puede ser posible, por que las figuras geométricas cuando son trasladadas o rotadas no cambian sus propiedades. (figura No. 2).

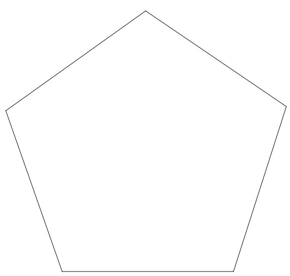
Figura No. 2

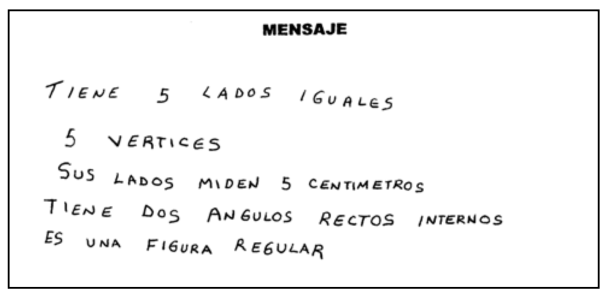




De esta forma los maestros describieron al pentágono regular.

Figura No. 3





Este mensaje se hace referencia a la igualdad de los lados del pentágono, pero no hace referencia de cómo son sus ángulos. Menciona también que tiene dos ángulos rectos, a ciencia cierta no se comprende a qué ángulos se están refiriendo, ya que este polígono no tiene ningún ángulo interno que mida 90º.

Resultados

En el contexto del taller, algunos maestros afirmaban que los polígonos regulares eran las figuras que tenían nombre; parecería que la regularidad estaba en función de una variable lingüística y no a las propiedades geométricas de las figuras. Parece ser que en este contexto, la regularidad en los cuadriláteros esta asociada también a que la figura tenga comportamientos geométricos regulares: congruencia de lados, congruencia entre ciertos ángulos interiores, o simplemente percepción de alguna simetría.

Cuando el cuadrilátero tiene comportamiento "regular" desde el punto de vista de los maestros, el cuadrilátero es bautizado, y se le asigna un nombre. Tal es el caso del "papalote", es un trapezoide que tiene la característica de dos pares de lados consecutivos congruentes.

Siguiendo más de cerca las participaciones de los maestros en la elaboración de los mensajes y en la confrontación, se constató que los profesores desconocen las propiedades de las figuras geométricas, por tanto tienen dificultad para describirlas, que se manifiesta en la pobreza conceptual de sus redacciones.

La situación didáctica planteada a los profesores nos aporta información y fundamenta sobre las concepciones de los profesores sobre contenidos geométricos, la manera de cómo arriban a ellas y las habilidades que ponen en acción en la búsqueda de estrategias para resolver problemas geométricos.

Conclusiones

1. El estudio experimental realizado permitió comprobar que cuando los maestros se enfrentan a problemas de geometría, en primera instancia, recurren a sus conocimientos previos y a las concepciones sobre contenidos geométricos cuando intentaban resolver un problema. Además, manifiestan la pobreza conceptual que se tiene respecto a los temas de geometría.

2. Los profesores consideran que el estudio de la geometría ha sido un espacio para el reconocimiento de figuras y cuerpos geométricos, cuyas dimensiones son motivo de cálculos numéricos. De modo que, en cuando se proponen situaciones que exigen reconocimiento de las características geométricas de las figuras, los maestros las obvian y buscan, una solución aritmética.

3. Los docentes destacan la importancia de considerar "regulares" a las figuras que tienen un nombre, y que visualmente presentaban una regularidad, como la igualdad de algunos de sus lados o ángulos, alguna simetría.

4. Los maestros presentan dificultades para utilizar e interpretar el vocabulario geométrico cuando se anuncian propiedades o relaciones, especialmente cuando hay que describir un concepto geométrico. Por eso, en el diseño de tareas de introducción de conceptos, se debe procurar representarlos en diversos contextos (gráfico, verbal, algebraico, icónico).

5. Esta experimentación, ha hecho evidente la necesidad de actualizar a los maestros en servicio, por lo que se destaca la necesidad de seguir fortaleciendo esta línea de investigación de la teoría de las situaciones didácticas y continuar con el estudio en este campo de la investigación básica de los procesos de actualización y formación docente.

Referencias Bibliográficas

Ávalos, A. (1997). *Estudio de las transformaciones que sufren las concepciones de los maestros sobre contenidos geométricos en un curso de actualización*. Tesis de maestría no publicada. DIE-CINVESTAV-IPN, México.

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra & I. Saiz (comps). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp.65-94). Argentina: Paidós Educador.

Fuenlabrada, I. (1990). *Las situaciones didácticas* (documento interno). DIE-CINVESTAV-IPN, México.

Fuenlabrada, I. (1994). *La geometría en la escuela primaria*. Programa de Actualización del Magisterio. (Audiocinta) Matemáticas 8. México: SEP

Gálvez, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria*. Tesis de doctorado no publicada. DIE-CINVESTAV-IPN, México.

Uso del Conocimiento Estadístico en Egresados de Psicología Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional

Arcelia Palacios, Cuauhtémoc G. Pérez, Yanelly Arellano, Nancy Hernández, Sonia Villaseñor y Angelina González
Universidad Pedagógica Nacional
México
palacios_ac@yahoo.com.mx, cgperez@upn.mx
Probabilidad, Estadística y Combinatoria – Nivel Superior

Resumen

En este trabajo se describe el uso que hacen del conocimiento estadístico egresados de Psicología Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional cuando realizan su trabajo de tesis o tesina para obtener el grado. Se llevó a cabo la revisión de los 221 trabajos realizados de 1995 a 2004. En los resultados se observa que, en general, los tesistas utilizaron los análisis estadísticos cuando su investigación lo requirió; no obstante, en un alto porcentaje la prueba estadística elegida fue inadecuada. Finalmente se concluye la necesidad de discutir la pertinencia de los contenidos, estrategias y procedimientos de instrucción y evaluación de los cursos de estadística, así mismo la reflexión acerca de cuántos cursos debe haber, en qué momento de la formación de los estudiantes.

Revisión teórica

En los últimos años la estadística se ha incorporado en la enseñanza básica, media y superior con el propósito de ser una herramienta útil para los estudiantes promoviendo su desarrollo personal, de modo que sean capaces de manejar información, interpretar y predecir datos. En este sentido, la enseñanza de contenidos en relación con la estadística se incrementa en los planes curriculares de diversos países. Batanero (2001) menciona que el principal objetivo de enseñar estadística no es convertir a los futuros ciudadanos en estadísticos aficionados, sino que deben ser capaces de aplicar razonable y eficientemente la estadística para la resolución de problemas.

Batanero (2000) menciona que si la enseñanza de la estadística comienza en la educación universitaria será muy difícil para los estudiantes asimilar todos los contenidos y sólo se llegará a un aprendizaje memorístico, que no servirá para su aplicación en la vida profesional, en diversas investigaciones la autora menciona otras dificultades que presentan los alumnos cuando usan la estadística, como no entender el significado de un concepto (Batanero,1998), comprender e interpretar de modo incompleto o incorrecto gráficas y tablas (Batanero, Godino, Green, Holmes, y Vallecillos, 1994; Postigo y Pozo, 2000).

Al mismo tiempo que diversos autores manifiestan la importancia de la enseñanza de la estadística, se muestran las múltiples dificultades a las que se enfrentan los alumnos para aprenderla, sobre todo las dificultades que tienen los alumnos universitarios cuando tratan de aplicar las herramientas estadísticas en sus disciplinas.

En un estudio realizado por Murtonen y Lehtinen (2003), se preguntó a estudiantes universitarios de educación y sociología acerca de lo que ellos consideraban la causa principal de sus dificultades en el aprendizaje de la estadística y los métodos cuantitativos, se encontró que los alumnos atribuyen sus dificultades principalmente a cinco razones: a) recibir una enseñanza superficial, b) no vincular la teoría con la práctica, c) no tener familiaridad con los conceptos y contenidos, d) no poder crear una imagen integral de la información para comprenderla realmente y e) la actitud negativa hacia estos contenidos.

Los autores mencionan que los alumnos mencionan estas causas probablemente porque sus maestros utilizan un idioma poco accesible para los estudiantes, el conocimiento previo de éstos no coincide con el nivel que el maestro supone y/o por el exceso de contenidos a revisar en uno o dos cursos durante su formación.

Otros autores consideran también la ausencia de conocimientos previos en los alumnos una de las causas que dificultan o impiden al alumno aprender estadística; Garfield (1995) menciona que los alumnos no pueden comprender conceptos como probabilidad y correlación si no cuentan con un razonamiento proporcional previo. Se ha encontrado también, que el conocimiento previo se correlaciona positivamente con la actitud hacia la estadística y dicha actitud se relaciona con el aprendizaje de la misma (Cerrito, 1999; Gil, 1999) esto es, si el alumno carece de conocimientos previos para la estadística, muy probablemente tendrá una actitud poco favorable hacia esta área y se espera que también tenga bajo nivel de aprendizaje estadístico.

Debe mencionarse, asimismo, las características de los profesores que atienden los cursos de estadística en el nivel superior, la mayor parte de las ocasiones son matemáticos o actuarios quienes no cuentan con una formación específica en didáctica de la estadística, muchos de ellos tampoco en estadística aplicada en la disciplina en la que se forman sus estudiantes (Gould, 2004; Sorto, 2004).

En síntesis, menciona Sorto (2004) se puede decir que en la enseñanza de la estadística es importante la formación de los profesores, en cuanto al contenido y la didáctica; el uso adecuado de diversos recursos como el ordenador y la red; el trabajo cooperativo, el diálogo y la discusión y la relación del conocimiento estadístico con el uso real que el alumno le dará en su vida profesional.

En México la importancia de la estadística ha sido considerada por los planes curriculares de diversas instituciones educativas de nivel superior. En la Universidad Pedagógica Nacional, en su sistema de enseñanza escolarizada, la estadística se imparte en cinco de las siete carreras que brinda esta institución. De manera específica, en la carrera de Psicología Educativa se imparte dos cursos, Estadística básica y Estadística aplicada a la Psicología Educativa; estos cursos se imparten en los dos primeros semestres de la licenciatura. Aún cuando los cursos se ubican en el inicio de la formación de los futuros psicólogos educativos, el objetivo es dotar a los alumnos del conocimiento y la capacidad para usar los procedimientos estadísticos en el desarrollo de su vida escolar y profesional. Éstos son, entonces, cursos de carácter introductorio insuficientes para lograr que el alumno aprenda a utilizar la estadística como una herramienta para enriquecer sus trabajos de investigación. Por ello la presente investigación se planteó el siguiente objetivo describir el uso del conocimiento estadístico en egresados de la Licenciatura en Psicología Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), Unidad Ajusco.

Metodología

Primera fase

Se hizo la revisión de las 221 tesis/tesina de los egresados de Psicología Educativa de la UPN; se tomó en cuenta las realizadas de 1995 a 2004; en esta primera revisión se separó las tesis que presentan algún tipo de análisis estadístico de las que no lo presentan.

Segunda fase

A partir de la primera revisión se encontró que el 72.9 % de las tesis revisadas presenta análisis estadísticos. Se realizó un análisis más detallado para determinar el cómo y qué hicieron los estudiantes que sí utilizaron alguna técnica o procedimiento de la estadística para calificar, analiza y representar los resultados de su trabajo.

Se diseñó un formato en el cual se sintetizó la información referente al objetivo del trabajo, la metodología empleada y la presentación de los resultados, además de disponer un espacio para anotar las observaciones relevantes en cuanto a la coherencia interna del uso de la estadística.

Tercera fase

En esta fase se realizó un análisis de las observaciones hechas en cada trabajo de tesis. Con ello se elaboró la siguiente serie de categorías, la cual representa las dificultades más frecuentes en los egresados: 1) elección incorrecta de la prueba estadística, 2) no interpretar datos; 3) error en la interpretación; 4) confusión en conceptos estadísticos; 5) error producto de un objetivo mal planteado; 6) uso excesivo de gráficas y tablas; 7) diseño inadecuado; 8) uso de instrumentos sin validación.

Resultados

En el presente apartado se describe cada una de las categorías encontradas y se ilustra con un ejemplo.

1. *Elección incorrecta de la prueba o de herramientas estadísticas,* el tesista elige una prueba o herramienta *estadística* que no le permite encontrar los resultados que planteaba en su o sus objetivos.

En un trabajo se pretendía conocer si después de haber aplicado un tratamiento en dos grupos, uno control y otro experimental, había diferencias significativas en el desempeño de los grupos, dado que las muestras de los grupos eran diferentes la autora debió aplicar, por una lado la prueba t para muestras independientes en dos ocasiones, antes del tratamiento para conocer si al inicio las muestras eran homogéneas y después del tratamiento para conocer si había diferencias entre muestras, también pudo haber aplicado una prueba t para muestras pareadas para conocer si hubo diferencias intra grupales antes y después del tratamiento. Sin embargo, sólo se presenta datos en tablas de frecuencia con las puntuaciones obtenidas.

2. *No interpretar dato*s, el sustentante presenta los resultados estadísticos, en tabla o gráfica, o bien los valores obtenidos en de una prueba estadística, posteriormente sólo hace una descripción de los datos, sin realizar su interpretación.

Tabla 1. Puntaje obtenido por escuela.

Escuela	Puntaje
Escuela 1	8.3
Escuela 2	8.9
Escuela 3	7.3

> "*como podemos observar con toda claridad, la escuela 1 tuvo un puntaje de 8.3, la escuela 2 obtuvo 8.9 y la escuela 3 obtuvo 7.3...*"

Las autoras pudieron haber utilizado estos datos para señalar que como ellas lo habían previsto, que en la muestra de la escuela con mejores condiciones ambientales (escuela 2) se obtuvo el mejor desempeño.

Con frecuencia se encontró ejemplos como el anterior, la reproducción en texto de los datos que se muestran en una tabla o gráfica, sin mencionar qué implicaciones tenían los datos encontrados para alcanzar o no el objetivo de su investigación.

3. *Error en la interpretación*, el tesista presenta algunas interpretaciones de los datos obtenidos, pero con errores causados por el desconocimiento del significado de algunos símbolos, del uso de la prueba, del significado de los mismos valores obtenidos, entre otros aspectos. En el caso que se ilustra es por el desconocimiento de las características de la prueba.

A partir de los siguientes datos: "Relación entre escuela-área 3 (razonamiento verbal), R= 359, p≤.019.", las autoras concluyen que "*...sí hay diferencias significativas entre la escuela 1 y la escuela 2 en cuanto al razonamiento verbal.*"

Las autoras de la tesis hacen la interpretación, sin embargo suponen que la prueba utilizada (correlación) sirve para encontrar diferencias significativas entre las dos escuelas en las cuales trabajaron; ellas aplicaron una prueba de correlación la cual sirve para determinar si existe o no relación entre el tipo de escuela y el área 3 (razonamiento verbal). La interpretación incorrecta se debe a la confusión del objetivo de la prueba (encontrar relación y no comparación), además utilizan ***R*** que significa regresión y no correlación.

4. *Confusión en conceptos estadísticos*, el tesista usa de manera indiscriminada un concepto y otro, por ejemplo nivel de confianza por probabilidad de error, asociación por correlación o validez por confiabilidad.

Las autoras aplican la prueba de correlación de Pearson entre los puntajes de tres instrumentos "*...con el objeto de valorar la confiabilidad de los instrumentos, en el sentido de que midan lo mismo, esto es* *motivación*." En este caso las autoras utilizan el concepto de confiabilidad para referirse a lo que en realidad es validez.

5. *Error producto de un objetivo mal planteado*, el tesista plantea objetivos poco claros que durante el trabajo cambian; de esta dificultad se deriva una metodología inadecuada y, por consecuencia, análisis de resultados inconsistentes.

El objetivo de una tesis fue: "*conocer si la participación en un programa de orientación educativa establece o no diferencias en cuanto a las prácticas, conocimientos y actitudes hacia algunas áreas de la sexualidad humana, en adolescentes de 1er año de bachillerato*."

En el trabajo no se específica a qué prácticas y conocimientos se refiere ni cuáles son "*algunas áreas de las sexualidad humana*". Estas imprecisiones conducen a la autora a presentar únicamente datos sobre una escala de actitudes hacia la "sexualidad".

6. *Uso excesivo de gráficas y tablas*, por considerar que la presentación de sus resultados será más clara, el tesista presenta los mismos datos en gráfica y en tabla, además los describe en forma el texto. Ver el ejemplo de la categoría 2.

En muchos trabajos se encontró, también, que utilizaron tablas y/o gráficas para presentar información poco relevante o innecesaria para el objetivo del estudio.

7. Diseño inadecuado, el tesista plantea una metodología inconsistente con el objetivo del trabajo; esto es, la selección y asignación de la(s) muestra(s), las técnicas, instrumentos o procedimientos, no son los adecuados para el trabajo.

El objetivo de un trabajo fue: "Entrenar a un grupo de niños de 6to grado de primaria en el uso de estrategias para mejorar la comprensión lectora de textos expositivos a través de dos modelos de instrucción: Instrucción Directa y Enseñanza Recíproca."

Hipótesis: a) "Los dos procedimientos de intervención producirán cambios significativos en la comprensión lectora." b) "El grupo que reciba enseñanza recíproca tendrá calificaciones más altas que el otro grupo."

Diseño

Grupo	Evaluación previa	Tratamiento	Evaluación final
Grupo 1	X	Enseñanza de la estrategia de la idea principal a través de instrucción directa.	X
Grupo 2	X	Enseñanza del uso de las tres macrorreglas con enseñanza directa.	X

Se pretendía conocer si el tratamiento (programa de enseñanza) producía diferencias significativas entre los dos grupos, así lo único que debió cambiarse en el tratamiento era la forma de enseñanza y no el tipo de estrategias. Con ese diseño no puede saberse si las diferencias se deben al tipo de enseñanza o al tipo de estrategias.

8. Uso de instrumentos sin validación, el tesista emplea instrumentos para la obtención de datos que, por el constructo que se mide y el alcance pretendido en la investigación, debieron validarse y confiabilizarse, así como establecer los criterios para calificarlos.

En otro trabajo se pretendía conocer los avances de un grupo de niños después de haber recibido entrenamiento en estrategias para la comprensión de textos. Para medir este constructo se utilizaron dos lecturas, una para la evaluación inicial y otra para la evaluación final. La homogeneidad de las lecturas ha sido estadísticamente validada y confiabilizada, es decir los dos textos tienen el mismo grado de dificultad para la comprensión lectora. Las autoras elaboraron un cuestionario de 7 preguntas (con un valor máximo de 3 puntos cada una) que se derivaron de sendos textos, dichos cuestionarios fueron validados vía jueces. Dado que el constructo que se mide es complejo (la comprensión lectora), lo mejor hubiera sido validarlos y confiabilizarlos vía estadística.

Conclusiones

El uso del conocimiento estadístico en una situación práctica y de aplicación profesional (la elaboración de la tesis) resulta ser complicado para los egresados de Psicología Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Ajusco. Encontramos que en buena parte de las tesis el uso de la estadística significó en sí mismo un problema, que aleja, en mucho, al tesista de razonar estadísticamente.

Si bien el análisis de la coherencia interna de los trabajos (consistencia entre objetivo, metodología, resultados y conclusiones) no nos permite conocer con precisión el tipo de razonamiento estadístico que los egresados utilizan cuando realizaron su tesis, sí es posible inferir que en algunos casos era elemental o casi nulo.

Pensamos que el uso incorrecto o inadecuado de conocimiento estadístico puede deberse a diversos aspectos, tal como la enseñanza desligada de un contexto real; en este caso los maestros que imparten estadística en Psicología Educativa son los mismos que la imparten en las otras licenciaturas de la universidad, así, resulta poco viable para ellos preparar clase para los alumnos en función de su carrera, dado que los objetivos de los cursos son muy similares. Otro factor que creemos importante es que los alumnos de Psicología cursan estadística en los dos primeros semestres, cuando aún no cuentan con conocimientos básicos de Psicología Educativa para relacionarlos con la estadística y su utilidad aplicada hacia esta área. Suponemos que el conocimiento de alumno no trasciende porque en los cursos posteriores a los de estadística se demanda el conocimiento de este contenido, pero no se apoya para continuar su construcción. Creemos conveniente que la estadística se enseñe a partir del tercer semestre, cuando los alumnos ya tienen un conocimiento psicológico para relacionarla. Asimismo es recomendable aplicarlo en los cursos de conocimiento procedimental en la licenciatura, los cuales se inician en ese semestre y se concluyen hasta el octavo. De este modo, la enseñanza se extendería a lo largo de la carrera, quizá en los dos últimos semestres se podría incluir como materia optativa. Otra sugerencia es que para su enseñanza se utilice lectura de datos estadísticos en revistas especializadas, periódicos y/o bases de datos reales, que permitan al alumno descubrir el uso real y cotidiano de este recurso en la disciplina. Asimismo, es necesario tener en cuenta los hallazgos de Murtonen y Lehtinen (2003), acerca de las causas que los universitarios atribuyen sus dificultades en el aprendizaje, entre otros, desvinculación entre la teoría y la práctica, no tener familiaridad con los conceptos estadísticos, no poder crear una representación integral de los problemas estadísticos ni matemáticos (Sorto, 2004) y tener una actitud negativa hacia estos cursos (Gil, 1999). Sería interesante realizar un estudio en esta universidad para conocer si los alumnos atribuyen sus dificultades a las causas mencionadas o si existen otras de manera que se cuente con información pertinente para mejorar la enseñanza de esta asignatura.

Referencias Bibliográficas

Batanero, C. (1998). Recursos para la educación estadística en Internet. *UNO 15*, 13-26.

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de tendencia central. *UNO 25*, 4-58.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. España: Grupo de Educación Estadística, Universidad de Granada.

Batanero, C., Godino, J., Green, D., Holmes, P., y Vallecillos, A. (1994). Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology 25*(4), 527-547.

Cerrito, P.B. (1999). Teaching statistical literacy. *College Teaching 47*, 9-14.

Garfield, J.B. (1995). How students learn statistics. *International Statistics Review 63*(1), 25-34.

Gil, J. (1999). Actitudes hacia la estadística. Incidencia de las variables sexo y formación previa. *Revista española de pedagogía 58*(214), 567-590.

Gould, R. (2004) *Preparing teachers to teach statistics*. Obtenido del sitio web del Departamento de Estadística, Universidad de Auckland: www.stat.auckland.ac.nz/iase/publications/11

Murtonen, M. y Lehtinen, E. (2003). Difficulties experienced by education and sociology students in quantitative methods courses. *Studies in Higher Education 28*(2), 171-185.

Postigo Y. y Pozo, I. (2000). Cuando una gráfica vale más que mil datos: la interpretación de gráficas por alumnos adolescentes. *Infancia y Aprendizaje 90*, 89-110.

Sorto, A. (2004). *Statistical knowledge for teaching*. Obtenido del sitio web del Departamento de Estadística, Universidad de Auckland: www.stat.auckland.ac.nz/iase/publications/11

Plan Estratégico para Mejorar la Eficiencia Terminal en Cursos de Matemáticas

Carlos Daniel Prado
ITESM, Campus Estado de México y Universidad Autónoma Metropolitana
México
cprado@itesm.mx
Resolución de Problemas – Nivel Superior

Resumen

Diferentes encuentros de Escuelas de Ingeniería han señalado al bajo índice de aprobación en los cursos de matemáticas, como uno de los factores que más inciden en el alto nivel de deserción en los primeros semestres y en la consecuente baja eficiencia terminal que tienen en sus licenciaturas. Derivado de ello, se ha planteado en estos foros la necesidad de implementar acciones que permitan incidir favorablemente en la disminución de estos problemas. Es en el marco de esta situación que el ITESM Campus Estado de México ha implantado en todas sus carreras de ingeniería un plan global que permita disminuir los efectos negativos de esta problemática. Se presenta el esquema general de un plan que sin disminuir el rigor académico, tiene como objetivo mejorar la efectividad del desempeño en los cursos de matemáticas.

Introducción

En diversos encuentros académicos llevados a cabo en facultades de ingeniería (Bañuelos, 2003; García, 2002; Palomo, 2003), se ha señalado que por años, universidades como la UNAM, IPN, UAM, UAEM, entre otras, han mantenido en sus cursos de matemáticas índices de aprobación que van del 15% al 40%. Se ha indicado asimismo que estos índices de reprobación son causa de una elevada deserción que se agudiza en los primeros semestres. Adicionalmente, el Centro de Investigaciones y Docencia Económica (CIDE) ha señalado que en la década de los 90´s la deserción estudiantil promedió el 50% y la ANUIES diagnosticó para los años alrededor del 2000, una eficiencia terminal a nivel nacional del 39%. Por esta razón, las conclusiones emanadas de diferentes reuniones académicas han ido orientadas a la necesidad de tomar acciones que atiendan de manera más efectiva esta problemática.

Entre los factores que más inciden en la baja eficiencia terminal se ha detectado que éstos se engloban en dos categorías (Prado, 2003):

- Problemas personales de los estudiantes
    - Falta de interés por el estudio.
    - Carencia de estrategias para el aprendizaje.
    - Problemas económicos.
- Problemas en los procesos institucionales
    - Didáctica obsoleta.

- Pobre relación entre teoría y práctica.
- Falta de esquemas de profesionalización de la planta docente.
- Escasa incorporación de las nuevas tecnologías.
- Carencia de programas de apoyo estudiantil.

Así, el plan estratégico propuesto en este trabajo se enfoca en los siguientes particulares:

I. Un cambio del paradigma educativo que cubre:

- El uso de técnicas didácticas alternativas.
- La incorporación de la tecnología.
- La profesionalización de la planta docente.

II. La implantación de programas de apoyo académico.

I. Del cambio del paradigma educativo

Los primeros estudios realizados en el Campus (ITESM – CEM, 1997) señalaron que la didáctica tradicional no resultaba efectiva para solucionar satisfactoriamente los siguientes problemas.

- El escaso desarrollo del pensamiento lógico.
- El bajo nivel de significancia de los conceptos.
- La prácticamente nula transferencia de los conocimientos a otras áreas.
- El bajo nivel de aprobación (alrededor del 45%).
- La deficiente implicación del estudiante en su proceso de aprendizaje.
- Las escasas posibilidades de transitar entre lo teórico y lo práctico.
- El escaso uso de los recursos tecnológicos disponibles.

Buscar soluciones a estas dificultades dio origen a la implantación de técnicas didácticas alternativas a través de las cuales pudiera generarse la posibilidad de resolver si no todos, sí varios de los problemas citados. De las siguientes técnicas, una de ellas se ha incorporado en la actualidad a cada uno de los cursos de matemáticas del departamento:

- Aprendizaje Basado en Problemas.
- Aprendizaje Colaborativo.
- Aprendizaje Orientado a Proyectos.

Estudios institucionales recientes (Martín, 2002) sobre los beneficios del uso de estas técnicas permiten señalar logros importantes en los siguientes particulares:

- Generan mayor nivel de significancia de los conceptos, facilitando el tránsito entre lo teórico y lo práctico.

- Promueven la habilidad del pensamiento crítico a través del análisis de la información y la solución de problemas.
- Logran sensibles modificaciones actitudinales hacia el estudio.
- Habilitan a los estudiantes en el trabajo de equipo y el aprendizaje colaborativo.
- Incorporan de manera natural el uso de la tecnología como recurso de investigación y de apoyo pedagógico.
- Centran el esfuerzo del proceso educativo en el aprendizaje más que en la enseñanza.
- Ponen énfasis en la actividad del estudiante.
- Exigen del educador una actividad mayor en lo que corresponde a diseño y planeación.

Ahora bien, la incorporación de las técnicas didácticas planteó la necesidad de capacitar a la planta docente en dos aspectos fundamentales:

- En el uso básico de herramientas computacionales.
- En la implantación de técnicas didácticas alternativas a la tradicional.

La capacitación básica del profesorado se ha administrado a través de un programa de habilidades docentes (PDHD) que se divide en las siguientes etapas:

1° Inducción al nuevo modelo educativo del Instituto.

2° Estructuración y diseño de un curso.

3° Implantación y evaluación de un curso rediseñado.

4° Transferencia y mejora continua.

La primera etapa tiene como finalidad introducir a cada profesor en una filosofía común, en una visión compartida que sobre el nuevo modelo educativo tiene la educación en el Instituto. La segunda, capacita al profesor en las técnicas didácticas indicadas así como en las herramientas básicas de la computación, de manera particular en el uso de las plataformas tecnológicas sobre las cuales se han colocado los cursos que con la visión ya señalada se han desarrollado para su implantación. La tercera etapa apoya al profesor a través de una evaluación conocida como "Evaluación Portafolio" bajo la cual se busca evaluar el proceso completo, esto es, un proceso que abarca a los estudiantes, al profesor, y al proceso mismo de enseñanza-aprendizaje siguiéndolo a través de sus objetivos, intenciones educativas, actividades y evaluaciones. Finalmente, la última etapa busca que cada profesor tenga la experiencia de implantar el modelo educativo con la incorporación de alguna técnica didáctica y el uso de la tecnología, todo ello facilitado por un profesor experto.

II. Programas de apoyo estudiantil

Sin embargo, pese a lo expuesto anteriormente tenemos alumnos que por diversos factores reprueban. Así se estableció "UN PLAN DE SEGUIMIENTO PERSONALIZADO". Este plan inicia con un examen diagnóstico de prerrequisitos el cual permite, tanto a profesores como a los alumnos tomar las medidas que consideren pertinentes para la realización exitosa del curso. El plan de seguimiento que realiza cada profesor parcial con parcial tiene los siguientes objetivos:

- Detectar alumnos que delatan problemas académicos desde el primer parcial.
- Inducir un ambiente de confianza entre profesor y alumno que permita ver a la educación en su carácter social.
- Propiciar un ambiente de comunicación profesor-alumno para el establecimiento de compromisos de carácter académico.
- Promover el acercamiento profesor - alumno a fin de que éste obtenga un apoyo personalizado de acuerdo a sus necesidades.
- Determinar oportunamente aquellos casos donde el alumno requiere apoyo de carácter psicopedagógico.

De acuerdo a lo indicado en el último punto del párrafo anterior, las dificultades académicas que algunos alumnos delatan señalan una problemática que va más allá de lo estrictamente escolar; por ello, se diseñó un programa preventivo de apoyo estudiantil llamado TIPS NI: IDEA PSICOPEDAGÓGICA (González, 2003), el cual está dirigido a todos los estudiantes que localizados por el "PLAN DE SEGUIMIENTO" hayan reprobado dos parciales. En este programa se abordan los siguientes tópicos.

- Eficiencia escolar.
- Aprendizaje acelerado.
- Manejo de estrés.
- Estrategias de aprendizaje.
- Estrategias de solución de problemas.
- Autoestima y proyecto de vida.

Resultados

Se presentan ahora algunos de los resultados más significativos generados por este plan.

a) El taller TIPS NI marcó modestas ventajas en cuanto a los alumnos que reprobando dos parciales terminaron aprobando la materia, de manera sintética:

Categorías	Enero –Mayo 2001	Agosto-Diciembre 2001	Enero – Mayo 2002
1	78.36	77.95	76.15
2	75.59	67.54	65.66
3	73.60	76.53	67.24

1: Grupo de alumnos que cursaron TIPS NI y acreditaron el taller.

2: Grupo de alumnos que cursaron TIPS NI y no lo acreditaron.

3: Grupo de alumnos que no cursaron TIPS NI.

b) El promedio de aprobación de los cursos de matemáticas promedia 67% en los cursos del primer semestre y alrededor del 75% en los cursos de los semestres subsiguientes.
c) Se ha considerado importante adoptar a un evaluador externo como parámetro de efectividad escolar, por esta razón señalamos los siguientes resultados que sobre los exámenes del CENEVAL se tienen en los dos últimos semestres. Cabe señalar que dos índices generales pueden establecer de forma directa el desempeño de los estudiantes: “El Testimonio de Alto Rendimiento Académico” (TARA) que se otorga al mejor 10% de los sustentantes y que equivale a un índice CENEVAL arriba de 1150 y “El Testimonio de Desempeño Académico Suficiente” que se otorga a los sustentantes que hayan obtenido de 1000 a 1149 puntos del índice CENEVAL. Se lograron los siguientes resultados dados en porcentaje:

Semestre	901-1000	1000-1050	1050-1100	1100-1150	1150-1200
2° semestre 2003	27.31	36.1	28.52	8.07	0
1° semestre 2004	3.83	19.89	39.87	29.84	6.57

d) También es importante señalar los promedios de eficiencia terminal obtenidos en las últimas tres generaciones en las carreras de ingeniería. Para determinar este índice se tomó en cuenta:

- El número de estudiantes que egresan en un lapso máximo de un semestre adicional al tiempo que requiere el plan de estudios.
- El número de estudiantes que solicitan una carrera y terminan en ella.

En cuanto a eficiencia terminal, tenemos:

- Ingeniería Mecánica Eléctrica: 58.7%
- Ingeniería Mecánica Administrativa: 65.38%
- Ingeniería en Sistemas Electrónicos: 73.91%
- Ingeniería en Electrónica y Comunicaciones: 66.4%

- Ingeniería Industrial y de Sistemas: 94.8%
- Ingeniería en Sistemas Computacionales: 62.2%

Así que en promedio, el índice de aprobación en las carreras de ingeniería es del 70.23%.

Conclusiones

Se finaliza este artículo con las siguientes conclusiones.

- Los problemas de deserción estudiantil y la baja eficiencia terminal son problemas multifactoriales, por ello se recomienda atacarlos con varias acciones simultáneas.
- Se debe hacer una amplia discusión académica acerca del paradigma tradicional del proceso de enseñanza-aprendizaje, dando apertura a otros posibles modelos que propicien aprendizaje significativo de los conocimientos y que generen la habilidad de transferir conocimientos entre diversas disciplinas.
- Al analizar la problemática de la deserción, se debe incluir la perspectiva anímica, es decir, no debe restarse importancia al estado anímico del individuo. Entre otras cosas, es importante trabajar enfoques que den al alumno mayor estímulo en su aprendizaje, además de promover una mayor participación del educando en su propio proceso de aprendizaje. Si el caso así los requiere se recomienda contar con apoyo institucional psicopedagógico.
- Se deben tomar acciones preventivas que permitan a las instituciones mejorar el desempeño del grupo de alumnos que tienen dificultades para aprender las áreas del conocimiento exacto.
- Es indispensable la capacitación del profesor como parte de su quehacer docente. Esto le permitirá abordar la ya de por sí compleja tarea de promover aprendizajes desde la plataforma de diversas herramientas didácticas.

Referencias Bibliográficas

Bañuelos, A. (2003). *Evaluación Iterativa: Una forma de incrementar el aprendizaje y la acreditación* [CD-ROM]. Memorias del Segundo Foro Sobre la Enseñanza de las Matemáticas para Ingenieros. Facultad de Ingeniería, UNAM, México.

ITESM – CEM (1997). *Desarrollo Personal para Rediseño de la Práctica Docente, Congreso Académico del Módulo III del PDHD*. México: Dirección de Efectividad Institucional del ITESM

García, G. (2002). *Estadísticas de Deserción Estudiantil y Eficiencia Terminal de Estudiantes de Licenciatura en Ingeniería de la Universidad Tecnológica de la Mixteca* [CD-ROM]. Memorias del Primer Foro de Desarrollo Curricular e Investigación Educativa para la Enseñanza de la Ingeniería, Dirección de Estudios Profesionales en Ingeniería y Ciencias Físico Matemáticas, IPN, México.

González, P. (2003). *Análisis del desempeño académico de los alumnos que acreditan el Taller Integral Para la Superación de Nuevo Ingreso* [CD-ROM]. Memorias del XXXIII Congreso de Investigación y Extensión del Sistema, ITESM, Campus Monterrey, México.

Martín, M. (2002). *El modelo educativo del Tecnológico de Monterrey*. ITESM, Monterrey, México.

Palomo, E. (2003). *Estrategia que ha incrementado la eficiencia terminal en el Instituto Tecnológico de Minatitlán* [CD-ROM]. Memorias de la XXX conferencia nacional de ingeniería, ANFEI, México.

Prado, C. y González, P. (2003). *Las matemáticas ante el reto de la eficiencia terminal* [CD-ROM]. Memorias de la XXX Conferencia Nacional de Ingeniería, ANFEI, México.

La Prensa como Medio y Recurso Didáctico en la Resolución de Problemas Matemáticos

Ana Guadalupe Quiroga y Olga Lidia Pérez
Instituto Laurens y Universidad de Camagüey
México, Cuba
anabananiux@hotmail.com, olgapg@inf.reduc.edu.cu
Resolución de Problemas – Nivel Medio

Resumen

Se presenta el manejo de la prensa como medio didáctico para lograr que los alumnos vean a la Matemática inmersa en su vida cotidiana, despertando en ellos su interés en la materia, logrando transformar noticias, comentarios, anuncios, etc., de la prensa, en problemas para aplicar en ellos el quehacer matemático: cómo enfrentarlos, la búsqueda de vías de solución y la resolución exitosa de los mismos. Utilizar los medios de información del ámbito social como recurso didáctico nos permitirá cambiar esquemas tradicionales de la enseñanza por métodos y técnicas de participación activa bajo un enfoque constructivista, el objetivo del trabajo es: Ofrecer indicaciones metodológicas para propiciar en los estudiantes la utilización de modelos matemáticos en situaciones prácticas, a través del uso de la prensa.

Justificación

Tratando de encaminar el rumbo de la Matemática hacia una mejor comprensión y aplicabilidad, la Escuela Mexicana de Matemáticas transita por el camino fundamental de la resolución de problemas en concordancia con las aplicaciones y el desarrollo del pensamiento matemático de forma dinámica, activa e interrelacionada.

Se tiene en el centro de la atención el problema, pero no como el único aspecto importante a desarrollar. En la Matemática los problemas actúan como medio y como objeto, constituyendo la resolución del problema un método y a la vez un objetivo de la enseñanza.

A lo largo de toda la historia, la enseñanza de la Matemática se ha visto acompañada de la resolución de múltiples problemas, lo cual hará suponer que al ser éstos últimos usados racionalmente deben constituirse en herramienta y recurso para el desarrollo del pensamiento, la independencia y las capacidades creadoras. Sin embargo, el simple uso de problemas por métodos conductistas, no ha provocado como tal un cambio en la formación de los alumnos, ya que: En general se usan de forma mecánica y rígida, no se aprovechan los aspectos docente-cognoscitivos presentes, se hace un manejo estático, restringido solo al ámbito propio de la situación planteada, no se da una visión general al proceder matemático restringiéndolo solamente a la manipulación con determinados conceptos y habilidades, siendo estos últimos solo en la propia dirección del problema en sí, no se interrelacionan las situaciones, profundizando de esta forma en la situación ocasional mostrada y no en el método, se trabaja más en cuanto a la orientación sobre la base del contenido y no del pensamiento, se habla en estos momentos de la necesidad de efectuar en la Matemática el proceso de: "inculturación", y de la necesidad de un salón de clases donde se vea a la Matemática como actividad con sentido, que sea microcosmos de la cultura matemática. Los valores de la Matemática como disciplina se reflejan en la práctica cotidiana. La resolución de problemas tiene una influencia general en el proceso de aprendizaje ya que puede influir tanto en los aspectos de sus conocimientos, como en sus sentimientos y en la propia práctica.

Actualmente el binomio "Conocimientos en el aula-vida cotidiana" es fundamental para la contribución que puede prestar la enseñanza de la Matemática al desarrollo de la conciencia y a la educación de las nuevas generaciones que enfrentarán el inicio del nuevo milenio que está por llegar. El valor de los conocimientos de la Matemática para solución de problemas que la sociedad enfrenta es indispensable fomentarlo entre nuestros alumnos, pues son ellos los que edificarán una sociedad capaz de enfrentar y solucionar los retos y dificultades que el desarrollo científico y tecnológico les marque.

Nunca como en estos últimos años la cultura científica y con ésta la Matemática entra en nuestras casas a través de periódicos, revistas y sobre todo a través del radio y la televisión. Es la escuela quien tiene la obligación de poner al ciudadano en condiciones de aprovechar una transmisión televisiva o la lectura de un periódico sobre asuntos científicos. Para que se pueda comprender el sentido de una representación gráfica, de una relación de medida, para entender cómo los planetas y los satélites se aproximan a través de explicaciones científicas es necesario que la persona que escucha, ve o lee tenga un mínimo de formación, que tenga ciertas bases. Pero esta formación, estas bases no se pueden tener si nosotros como docentes no les damos la oportunidad de hacer experimentos, de darse cuenta de las motivaciones que provienen de la realidad y de la aportación de la Matemática a la resolución de problemas en los diferentes campos de las ciencias, así como de situaciones de la vida cotidiana.

Planteamiento del diseño de la investigación

La investigación desarrollada partió del siguiente problema de investigación: Las deficiencias de los estudiantes del nivel medio superior, en la aplicación de la Matemática en la resolución de problemas de la vida cotidiana, considerando como objeto de estudio: El proceso docente educativo de la Matemática del nivel medio superior y en correspondencia con el problema se plantea como objetivo: Propiciar en los estudiantes la utilización de modelos matemáticos en situaciones prácticas, como vía para contribuir al desarrollo de sus habilidades en la solución de problemas en la vida fuera del aula.

Como campo de acción: Medios y recursos didácticos utilizados en el Proceso Docente Educativo de la Matemática, para estudiantes del nivel medio superior del Instituto Laurens, Preparatoria incorporada a la Universidad Autónoma de Nuevo León.

El alcance del trabajo se consideró a partir de la siguiente hipótesis: La utilización de un sistema de tareas como recurso didáctico en donde la prensa sea utilizada como medio para su desarrollo, cuyo fundamente esta basado en: Las dimensiones instructiva, educativa y desarrolladora de los métodos de enseñanza y los principios didácticos, puede contribuir a la utilización de modelos matemáticos en situaciones prácticas de la vida cotidiana.

Análisis de variables de la investigación

Variable Independiente: La utilización de la prensa como recurso didáctico dentro de un sistema de tareas basadas en las dimensiones instructiva, desarrolladora y educativa de los métodos de enseñanza y los principios didácticos.

Variable dependiente: La utilización de modelos matemáticos en situaciones prácticas.
Esta variable dependiente se puede medir a través de: La correspondencia entre el modelo y la tarea y el nivel de complejidad de la tarea.

Toda la investigación tiene como referente teórico el construcitvismo, sobre el cuál se sostienen las siguientes premisas teóricas (Quiroga, A.G. 1999):

1. Relación que existe entre el uso de la prensa como recurso didáctico con las dimensiones instructiva, desarrolladora y educativa de los métodos de enseñanza.
2. El uso de los medios de enseñanza con enfoque sistemático en relación con todo el proceso.
3. La utilización de la prensa como recurso didáctico en las matemáticas como recurso didáctico debe asumir los principios didácticos de la enseñanza de las matemáticas.
4. Una propuesta sobre el uso de la prensa como recurso didáctico debe sostenerse sobre la base de un sistema de tareas.

Métodos teóricos utilizados en la investigación

A) **Hipotético - Deductivo:** A partir de la hipótesis planteada y de los conocimientos sobre los medios de enseñanza, métodos de enseñanza y principios didácticos se pudo llegar a la conclusión de que la prensa puede caracterizarse como un medio de utilización directa que debe formar parte de un sistema.
B) **Sistémico:** Se estudió la prensa no como medio aislado sino como un medio de enseñanza incluido en un sistema, donde se destaca la relación de este con otros medios y que esas relaciones expresen el comportamiento del sistema como totalidad, en que uno de los medios que componen dicho sistema es función dependiente de otro medio.
C) **Causal:** Al analizar lo relacionado con las dificultades y la poca credibilidad de los estudiantes en relación a la Matemática se estudió la utilización de la prensa, los medios de enseñanza los principios didácticos y las dimensiones instructiva, desarrolladora y educativa de los medios de enseñanza, es decir se analizó la acción conjunta de varias causas ante el problema científico planteado.
D) **Históricos:** Se estudió el comportamiento de la Matemática y su enseñanza en el transcurso del tiempo específicamente en lo relacionado a la utilización práctica de ésta en la vida cotidiana. Además, se hizo un estudio de la evolución histórica de los medios de difusión masiva y su utilización en la docencia. Todo esto nos permitió hacer una caracterización externa del problema científico planteado, revelando las posibles causas de éste.

Descripción de la investigación

Esta investigación consiste en una introducción, dos Capítulos, conclusiones, bibliografías y anexos.En el capítulo uno se realiza el fundamento teórico que sustenta la propuesta didáctica, que nos ayuda a disminuir la resistencia de los alumnos a resolver problemas al ver la aplicación de estos en su vida cotidiana. También se hace un análisis del marco contextual del cual se partió para confirmar la existencia del problema e ir en la búsqueda de su solución.

En el capítulo dos se elabora un sistema de tareas que es en sí la propuesta didáctica sobre la cual está basado en el uso de la prensa como recurso didáctico que motive a los alumnos a la resolución de problemas, al ver la necesidad de la matemática en su vida social.

Descripción de la propuesta didáctica

Con el objetivo de desarrollar habilidades en la resolución de problemas, en nuestros alumnos del nivel medio superior, y lograr una motivación en ellos para un estudio de la Matemática eficaz y que la visualicen como herramienta necesaria para solucionar problemas de su vida cotidiana se expone la elaboración de un sistema de tareas para la asignatura de Matemática en donde se utiliza la prensa como medio para el desarrollo del sistema para incidir positivamente en las deficiencias de los alumnos en la resolución de problemas al ver la aplicación de esta ciencia en su vida cotidiana, en las condiciones de enseñanza aplicado a la Preparatoria del Instituto Laurens, Institución incorporada a la U.A.N.L.

Sistema de tareas

Por razones de espacio se relacionan sólo algunas de las tareas diseñadas:

1. Tarea para motivar a los alumnos al aprendizaje de la Matemática.

Se realizará al inicio de cada semestre pidiendo a los alumnos que en equipo elaboren un mural con 5 recortes de cada sección del periódico, en donde se ponga de manifiesto la aplicación o uso de la Matemática.

2. Tarea de materialización. Los alumnos materializarán conceptos, buscando en la prensa ejemplos que logren materializar los conocimientos adquiridos en clase.

Ejemplos

Conceptos		**Materialización**
Función	⟶	Análisis de las estadísticas de fútbol nacional.

- El lugar que ocupa cada equipo depende del número de puntos obtenidos
- El número de puntos que tiene cada equipo depende de los juegos ganados o empatados.
- El lugar que ocupa un delantero en la tabla general depende del número de goles que ha anotado.

Conceptos		**Materialización**
Ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales	→	Análisis de los anuncios de centros comerciales

- Formar ecuaciones con los datos de las promociones de las tiendas de autodescuento. Juan compró 4 kilos de fruta y una pasta dental pagando por ello \$24.00 ¿Qué fruta fue la que compró?
- Sistemas: Juan y María compraron las mismas frutas en Soriana pero en diferentes cantidades. Juan 3 kilos de una y 2 kilos de otra pagando \$38.50 y María 1 kilo de la primera y 3 kilos de la segunda pagando \$42.00. ¿Qué frutas fueron las que compraron ambos?

Conceptos		**Materialización**
Desigualdades	→	Análisis de los avisos de ocasión

- Obtener 2 anuncios de agentes de ventas donde se ofrezca un sueldo base más un % de comisiones y por medio de ecuaciones o desigualdades determinar:

  - ¿Qué es necesario para que te convenga decidirte por el caso 1?
  - ¿Qué es necesario para que te decidas por el caso 2?
  - ¿En qué condiciones ganarías lo mismo en ambos empleos?

3. Elaboración de problemas con datos obtenidos de la prensa.

Se realizará una vez que el alumno haya interiorizado una serie de ejercicios logrando la reproducción de los mismos; se les pedirá que ahora ellos elaboren ejercicios con datos obtenidos de las diferentes secciones del periódico. Se trabajará por equipos y cada equipo producirá 5 ejercicios de la sección que se le asigne.

4. Resolución de problemas.

Los alumnos resolverán los problemas obtenidos en la tarea anterior en forma de laboratorios. Las tareas 3 y 4 se pueden realizar al final de cada capítulo para hacer más rica la participación de los alumnos ya que tendrán que especificar al elaborarlos, qué conceptos están aplicando y qué métodos utilizarán para resolverlos.

Aspectos metodológicos para la utilización de la prensa

El éxito de la utilización de la prensa, como recurso didáctico, está condicionado por factores objetivos y subjetivos en cada uno de sus diferentes pesos, los cuales podemos resumir como: Selección, Documentación, Planeamiento, Utilización y Evaluación.

<u>Selección</u>: La selección del aspecto del contenido que se va a desarrollar, con la utilización de la prensa, se hace a partir de los objetivos concretos del programa, así como los del nivel, grado y especialidad. También tiene en cuenta los métodos a emplear, ya que un mismo objetivo puede lograrse a partir de métodos diferentes que el maestro selecciona. Es necesario precisar

si el objetivo a lograr va dirigido a la esfera de conocimiento y aprendizaje de conceptos, a la comprensión de sucesos, al desarrollo del pensamiento creador, al fomento de habilidades, a la vinculación de la teoría con la práctica, de lo concreto y lo abstracto.

Documentación: Luego de seleccionado el aspecto del contenido que se va a utilizar, debemos proceder a la documentación, o lo que es igual, a indagar qué es lo que tenemos a nuestro alcance. Es imprescindible hacer una búsqueda en la prensa que se ajuste al contenido de estudio, verificar que está disponible para todos los estudiantes desde el punto de vista económico. Desconocer este paso puede llevar a que la calidad de la prensa, como recurso didáctico, sea mediocre porque el desconocimiento hace que dejemos de usar buenos artículos cuyos contenidos pueden ser modelados matemáticamente.

Planeamiento: El planeamiento es el paso para definir el orden, el lugar y el momento en que será utilizada la prensa en el curso. Éste obedece básicamente al orden de los objetivos y los contenidos. El orden lógico de presentación está dado por los contenidos del programa y se ajustan lógicamente a los principios didácticos. Se respeta el procedimiento de partir de lo general a lo particular, de lo simple a lo complejo, de lo conocido a lo desconocido, de lo concreto a lo abstracto (Considerando en este trabajo como lo concreto a nivel sensorial y lo abstracto a nivel del pensamiento).

Utilización: El éxito de la prensa como medio de enseñanza depende, en última instancia del maestro. Pudiera estar bien seleccionada y planeada y resultar ineficaz si se emplea mal. Los conocimientos del maestro determinan el éxito de esta etapa ya que el maestro debe saber cómo ha de usarse la prensa en las clases de Matemática, de forma que los estudiantes no se distraigan, logrando dirigirles la atención a lo que se quiere, cómo preparar a los estudiantes emocionalmente para su uso, cómo garantizar su uso. El maestro necesita saber también hasta dónde decir y hasta dónde callar, dejar que los estudiantes elaboren sus propias condiciones, permitir temas abiertos, ofrecer una pluralidad de vías y procedimientos. No interrumpir donde no es necesario, y saber recalcar lo esencial.

Evaluación: Cada vez que se utilice la prensa u otro recurso didáctico debemos determinar en qué medida permitió el logro de los objetivos planteados y su efectividad. Sobre estas consideraciones el profesor adecua nuevamente el sistema de medios al finalizar la clase o curso y procede a su nueva utilización. Así un curso tras otro, se perfecciona el sistema. Evaluar la utilización de la prensa, como recurso didáctico para la enseñanza de la Matemática, es una tarea ardua que, como hemos apuntado, puede variar en complejidad, desde las consideraciones al final de una clase, hasta su expresión más compleja y difícil, con investigaciones rigurosas de varios años de ejecución. Para estas últimas se emplean diversos métodos investigativos.

Para evaluar la utilización de la prensa, en la enseñanza de la Matemática, debemos considerar los aspectos internos (adecuación con el método y selección del problema adecuado en correspondencia con los objetivos y contenidos) y los elementos externos y fácilmente apreciables (forma de utilizarlo, resultados logrados). No se debe absolutizar uno de los aspectos anteriores para evaluar el método porque irse sólo hacia los primeros, es restar importancia al resultado final necesario; irse al segundo aspecto supone superficialidad en su utilización.

Resultados

El binomio "Conocimientos en el aula – vida cotidiana" es fundamental para la contribución que puede prestar la enseñanza de La Matemática al desarrollo de la conciencia y a la educación de las nuevas generaciones que enfrentarán el inicio del nuevo milenio que está por llegar. El valor de los conocimientos de la Matemática para la solución de problemas que la sociedad enfrenta, es indispensable fomentarlo entre nuestros alumnos, pues son ellos los que edificarán una sociedad capaz de enfrentar y solucionar los retos y dificultades que el desarrollo científico y tecnológico les marque.

Con la aplicación de esta propuesta didáctica se logró dar una respuesta fundamentada y posible de constatar por los estudiantes, de cómo la Matemática les sirven en el desarrollo de su vida fuera del aula, al poder aplicarla a problemas reales, actuales y veraces extraídos de la prensa, se logró despertar el interés y el gusto por el aprendizaje de esta ciencia logrando que el binomio: "Conocimientos en el aula – vida cotidiana" se desarrollara armónicamente entre los alumnos del nivel medio superior del Instituto Laurens, preparatoria incorporada a la U.A.N.L, los resultados de las evaluaciones fueron superiores y la participación de los estudiantes en las tareas planteadas fue masiva, mostrando dinamismo en la realización de las mismas y lográndose que muchos de ellos diseñaran sus propias tareas seleccionadas de la prensa y relacionadas con los contenidos estudiados.

Referencias Bibliográficas

Alvarez, C. (1999). *La Escuela en la vida*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Ballester, S. (2000). *Metodología de la enseñanza de las matemáticas* (Tomo II). La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Quiroga, A.G. (1998). *La utilización de la Prensa en la solución de problemas Matemáticos*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Nuevo León, México.

Didáctica de la Probabilidad y Estadística
El Caso de la Variable Aleatoria

Blanca R. Ruiz y José Armando Albert
ITESM, Campus Monterrey
México
bruiz@itesm.mx
Probabilidad, Estadística y Combinatoria – Nivel Superior

Resumen

Nuestro proyecto aborda una de las ideas fundamentales en los cursos de Probabilidad y Estadística en las instituciones de enseñanza universitaria: la variable aleatoria. Este concepto se apoya en muchos otros conceptos matemáticos y probabilísticos y sirve a su vez de soporte a gran parte de los temas en probabilidad y estadística. El proyecto didáctica de la variable aleatoria se fundamenta en la Teoría de Situaciones Didácticas y en este artículo profundizaremos en una exploración cognitiva como complemento del análisis preliminar que propone la metodología de la Ingeniería Didáctica. En esta primera etapa se buscará saber cuál es el estado de apropiación de algunas ideas fundamentales estocásticas relativas a la variable aleatoria en dos estudiantes que se acaban de integrar al nivel universitario.

1. Introducción

Existe un rezago en las instituciones educativas en comparación con la demanda que las sociedades exigen del uso de la estadística a sus ciudadanos y profesionistas. Se hace necesario abordar la enseñanza de la probabilidad y la estadística desde una perspectiva científica para trazar líneas que permitan abordar este tema en nuestras instituciones educativas. Dentro de estos esfuerzos, Heitele (1975) propone una lista de diez ideas fundamentales en la enseñanza de la estadística basándose en un enfoque epistemológico-pragmático, en donde una idea fundamental proporciona modelos explicativos en cada etapa del desarrollo del concepto a lo largo de la educación del individuo. La variable aleatoria está incluida dentro de esas diez ideas fundamentales a desarrollarse en los estudiantes desde niveles educativos básicos y que culminen en niveles superiores.

La pertinencia del desarrollo de un proyecto de investigación alrededor de la didáctica de la variable aleatoria también se sustenta en otras razones, tanto en dificultades en su didáctica y en su aprendizaje, como a razones propias del desarrollo del concepto en la probabilidad y la estadística como ciencias. El concepto de variable aleatoria propicia el paso de la estadística descriptiva y probabilidad básica hacia modelos probabilísticos, por lo tanto por un lado en ella convergen muchos conceptos estadísticos y probabilísticos provenientes de los niveles educativos básico y medio superior, y por otro constituye la unión principal entre el pensamiento probabilístico y el pensamiento estadístico. Así mismo, está presente en las ideas de distribución de probabilidad, al Teorema del Límite Central, muestreo, pruebas de hipótesis, correlación y asociación, etc. Por lo tanto, una incomprensión de ese concepto puede ocasionar una mala percepción de temas posteriores, y también es un indicador del aprendizaje de elementos estudiados anteriormente.

2. Metodología

Nuestro proyecto de investigación se circunscribe fundamentalmente en la Teoría de Situaciones Didácticas, iniciada por Brousseau (1986), y a su metodología, la Ingeniería Didáctica, reportada por Artigue M. (1995), aunque también se recurre a otras aportaciones a modo de herramientas metodológicas, tal como el recurso de las entrevistas. Nos restringimos a la didáctica de la variable aleatoria en el nivel superior, puesto que es en donde realizamos nuestra labor como profesores.

En este reporte se presenta el desarrollo del análisis preliminar con sus tres componentes: epistemológica, cognitiva y didáctica, así como una *exploración cognitiva*, que se realizó con la finalidad de complementar los elementos de la componente cognitiva que justifiquen un primer diseño de actividad para el salón de clase y sus hipótesis preliminares, que realizaremos en futuras investigaciones.

La exploración cognitiva consiste en una serie de entrevistas a un par de estudiantes a las que se les plantea un problema y lo resuelven a través de la discusión suscitada entre ellas hasta lograr un acuerdo en presencia de un investigador, cuyo único papel es aclarar o profundizar, a sí mismo o a la investigación, las ideas que las estudiantes expresan en voz alta. Las preguntas dirigidas a las estudiantes están condicionadas por la solución que van dando al problema como por una guía que el investigador preparó previamente.

3. Componente epistemológica

En un primer acercamiento de análisis preliminar, la componente epistemológica puede ser vista, a su vez, como disciplinar, histórica y social (Albert, 1998).

La idea de variable aleatoria ha sido causa de las múltiples aplicaciones actuales del cálculo de probabilidades, ya que pasó de ocuparse del estudio de la probabilidad de sucesos aislados al estudio de las distribuciones de probabilidad, y posteriormente al de los procesos estocásticos. La variable aleatoria y su distribución, así como el estudio de las familias de distribuciones y sus propiedades son una herramienta muy potente, porque permite trabajar con el aparato del análisis matemático (Batanero, 2001).

En palabras muy simples y de manera muy intuitiva, la variable aleatoria relaciona un suceso del espacio muestral con un número real, pero la relación no es tan sencilla, puesto que el suceso tiene que estar definido en un espacio de probabilidad. El que el suceso esté definido en un espacio de probabilidad es lo que a su vez permite posteriormente, establecer otra relación importante que es la de la función de probabilidad. Es decir dentro de la definición de variable aleatoria, otros dos conceptos que están íntimamente relacionados, el espacio de probabilidad y la función de distribución. Estos, a su vez, involucran otros conceptos más elementales, lo que hace de la variable aleatoria un concepto muy complejo desde la perspectiva epistémica. Así, la problemática de la variable aleatoria se verá modificada dependiendo si la noción de probabilidad que se trabaje en el espacio de probabilidad es frecuentista, clásica o subjetiva pero una vez definida la variable aleatoria y con ella la función de probabilidad no importará de qué tipo de probabilidad se deriva, será tratada como probabilidad formal en la función de distribución en donde se relaciona con otro elemento matemático que es la variable aleatoria.

Otro tipo de consecuencia que se deriva a partir de esta complejidad epistémica es la que involucra a la variable aleatoria como elemento de modelación. La variable aleatoria es la que permite construir un modelo matemático a través de la probabilidad. Así cuando nosotros hablamos de una función de distribución, la variable aleatoria nos lleva a la realidad, el número 5 ó 6 nos conduce de inmediato al suceso al que nos estamos refiriendo, es decir, la variable aleatoria en ese contexto es la realidad. Pero en el proceso de transformar los sucesos del espacio muestral a números, la variable aleatoria es el modelo matemático, es la abstracción. Anteriormente también los sucesos, ligados a un espacio de probabilidad, son el modelo matemático. Así, la variable aleatoria a la vez que funge como "realidad" en un contexto, en otro contexto, muy cercano, funge como modelo matemático.

Por otro lado desde la perspectiva histórica, hay razones que justifican por qué los matemáticos pasados, que no conocían esta idea, tuvieron serios problemas con diversas paradojas matemáticas y, por ejemplo, Bernoulli necesitara 20 años para descubrir y probar su ley débil de los grandes números, temas que hoy se explica en unas pocas líneas. (Batanero, 2001).

Desde una perspectiva social, manejamos intuitivamente la idea de variable aleatoria cuando nos encontramos con juegos y experimentos en los que usamos dados, monedas, etc. Así mismo tenemos experiencias cotidianas con variables aleatorias continuas, como el tiempo de espera del autobús, o el necesario para llegar de nuestra casa al trabajo. Por el refuerzo de las múltiples, a veces inconscientes, experiencias con variables aleatorias en la vida cotidiana, la intuición de la magnitud aleatoria y de valor esperado, a veces aparece antes que la de probabilidad (Heitele, 1975).

4. Componente didáctica.

Los programas de estudio suelen ubicar el estudio de la variable aleatoria justo antes de ver Distribuciones de Probabilidad como un antecedente a éstas. Entrevistas con profesores manifiestan las peculiares dificultades que presentan los estudiantes para el tema de variable aleatoria tanto por su notación peculiar, como por fuerte tendencia a asociarla a la variable algebraica, y por tanto, diluirse lo estocástico. Los libros de texto usados en el ITESM en ciencias sociales e ingeniería, mencionan la variable aleatoria fuera de sus capítulos de probabilidad para abordarla como preámbulo al de distribuciones de probabilidad. Esta separación y orden pudiera estar generando algunas dificultades, pues autores como Heitele (1975) sostienen que la noción de variable aleatoria y su esperanza es, a veces, incluso anterior a la probabilidad. Además, a la par de la idea de variable aleatoria es necesario estudiar y retomar otras ideas que están vinculadas con ella, lo que hace que sea una idea didácticamente difícil de ser abordada.

En general, encontramos una falta de profundización sobre la idea de variable aleatoria en los libros de texto coincidiendo con algunos autores que han analizado libros de texto como Ortiz (2002) y Miller (1998), quienes en sus investigaciones concluyen que hay una ausencia de la presencia de la noción tanto de variable aleatoria tanto en libros de texto en secundaria (Ortiz) y profesional (Miller). Así como con Tauber (2001) quien concluye que no hay una conexión entre el estudio del modelo probabilístico y los datos empíricos en los libros de texto, y con Oseguera (1994) quien reporta una falta de vinculación de la variable aleatoria con experiencias intuitivas de los estudiantes en los programas de estudio.

5. Componente cognitiva.

La literatura en este ámbito resultó muy escasa, así encontramos algunas citas principalmente en Batanero (2001) y Heitele (1975) quienes basándose en que el modelo de variable aleatoria hay tres conceptos básicos: su distribución, media y varianza, reúnen diversos estudios sobre estos tres conceptos. Así citan que algunos psicólogos sostienen que la habilidad para estimar la esperanza matemática de las variables aleatorias es puramente biológica puesto que mediante la experiencia es posible llegar a estimar el tiempo medio que tardaremos en preparar la comida o arreglarnos, lo que gastaremos en promedio al hacer la compra. Sin embargo, en un plano formal, de acuerdo con Piaget y otros, la esperanza matemática se interpreta como la media aritmética de los valores de una variable aleatoria, si el experimento se repitiese suficientemente en condiciones idénticas. También sostienen que los tres conceptos se deben enseñar de manera diferente puesto que mientras que la idea de media (esperanza matemática) es muy intuitiva, lo es menos la idea de distribución, especialmente cuando unos valores son más probables que otros. Ambos dan un lugar preponderante a la enseñanza de la distribución Normal y a las dificultades que los estudiantes tienen en su aprendizaje.

6. Exploración cognitiva

Fue pertinente realizar una exploración cognitiva que nos permitiera complementar la revisión bibliográfica sobre la componente cognitiva profundizando sobre el aprendizaje de la variable aleatoria en particular. Se pretendió que de esta exploración cognitiva se obtuvieran algunas hipótesis sobre las posibles dificultades que surgen en estudiantes universitarios de los primeros semestres cuando abordan un problema estocástico relacionado con la idea de variable aleatoria, así como un el atisbo de algunas trayectorias que siguen los estudiantes al querer resolver el problema propuesto.

La exploración consistió en que dos estudiantes (Brenda y Mónica) de nuevo ingreso a la universidad resolvieran un problema planteado a través de un cuestionario dividido en tres partes. El problema fue el siguiente:

A raíz de los festejos del día del niño, el departamento de relaciones públicas de una fábrica desea efectuar una rifa que beneficie a los hijos de los trabajadores. Se premiará a la familia de un obrero con boletos para el teatro, pero los boletos de teatro se tienen que reservar con días de anticipación, así encomiendan a la trabajadora social de la empresa que decida cuántos boletos tiene que comprar (se proporcionan, en forma tabular, el número de hijos que tienen los trabajadores de la fábrica).

7. Algunos resultados.

PARTE I. Ellas comenzaron a trabajar la probabilidad como un cociente. No mostraron mucha dificultad para obtener la probabilidad de todos los eventos posibles. Sin embargo al cuestionarlas se notó una confusión entre lo que es la probabilidad y el número de trabajadores. Aunque están conscientes de que el número de trabajadores por sí mismo no es la probabilidad sino que tiene que ir "acompañada" con el total de trabajadores (es decir, el cociente entre ambos). No efectúan el cociente entre el número de trabajadores y total de trabajadores, más bien mencionan poco la operación que media a los dos números y lo manejan mejor como una relación de un cierto número de trabajadores de un total de otros tantos, como si la raya de división sólo sirviera como una nomenclatura para establecer la relación entre las dos cantidades, pero no la alcanzaran a ver como un solo número (el cociente). Creemos que su preferencia a no efectuar el cociente les dificulta interpretar la probabilidad como una variable que puede tomar un valor y por eso mismo les parece más natural que la variable sea el número de trabajadores. Una vez que tienen los decimales, ellas interpretan correctamente el significado de la probabilidad como la parte de una unidad, aunque se facilitan la interpretación con porcentajes.

De manera que ellas definen que la variable dependiente es el número de trabajadores y la variable independiente el número de hijos porque el número de hijos define el número de trabajadores y no al revés. Sin embargo la relación de dependencia que ellas manejan es "la probabilidad depende del número de hijos". Con la intervención de los profesores, ellas se dan cuenta de que en realidad la probabilidad es la variable dependiente y no el número de trabajadores. Una vez más, a pesar de que en la primera actividad aparentemente llegaron a definir correctamente la probabilidad como un número (incluso en forma decimal), terminan por decir que el número de hijos es lo mismo que la probabilidad y cuesta un poco de trabajo despegarse del número de trabajadores como variable y la probabilidad y que manejen la segunda en lugar de la primera.

PARTE II: En primera instancia Brenda y Mónica piensan que lo mejor es comprar 2 boletos y después comprar más boletos cuando ya se sepa cuántos hijos tendrá la familia ganadora. Después se inclinan por comprar 5 boletos, porque el número de hijos de los trabajadores vinculados a la mayor probabilidad es 3. La necesidad de la probabilidad acumulada surge de los mismos argumentos de las estudiantes por convencerse una a la otra de cuántos boletos comprar al observar a quiénes beneficiarían los boletos que compren, sin embargo, el profesor es el que surgiere que se elabore una tabla con las probabilidades acumuladas. La tabla es la que las hace discutir mejor sobre cuál sería la mejor opción, una de ellas está de acuerdo en que comprar 5 boletos sería lo mejor porque ello haría que la mayoría de los trabajadores saliera beneficiado, pero hay una cierta preocupación por no dejar desamparados a los trabajadores que tienen un mayor número de hijos. Si se compran 5 boletos, sólo el 58% de los trabajadores tienen posibilidades de no tener problemas con llevar a sus hijos, pero si se compran más (por ejemplo, 6 ó 5) es casi seguro que menos familias tendrán problemas con sus hijos. El profesor les aclara que han de ponerse de parte de la empresa, eso induce a las muchachas a decidirse por 5 boletos. Ellas usan la probabilidad acumulada antes de calcularla para convencerse mutuamente como un "*si tienes cubierto todo esto*", sin embargo, no surge de ellas el calcularla, lo mismo pasa con la probabilidad del complemento, que de hecho no calculan

Al calcular las probabilidades exactas y acumuladas sólo necesitan volver a leer detenidamente el problema (¿se incluye a los que tienen exactamente 3 hijos?). Concluyen que no es posible asegurar que no habrá desperdicio de boletos, pero sí podemos saber qué es lo más probable:

PARTE III. En primera instancia, relacionan la notación funcional con la expresión algebraica del evento que están tratando de describir. "De hecho de la tabla se saca la función", por lo tanto ven la tabla como una función (aunque no lo expresan propiamente), pero siguen pensando en encontrar la expresión algebraica. El dominio de la función lo obtienen como si fuera una función continua, aunque hay una confusión entre el contexto del problema (el número de hijos) y el contexto matemático (una gráfica en la que unieron los puntos y que, manifiestan, "*siempre han construido así*"). Se inclinan por mencionar que al interpretar no debemos usar decimales en la variable número de hijos, pero en la gráfica o al describir el dominio optan por la nomenclatura continua porque, dicen, "*así se acostumbra en matemáticas*", como si las matemáticas fueran un ente ajeno a todo contexto y al interpretarlas en una situación ya dejaran de ser matemáticas. En el rango se deciden casi inmediatamente (casi sin pensarlo) por una variable continua.

Mencionan que la variable independiente de esta relación (probabilidad-número de hijos) es diferente a otras funciones que han trabajado en álgebra o en cálculo en varios aspectos: es limitada, porque no puede tomar todos los valores que quieran, sólo de 0 a 9; no puede tomar valores decimales, sólo enteros; aquí no se manejan ecuaciones, los valores de 'y' se dan por la ecuación y en esta relación es aleatoria porque no se puede sacar a través de un patrón; la diferencia la hace la variable dependiente (probabilidad) porque sus valores no se pueden obtener a través de una ecuación sino que son datos que se dan, son dadas por una situación no por una relación matemática, no hay exactitud (mencionan que de poder encontrar la ecuación, lo pueden hacer, pero ella no tendría sentido en la descripción del problema); además no es posible predecir qué sigue después de que ocurra un evento.

Conclusiones

El concepto de variable aleatoria tiene una gran complejidad epistémica, puesto que se apoya en conceptos previos complejos, está vinculada con un proceso de modelación matemática, está asociada con los conceptos de distribución de probabilidad y función de distribución, se vincula con otros conceptos no probabilísticos.

Se pudo observar que las estudiantes manejan eficientemente la noción de variable aleatoria en su contexto de significado, pero tuvieron dificultades para su asociación con el concepto de función, y por tanto, con su formalización. Se hicieron patentes las dificultades en el manejo de una variable discreta, surgieron dificultades de origen aritmético tal como asociar la probabilidad a dos números (el cociente de dos enteros) en lugar de reconocer que se trata de uno solo (decimal). La variable dependiente se mostró más débil en el contexto de la probabilidad que en un contexto algebraico debido a que la probabilidad resultó algo menos tangible y controlable como variable dependiente. La noción de azar se manifestó en su fase más elemental de lo incontrolable e impredecible. Así mismo se observa que encuentran difícil pasar del contexto del problema al contexto matemático porque no ven a la variable aleatoria como modelo matemático sino sólo como parte de la realidad.

Referencias Bibliográficas

Albert A. (1998). Introducción a la epistemología de la Escuela Mexicana de Matemática Educativa, Bogotá: *Actas de RELME XII* .

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995) *Ingeniería didáctica en educación matemática.* México: Iberoamericana.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística.* Granada: Grupo de investigación en educación estadística, Universidad de Granada.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*¸ 7 (2), 33-115.

Heitele, D. (1975). Un enfoque epistemológico sobre las ideas estocásticas fundamentales. *Educational Studies in Mathematics* 6, 187-205.

Miller, T.K. (1998). The random variable concept in introductory statistics. In Pereira-Mendoza, L. et al (Eds) (1998). *Statistical education - expanding the network: Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics*. 1998 (1221-1222) Singapore: International Statistical Institute.

Nardecchia, G. y Hevia, H. (2003). Dificultades en la enseñanza del concepto de variable aleatoria. Trabajo presentado en el *V Simposio de Educación Matemática*. Chivilcoy, Argentina.

Ortiz J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Tesis doctoral. España: Grupo de Educación Estadística de la Universidad de Granada.

Oseguera F. (1994). *El concepto de variable aleatoria en el contexto del currículo. Análisis y Alternativas*. Tesis para obtener el grado de maestría. México: CINVESTAV-IPN.

Tauber, L. (2001). *La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos.* Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

Algunas Dificultades en la Conversión Gráfico-Algebraica de Situaciones de Vectores

José Luis Soto
Universidad de Sonora
México
jlsoto@gauss.mat.uson.mx
Visualización — Nivel Superior

Resumen

El presente trabajo es un reporte parcial de un estudio realizado con estudiantes universitarios, para la detección de algunas dificultades de aprendizaje relacionadas con los *conceptos básicos* de la teoría de espacios vectoriales. Los resultados obtenidos son analizados en el marco de la teoría de registros de representación semiótica de R. Duval y provienen principalmente de dos entrevistas realizadas con estudiantes y de la observación de sesiones de enseñanza realizadas en un ambiente computacional.

Introducción

Las investigaciones realizadas en educación matemática (Dubinsky, 1997; Harel, 1997, 1998; Hillel, & Sierpinska, 1994; Pavlopoulou, 1994; Sierpinska, Dreyfus & Hillel, 1999; Trigueros & Oktaç 2003; Ulhig, 2003) han puesto de relieve las dificultades que encuentran los estudiantes para construir y utilizar los conceptos de combinación lineal, dependencia e independencia lineal, generación, base y dimensión, denotados también bajo el nombre genérico de *conceptos básicos* de la teoría de espacios vectoriales.

En el estudio reportado aquí nos hemos propuesto dar respuesta a las dos preguntas de investigación siguientes:

1. ¿Cuáles son las dificultades que enfrentan los estudiantes cuando resuelven problemas relacionados con situaciones de vectores en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$?
2. ¿Cuáles de estas dificultades están relacionadas con la conversión de representaciones gráficas en algebraicas y viceversa?

Consideraciones Teóricas.

El presente trabajo tiene como referencia una de las teorías de la representación en matemáticas, a saber aquella sobre registros de representación semiótica formulada por R. Duval. Esta teoría ha resultado apropiada para la investigación en el campo de la educación matemática, porque establece con claridad los vínculos entre el funcionamiento cognitivo y los sistemas semióticos de representación; no se conciben de manera aislada, sino como elementos de sistemas de representación que tienen su propia estructura interna, sus propias limitaciones de funcionamiento y de significado, que pueden ser caracterizadas en función de las actividades cognitivas que permiten desarrollar (Duval, 1998, pp. 177-178):

"Para que un sistema semiótico sea un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis:

- La *formación* de una representación identificable como una representación de un registro dado.
- El *tratamiento* de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ésta ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro...
- La *conversión* de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial..."

De estas tres actividades, la más importante para el aprendizaje es la *conversión* porque está directamente relacionada con las dificultades ligadas a la distinción que debe hacerse entre un objeto y su representación.

En $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ que son los espacios vectoriales que nos interesan, podemos ver la naturaleza distinta que tienen las actividades cognitivas señaladas antes y sus implicaciones para el aprendizaje. Un estudiante que produce, por ejemplo, la representación $a\mathbf{v}+b=\mathbf{0}$ en el registro algebraico de vectores, donde a, $b\in\mathbf{R}$ y $\mathbf{v}$, $\mathbf{0}\in\mathbf{R}^2$; denota que no tiene claras las reglas de formación en este registro. Se trata evidentemente de una representación que ha sido mal *formada* puesto que una regla básica de formación aquí es que el signo de suma tiene sentido solamente cuando se escribe entre dos signos que denotan vectores.

Los *tratamientos* en este mismo registro se reducen a sumar vectores y a multiplicar vectores por escalares, estas operaciones están sujetas a ciertas reglas que rigen los tratamientos. Estas reglas permiten, por ejemplo, transformar una expresión como $a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2 + ... +a_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$ $(a_1 \neq 0)$ en otra, pero una expresión como "$a_1=(+\ a_2\mathbf{v}_2\ +\ ...\ +\ a_n\mathbf{v}_n)/\mathbf{v}_1$" (Harel, 1998, p. 497) puede obtenerse de aquí sólo a costa de violar estas reglas.

Un problema tan simple como el de expresar un vector $\mathbf{w}\in\mathbf{R}^2$ como combinación lineal de otros dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, puede mostrarnos la diversidad de registros que pueden involucrarse y las complejidades de la conversión en álgebra lineal. En la Figura 1, se muestran los dos registros algebraicos y los dos registros gráficos que pueden movilizarse en la discusión de este problema.

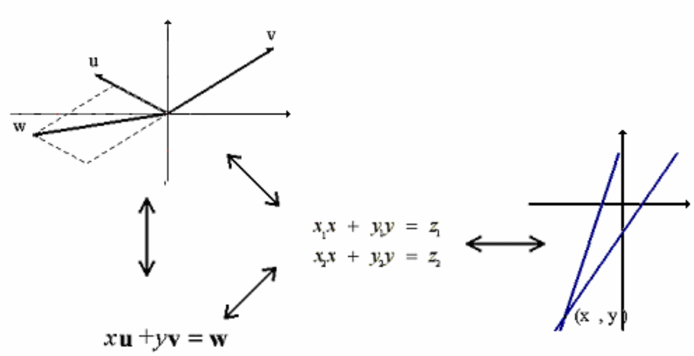


Figura 1

En el presente trabajo, sin embargo nos centramos en la representación de las operaciones de suma y multiplicación por un escalar, donde estas operaciones son representadas gráficamente como lo muestra la Figura 2.

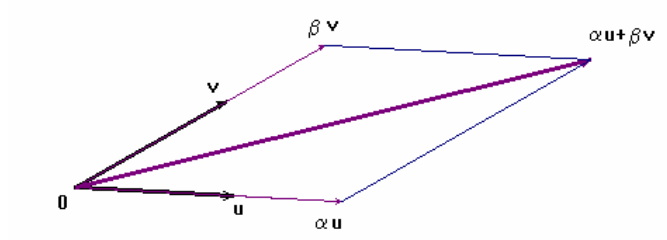


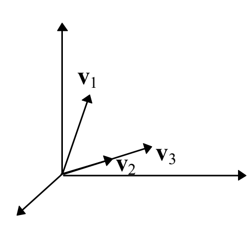
Figura 2

Metodología

Las dificultades han sido observadas y estudiadas en dos ambientes distintos:

1. En sesiones individuales de trabajo con dos estudiantes, mientras intentaban resolver a lápiz y papel una serie de catorce problemas sobre situaciones de vectores. Las sesiones han sido grabadas en video y posteriormente analizadas. Durante las sesiones cada estudiante ha interactuado con un profesor-entrevistador, quien ha tratado de identificar las dificultades y profundizar en ellas. Para dar una idea del tipo de problemas que conformaban esta serie, en la Figura 3 mostramos uno de ellos:

4. Sean $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ los vectores de $\mathbf{R}^3$ que aparecen en la gráfica siguiente:



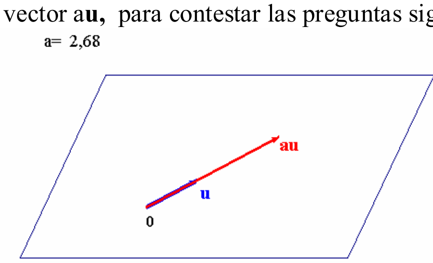
¿Son $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ linealmente dependientes o linealmente independientes?
Justifique su respuesta.

Figura 3

2. En sesiones de enseñanza realizadas con un grupo escolar de 36 estudiantes, en un ambiente computacional diseñado con el software de geometría interactiva Cabri Géomètre II (Bellemain & Laborde, 1995). Aquí los estudiantes han

realizado una serie de 17 actividades utilizando representaciones dinámicas manipulables directamente en la pantalla de una computadora y construidas previamente por el profesor. Las actividades pretenden poner en juego los conceptos básicos, pero se incluyen entre ellas algunas sobre los conceptos de valor y vector propio. Durante las sesiones han contado con instrucciones escritas para cada actividad y las han realizado en pareja interactuando con la computadora. El papel del profesor se ha limitado a orientar el trabajo de los estudiantes y observar las dificultades. Un fragmento de una de las primeras actividades se muestra en la Figura 4.

Actividad 1b. Abra el archivo vector1.fig. En pantalla aparecerá una gráfica similar a la que se muestra en la Figura 1. El valor de "a" que aparece en pantalla puede hacerse variar después de hacer un doble "clic" sobre él. Hágalo variar y observe el efecto de esta variación sobre el vector a**u**, para contestar las preguntas siguientes:



a) ¿Cómo es el vector a**u** con respecto al vector **u**, cuando el número "a" toma valores entre 0 y 1?
b) …

Figura 4

Conclusiones

Apuntamos aquí algunas conclusiones a las que hemos llegado en este estudio, en algunas de ellas se hace referencia a los estudiantes entrevistados como E1 y E2. Una descripción más completa de los resultados y conclusiones de este estudio puede verse en (Soto, J-L., 2003).

- Cuando se trabaja con espacios vectoriales euclidianos en dos y tres dimensiones, el concepto de dependencia lineal está íntimamente relacionado con la colinealidad y coplanaridad de vectores. A este respecto pudimos observar dificultades a dos niveles.
- En primer lugar aquellas relacionadas con la identificación de conjuntos de vectores colineales o coplanares en el registro gráfico, sin lo cual la conversión al registro algebraico es imposible. En el caso de la colinealidad, atribuimos estas dificultades a la falta de discriminación de las variables visuales en las representaciones gráficas con las que se ha trabajado, esta ausencia ha sido particularmente notoria en la identificación de la colinealidad de los vectores $\mathbf{v}$ y $a\mathbf{v}$ cuando $a<0$. En el caso de la coplanaridad, las dificultades están más relacionadas con las limitaciones del registro gráfico, que hacen imposible distinguir conjuntos de vectores coplanares de los no coplanares.

Particularmente en las actividades de enseñanza en las que tenían que localizar, a partir de la manipulación de la gráfica, los valores y vectores propios de una matriz de tamaño dos por dos, los estudiantes no han tenido dificultades en encontrar los dos vectores propios que corresponden a los dos valores propios positivos, pero cuando alguno de los valores propios era negativo, la existencia de vectores propios ha pasado con frecuencia desapercibida para ellos. A veces se ha llegado a la conclusión de que la matriz no tiene vectores propios, porque no tiene valores propios positivos.

- En segundo lugar, la colinealidad y la coplanaridad son condiciones necesarias pero no suficientes para que un conjunto de vectores sean linealmente dependientes, sin embargo hemos observado que los estudiantes han tomado como linealmente independientes algunos conjuntos de vectores donde existen parejas no colineales, en el caso del plano, e igualmente lo han hecho cuando tienen conjuntos de vectores en donde hay ternas no coplanares, en el caso del espacio.
- La imposibilidad de representar el vector cero en el registro gráfico es una limitación inherente a este registro. Esto trae como consecuencia un problema severo de no congruencia entre las representaciones gráfica y algebraica de una situación de vectores. En $\mathbf{R}^3$, por ejemplo, la representación gráfica de los conjuntos $\{\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ no pueden distinguirse una de la otra, de manera que una vez convertidos del registro algebraico al gráfico, el regreso hacia el registro algebraico ya no es posible. Al respecto de este fenómeno de no congruencia, Duval (1998, p. 51) ha señalado "La dificultad de la conversión de una representación depende del grado de no congruencia entre la representación de salida y la representación de llegada".

Los efectos de esta limitante han quedado de manifiesto en los intentos por traducir las nociones de dependencia e independencia lineal del registro gráfico al algebraico y viceversa, porque el vector cero es una referencia obligada para estas nociones. Por ejemplo, cuando E1 está resolviendo uno de los problemas, ofrece como explicación que la dependencia lineal del conjunto de vectores $\{\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ se debe a que el vector $\mathbf{0}$ obliga a los otros dos a ser colineales.

Por otra parte, durante las actividades de enseñanza que se referían a transformaciones lineales, en virtud de que las matrices han sido escogidas libremente por los estudiantes, cuando se han encontrado con matrices que tienen un valor propio igual a cero, han concluido que la matriz tiene un solo vector propio, a saber el que se corresponde con el valor propio distinto de cero.

- Para que una representación proporcione el acceso al objeto representado, según Duval (1998, pp. 176-177) "es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de sus posibles representaciones".

Es evidente a lo largo de las entrevistas que cada vez que se solicita representar una base, los estudiantes recurren a la base canónica de $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, posiblemente debido al uso reiterado de ellas en su curso de álgebra lineal y posiblemente debido a ello han llegado a confundir la noción de base, por ejemplo, con una situación de vectores ortonormales. La confusión incluso hace que E2 asocie la noción de base con características que no son definitorias de este concepto y están relacionadas más bien con la norma euclidiana de $\mathbf{R}^3$. En uno de los problemas, cuando E2 trata de justificar porqué el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\}$ no es una base para $\mathbf{R}^3$, afirma que no lo es, porque para que lo fuera, él pediría que los vectores del conjunto fueran linealmente independientes y además "que fueran unitarios". Los estudiantes confunden pues el concepto de base con una de sus representaciones más conocidas que es la representación de una base canónica.

Todavía más, los estudiantes han exhibido durante las entrevistas que la generación no es un requisito exigido a un conjunto de vectores para ser una base, sino una característica que solamente las bases poseen. En uno de los problemas, a pesar de que E1 ha enunciado la definición de base con bastante precisión, la confunde con la de conjunto generador de $\mathbf{R}^2$; después de proponer los vectores $\mathbf{v}_1=(1,0)$, $\mathbf{v}_2=(0,1)$ como un conjunto generador de $\mathbf{R}^2$, el profesor le propone agregar un tercer vector (-1, 1) al conjunto y le pregunta si el nuevo conjunto también genera a $\mathbf{R}^2$. La estudiante considera que el nuevo conjunto ya no genera a $\mathbf{R}^2$.

- En el manejo de los conceptos de dependencia e independencia lineal aparecen dificultades vinculadas con la lógica, en particular con la escritura (simbólica) de la lógica Cuando un conjunto de *n* vectores es LD, se tiene directamente de la definición, que estos vectores satisfacen la ecuación:

$$a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+...+a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

donde por lo menos algún a_i es diferente de cero. Esta ecuación puede usarse para verificar que un conjunto de vectores es LD; o a la inversa, si un conjunto de vectores es LD, se sabe que satisfacen esta ecuación para algún a_i es diferente de cero y de nuevo la ecuación puede manipularse para establecer alguna relación útil entre los vectores del conjunto. A pesar de que las definiciones tanto de dependencia como de independencia lineal se valen de la representación $a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+...+a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, el papel que esta ecuación juega en cada una de ellas, es muy distinta.

Las entrevistas muestran, que esta reducción de la definición de dependencia lineal a ciertas condiciones bajo las cuales se satisface la ecuación $a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+...+a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, se convierte en un obstáculo cuando se trata de utilizar la definición de independencia lineal, porque la ecuación $a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+...+a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ juega en esta definición solamente el papel de hipótesis en la condicional $a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+...+a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \rightarrow a_1=a_2=...=a_n=0$. Este obstáculo pareciera originarse en el éxito obtenido con la manipulación algebraica de la ecuación $a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$ cuando se abordan problemas de dependencia lineal y sus causas mas profundas podrían residir en la estructura lógica que subyace a las definiciones, y en las dificultades para negar proposiciones formuladas en términos de cuantificadores.

Es posible entonces que la articulación entre los registros gráfico y algebraico, resulte insuficiente como herramienta teórica para explicar esta dificultad porque en el fondo la dificultad parece más ligada a la naturaleza y los tratamientos del sistema matemático de signos de la lógica.

Referencias Bibliográficas

Bellemain, F. y Laborde, J. M. (1995). *Cabri Géomètre II*. Dallas, Tex.: Texas Instruments, Software.

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level. In D. Carlson et al (Eds.), *Resources for teaching linear algebra*, MAA Notes, 42, 85-106.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Harel, G. (1997). Moving beyond concept definition. *Resources for teaching linear algebra MAA Notes,* 42, (pp. 107-126).

Harel, G. (1998). Two dual assertions: The first on learning and the second on teaching (Or vice versa). *The American Mathematical Monthly*, 105, (pp. 497-507).

Hillel, J. y Sierpinska, A. (1994). On one persistent mistake in linear algebra. *Proceedings of the 18th annual meeting of International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (3), (pp. 65-72).

Pavlopoulou, K. (1994). *Propédeutique de l`algèbre linèaire: la coordination des registres de représentation sémiotique*, Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur (Strasbourg 1); prépublication de l`Institut de Recherche Mathématique Avancée. France.

Sierpinska, A., Dreyfus, T. y Hillel, J. (1999). Evaluation of the teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 7-40.

Soto, J-L. (2003). *Un estudio sobre las dificultades para la conversión gráfico-algebraica, relacionadas con los conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales*. Tesis de Doctorado, no publicada. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN, México.

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2003). La Théorie APOS et l`Enseignement de l`Algebre Linéaire. En prensa.

Ulhig, F. (2003). A new unified, balanced, and conceptual approach to teaching linear algebra. *Linear Algebra and its Applications* 361, (pp. 147-159).

La Mediación…un Factor Fundamental en la Construcción de Aprendizajes Significativos

Gloria Suhit y Marta Baunaly
Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional
Argentina
gsuhit@criba.edu.ar, gabinete@frbb.utn.edu.ar
Metacognición – Nivel Medio

Resumen

El presente trabajo muestra los primeros pasos de una investigación en curso, con alumnos de primer año de Ingeniería**,** en la Facultad Regional Bahía Blanca, que intenta dar respuesta al desafío de formar personas creativas, innovadoras, flexibles,…, con capacidad para construir nuevos y viables significados, que le permitan enfrentar situaciones de incertidumbre y de continuos cambios, por medio de una enseñanza centrada en la interacción docente-alumno y a través de una experiencia de *aprendizaje mediado,* que promueva el intercambio de preguntas- relevantes, apropiadas, sustantivas- evidencia de un aprendizaje significativo**,** focalizando la atención en el diseño de mecanismos de intervención educativa (MIE) adecuados a los estilos de aprendizaje de los alumnos y a los niveles de complejidad del conocimiento.

Introducción

La rapidez con que se producen los cambios científicos y tecnológicos y la incidencia que pueden llegar a tener en la vida cotidiana hace que resulte difícil predecir cuales serán los conocimientos que necesitarán los ciudadanos y/o los futuros profesionales y obligan a la educación a centrar los esfuerzos en el autoaprendizaje para favorecer la integración a las nuevas formas de vida social.

En particular la matemática, a través del tiempo, se ha transformado en la base de sustentación de gran parte del desarrollo científico y tecnológico, alcanzando sus aplicaciones no sólo a la física y la ingeniería sino también a la medicina, a la economía, a las ciencias sociales.

En este contexto la Educación Matemática debe plantearse la necesidad de formar personas creativas, innovadoras, flexibles,…, con capacidad para construir nuevos y viables significados, que le permitan enfrentar situaciones de incertidumbre y de continuos cambios, por medio de una enseñanza centrada en la interacción docente-alumno, que promueva el intercambio de preguntas- relevantes, apropiadas, sustantivas- evidencia de un aprendizaje significativo

Con el propósito de identificar los mecanismos de intervención educativa, adecuados a los estilos de aprendizaje de los alumnos y a los niveles de complejidad del conocimiento y corroborar cómo *la mediación ayuda y facilita la construcción del conocimiento y favorece el desarrollo de aprendizajes significativos,* se diseña este proyecto de investigación

La propuesta se sustenta en el trabajo que desarrollaron docentes del Gabinete Psicopedagógico de la Facultad sobre *"Estilos de aprendizaje de los alumnos de primer año de las carreras de ingeniería en la Facultad Regional Bahía Blanca(FRBB)"* y que en un a primera etapa tuvo, entre otros, los objetivos de identificar los estilos de aprendizaje predominantes y caracterizar al grupo con respecto a ese atributo.

En base a los resultados obtenidos, en una segunda etapa, se propone el diseño de un plan de acción a nivel aúlico, para que mediante metodologías y prácticas adecuadas, se refuercen los estilos preferentes y potencien los menos desarrollados, dando lugar así a la aparición de procesos metacognitivos que lleven a un mejoramiento del rendimiento académico.

En lo referente a este aspecto aportan su experiencia los integrantes del grupo G.I.E.M. (Grupo de Investigación en Educación Matemática) quienes vienen desarrollando un trabajo áulico que promueve el aprendizaje autónomo y orienta hacia el metaconocimiento.

Marco Teórico

El proyecto se enmarca dentro de la *"pedagogía de la problematización"*, respetando los niveles de complejidad en los procesos cognoscitivos de los alumnos.
Si como lo expresa J. Novak (1997) la "*resolución de problemas* implica la reorganización de la información almacenada en la estructura cognitiva para alcanzar una meta", una buena capacidad de resolución de problemas requiere conceptos bien diferenciados que sean relevantes para los problemas que se quieren resolver y por lo tanto la resolución de problemas se puede considerar como un caso especial de *aprendizaje significativo* (Ausubel et al, 1983)

Desde la concepción constructivista el alumno es el responsable último de su propio proceso de aprendizaje, quien construye significados y atribuye sentido a lo que aprende, pero esta actividad por sí sola no garantiza el aprendizaje, el alumno necesita que otros lo ayuden en el proceso de representación o atribución de significados.

"... El ajuste de la ayuda pedagógica se logrará ya proporcionando al alumno una información organizada y estructurada, ya ofreciéndole modelos de acción a imitar, ya formulando indicaciones y sugerencias más o menos detalladas para resolver unas tareas o permitiéndole que elija y desarrolle de forma totalmente autónoma unas determinadas actividades de aprendizaje"(Coll, 1999).

Esto debe ser así porque cada ser humano construye el conocimiento de un modo personal según su *"estilo de aprendizaje"* (Alonso et al, 1995) y de acuerdo a su *"estructura cognitiva"*, que pueden modificarse, aumentando el *"potencial de aprendizaje"*, mediante un ajuste constante y sostenido de la ayuda prestada en el proceso de construcción que realiza el alumno y a través de una experiencia de *aprendizaje mediado.*

Un aprendizaje mediado significa *"regular relaciones, orientar percepciones, guiar en la reflexión sobre el funcionamiento interno de cada persona; implica colocarse entre la realidad de un alumno y ese gran universo de objetos, ideas, culturas y experiencias, para asegurar su justa adaptación dinámica y creativa."* (Martínez Beltrán, 1994)

El mediador, teniendo en cuenta los objetivos prefijados, selecciona y organiza la información de modo que el aprendiz la perciba e interprete de forma significativa. Lo orienta a pensar sobre la tarea que está realizando, a descartar información superflua y a utilizar sólo lo esencial y básico para la solución del problema, desarrollando la capacidad simbólica y la flexibilidad en el pasaje de un sistema simbólico a otro, presentando las situaciones de aprendizaje de forma interesante y relevante para que el alumno, se comprometa activa y emocionalmente en la tarea.

En síntesis, en el marco de la concepción constructivista se considera que los procesos de enseñanza y aprendizaje conforman una unidad indisoluble, lo que conduce a centrar el análisis en la forma en que los docentes y alumnos organizan la actividad conjunta en torno a una tarea y/o contenido de aprendizaje y en este contexto los esfuerzos se orientan a identificar , entender y explicar cómo operan los MIE. Por lo tanto se tiende a desplazar el acento desde los procesos de aprendizaje a los de enseñanza, considerando el aprendizaje de los estudiantes como consecuencia de la influencia educativa que se ejerce sobre ellos.

Hipótesis Principal

La mediación ayuda y facilita la construcción del conocimiento y favorece el desarrollo de aprendizajes significativos

Desarrollo de la Experiencia

Se propone llevar a cabo una experiencia con alumnos de las carreras de Ingeniería en la FRBB, durante el primer año de estudio.

Primera Etapa *Diagnóstico*

- Relevar el estado inicial del grupo sobre *estilos cognitivos y estilos de aprendizaje* por medio de los test de Kolb y Alonso.
- Identificar los estilos potenciados y disminuidos de cada alumno

Segunda Etapa *Intervención Educativa*

- Diseñar *Mecanismos de Intervención Educativa* adecuados a los estilos de aprendizaje de los alumnos y a los niveles de complejidad del conocimiento adoptando como modelo pedagógico el enfoque problematizador.
- Observar si un estilo determinado se correlaciona preferentemente con alguno de los niveles de profundidad de los procesos cognoscitivos intervinientes en la enseñanza-aprendizaje.
- Conformar grupos de trabajo para la resolución de problemas sobre el eje de los perfiles de aprendizaje
- Analizar, discutir y resolver los problemas propuestos.

Tercera Etapa *Evaluación* Continua del Aprendizaje

La evaluación continua proporciona la información sobre el desarrollo del proceso y permite que la ayuda pedagógica se ajuste progresivamente según las características individuales de los alumnos, en especial en lo referente a su estilo de aprendizaje

Actividades

- El taller se desarrolló durante el segundo cuatrimestre del último ciclo lectivo, con una frecuencia semanal y una duración de dos horas reloj cada encuentro.

- Los participantes, 15 alumnos de primer año de ingeniería, especialidades Electrónica y Civil, con los trabajos prácticos de las materias Análisis Matemático I y Algebra aprobados

- En el taller se intentó generar un ambiente de confianza que les permitiera ir superando los bloqueos de distintos orígenes (Guzmán, 1994), tales como
  - *Afectivos*: miedo al fracaso, a la equivocación, al ridículo, ansiedad por terminar,…
  - *Cognoscitivos* : dificultades en la percepción de un problema, incapacidad para desglosarlos, rigidez mental,….
  - *Cultural y ambiental :* buscar la respuesta "correcta", seguir las "normas", ser "prácticos", ignorando la ambigüedad, la intuición, …

- La aproximación a la problemática se realizó mediante la *observación participativa*, a través de un ciclo interactivo, considerando los siguientes elementos relacionados: asistencia a los alumnos en la realización de las actividades y tareas propuestas, seguimiento de sus actuaciones, registro de datos mediante distintos instrumentos observacionales, reflexión analítica de los datos para tomar decisiones sobre los mecanismos de influencia educativa (MIE) utilizados y que permitan deducir cuales de estos MIE aportan más a la adquisición de competencias básicas y la construcción de aprendizajes significativos.

- Los instrumentos de recolección de datos fueron: lista de control, registros semanales, entrevistas, informes de docentes externos que colaboraron como observadores y registraron el desempeño de los estudiantes en los grupos de trabajo, elaboración – por parte de los alumnos -de protocolos de resolución de problemas,…

- En los encuentros se trabajó en la resolución de problemas cuyo enunciado no tiene un contenido específico, implícito, ni se relaciona, en forma directa, con los contenidos curriculares que se desarrollan en las asignaturas de ese nivel, sino son situaciones para que el alumno pueda desarrollar distintas estrategias, buscando para su solución caminos posibles, personales, creativos……, formulando hipótesis y contrastando resultados, tomando en cuenta las particularidades del problema propuesto.

- Se solicitó que trataran de registrar el proceso de resolución con la mayor cantidad de datos, se los animó para que explicitaran las ideas, bloqueos, razonamientos, presentes en cada uno de los problemas y se los orientó en la elaboración del protocolo (Callejo, 1995)

- Se otorgó una gran importancia a la comunicación de ideas: animando a los más pasivos, solicitando que no se juzguen las ideas expuestas ni se descarten porque no resultan útiles, promoviendo que expliciten los bloqueos que se presentan en el transcurso de la resolución, los sentimientos por los que están pasando.

De la observación del comportamiento de los estudiantes en los talleres se infiere que, en general, tienen muchas dificultades para

- Expresar sus sentimientos
- Sobrellevar la situación de incertidumbre que se crea en el proceso de resolución de problemas
- Identificar problemas análogos
- Buscar regularidades
- Cambiar de estrategia
- Describir, tanto en forma oral como por escrito, los pasos que realiza al resolver los problemas

Al finalizar esta primera experiencia los estudiantes la valoraron como positiva porque los permitió conocer mejor sus limitaciones y posibilidades, desarrollar actitudes adecuadas para resolver problemas, conocer algunas heurísticas y fundamentalmente adquirir el hábito de reflexionar y hacerse preguntas….
Considerando los aportes de estos resultados iniciaremos este año el desarrollo de la segunda etapa del proyecto.

Responsables del Proyecto

Docentes del Gabinete Psicopedagógico de la FRBB y del Grupo de Investigación en Educación Matemática (GIEM)

Referencias Bibliográficas

Alonso, C. M., Gallego, D.J. y Honey, P. (1995). *Los estilos de Aprendizaje*: *procedimientos de diagnóstico y mejora*. Editorial Mensajero. Bilbao.

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1995). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Callejo, M. L. (1995). *Un club matemático para la diversidad*. Madrid: Narcea. S. A.

Coll, C. (Ed.) (1999). *Psicología de la instrucción de la enseñanza y el aprendizaje en la educación secundaria*. Barcelona: Ediciones Horsori.

Guzmán, M. (1994). *Para pensar mejor*. Madrid: Ediciones Pirámide. S.A.

Martínez, J. M. (1994). *La mediación en el proceso de aprendizaje*. Madrid: Editorial Bruño.

Novak, J. (1997). *Teoría y práctica de la Educación*. Madrid: Alianza Universidad.

Razonamiento Probabilístico en Estudiantes del Nivel Superior

Manuel Alfredo Urrea
Universidad de Sonora
México
maurr@gauss.mat.uson.mx
Probabilidad, estadística y combinatoria — Nivel Superior

Resumen

El propósito de este trabajo es identificar y analizar algunas de las estrategias y desviaciones presentes en el razonamiento probabilístico de un grupo de estudiantes universitarios, al abordar cierto tipo de situaciones en las que se requiere usar ideas básicas relacionadas con el concepto de probabilidad.

Para identificar y analizar dichas estrategias se aplicó un cuestionario por escrito a los estudiantes, para el análisis de los argumentos que presentaron se tomaron en cuenta tres aspectos: el curricular, el psicológico-cognitivo y el relacionado con el desarrollo de las nociones de probabilidad y aleatoriedad desde la perspectiva de la disciplina. A partir de este análisis se pudo observar que destaca la presencia del sesgo de equiprobabilidad, el sesgo del enfoque del resultado aislado y la heurística de representatividad.

Consideraciones preliminares

Incidir en el aprendizaje de la probabilidad y de ideas básicas relacionadas, desde nuestro punto de vista, implica conocer la forma en que evolucionan los estudiantes en este campo de conocimiento. La existencia de una composición de intuiciones y desviaciones que muestran los estudiantes al enfrentar situaciones probabilísticas, plantea enfáticamente la necesidad de contar con un conocimiento de las características con que se presentan, esta posición define la orientación del trabajo.

Inicialmente este trabajo surge de la problemática que como profesor, de los cursos donde está presente el contenido de probabilidad, he observado, particularmente al trabajar con estudiantes del nivel superior. Así, en un primer momento, la intención fue trabajar en una propuesta didáctica que aportara situaciones en las que se enriquecieran las concepciones de los estudiantes sobre el concepto de probabilidad y las ideas básicas relacionadas.

Hacer este trabajo implicaba la necesidad de tener algún conocimiento de las intuiciones y desviaciones que muestran los estudiantes en su razonamiento al enfrentarse a cierto tipo de situaciones probabilísticas. Fue en la búsqueda de estas condiciones iniciales, que el trabajo se enfocó hacia la problemática de indagar sobre algunas de las desviaciones presentes en el razonamiento de los estudiantes al analizar, interpretar y resolver cierto tipo de situaciones probabilísticas.

Problema de investigación

Esta investigación se enmarca dentro de la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular en la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad, y forma parte de un proyecto más general: "Caracterización de dificultades, obstáculos y comprensiones que se presentan a la educación en ideas básicas de probabilidad y estadística en los niveles medio superior y superior"[1].

Concretamente el trabajo se centra en lo relativo al tipo de razonamiento que muestran los estudiantes al enfrentar cierto tipo de situaciones probabilísticas. Hay indicios de que la comprensión del concepto de probabilidad y de las ideas básicas, relacionadas con ésta, enfrentan la interferencia de varias dificultades para que los estudiantes puedan llevar a cabo un razonamiento acorde a lo establecido por la disciplina, estas dificultades se manifiestan en los estudiantes por medio de diferentes sesgos.

Lo anterior fue uno de los motores que motivó la orientación de este trabajo, por lo que el objetivo central que se presenta es: estudiar la problemática en torno a la comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes del nivel superior, desde la perspectiva del tipo de razonamiento que muestran al poner en juego las ideas básicas indispensables para analizar, interpretar y resolver cierto tipo de situaciones probabilísticas.

Si el estudiante pone en juego de manera correcta sus concepciones respecto a las ideas básicas relacionadas con el concepto de probabilidad, diremos que da muestra de un razonamiento normativo, en caso contrario, se espera que aparezcan elementos que nos permitan identificar heurísticas y sesgos.

Esta problemática ya ha sido estudiada en diferentes momentos y contextos, se tienen los trabajos de M. Borovnick , H. J. Bentz y R. Kapadia (1991) quienes señalan al espacio muestra y a la independencia como una fuente de dificultades que se representan en el desarrollo de la disciplina misma; D. Kahneman y A. Tversky (1982) quienes han reportado la heurística de representatividad y algunos de los sesgos asociados; M.P. Lecoutre (1985,1992) quien ha reportado trabajo relacionado con la presencia del sesgo de equiprobabilidad; Konold (1991) quien ha estudiado la presencia del sesgo del enfoque en el resultado aislado; algunas de estas investigaciones se han realizado fuera del contexto escolar. Por último, tenemos los trabajos de Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares (1998) quienes han investigado la presencia de la heurística de representatividad, el sesgo de equiprobabilidad y el sesgo del enfoque en el resultado aislado, dichos trabajos se centran en la presencia de estos sesgos de manera conjunta en estudiantes de secundaria.

Con estos antecedentes es que en este trabajo se ha definido el siguiente problema de investigación:

Identificar y analizar algunas heurísticas y sesgos presentes en el razonamiento que hacen estudiantes del nivel superior al analizar, interpretar y resolver cierto tipo de situaciones probabilísticas en las que se requiere utilizar las ideas básicas del concepto de probabilidad.

Para los fines de este trabajo, diremos que una heurística son las estrategias que utiliza el sujeto para enfrentar cierta situación a partir de algún conocimiento que tiene de ella, el cual puede ser incorrecto, incompleto o correcto. Un problema en la aplicación de dicho conocimiento, es que puede resultar insuficiente o no pertinente en ciertas situaciones, lo que

[1] Con apoyo del Sistema de Investigación del Mar de Cortés, clave 990103023.

lo puede llevar a razonamientos correctos o no. Mientras que los sesgos siempre son razonamientos incorrectos, desviaciones de un razonamiento establecido como correcto en el contexto de una teoría o disciplina.

Consideraciones teóricas

Aspecto curricular

Al enfocar este trabajo a estudiantes universitarios, nos dimos a la tarea de analizar los programas de materia de los cursos en los que se contemplan los contenidos de probabilidad y que son impartidos a los alumnos objetos de estudio. Tratándose del campo de la Probabilidad, se asume como marco de referencia inicial y apropiado el planteamiento de D. Heitele (1975), quien concibe a las ideas fundamentales como aquellas que funcionan como modelos explicativos para los individuos en cada etapa de su desarrollo en cierto campo del conocimiento.

Desde esta óptica se prevé la construcción de una visión de conjunto de los conceptos de acuerdo a la herramienta disponible, el grado de maduración de las ideas fundamentales parte desde un plano intuitivo. El tránsito de este proceso a etapas posteriores implica la identificación de nuevas propiedades de los conceptos, cuya interrelación a su vez empuja la maduración de las ideas fundamentales hacia un plano formal, propiciando con esto la posibilidad de que futuros acercamientos a los conceptos permitan tener concepciones más elaboradas o completas.

Aspecto psicológico cognitivo

Para tratar de ubicar el estado de desarrollo cognitivo de los estudiantes que participaron en este trabajo, en lo relativo al azar y la probabilidad, se consideró pertinente recurrir al planteamiento que hace J. Piaget e B. Inhelder (1975), quienes señalan la existencia de tres etapas en el desarrollo cognitivo del niño:

La senso-motriz, que va de los cero a dos años, en ésta el niño desarrolla habilidades motrices respondiendo a los estímulos que le proporciona el medio ambiente.

La de operaciones concretas, va de los dos a once años, en este periodo podemos ubicar dos subetapas:

La preoperacional, de los dos a siete años, en la que los niños no ven diferencia entre lo que es deducible y lo que no lo es, debido a que la anticipación intuitiva permanece a medio camino entre operación y azar. En lo que respecta a la noción de probabilidad se señala que en esta etapa el niño no puede hacer estimaciones correctas de las posibilidades a favor y en contra de los eventos aleatorios, y argumentan que esto se debe a que todavía no cuenta con los elementos necesarios como son: la habilidad para distinguir entre el azar y lo deducible, el concepto de proporción y el razonamiento combinatorio.

La de las operaciones concretas, que va de siete a once años, en esta etapa empiezan a distinguir la diferencia entre azar y operaciones, estas últimas determinando el dominio de lo deducible, mientras que el azar define por tanto el dominio de lo incomprensible e irreversible, esto es lo impredecible.

La de las operaciones formales, que va de los 11 a los 15 años, en esta etapa ya está en condiciones de acceder a la idea de proporción y a las operaciones combinatorias, esto le permitiría, al menos, cuantificar tanto el número de posibilidades para el resultado de un experimento aleatorio como el número de posibilidades de los casos favorables, a partir de lo cual estará en posición de hacer el cálculo de ciertas probabilidades.

En esta dirección se tienen también los trabajos de E. Fischbein (1975), en los que se señalan algunos elementos que pudieran enriquecer algunos aspectos relativos a las conclusiones obtenidas previamente. Por ejemplo, concluye que los niños antes de los siete años, sí tienen nociones e intuiciones sobre ideas de azar, lo cual se manifiesta en las decisiones que toman al participar en juegos de azar: en muchos juegos sencillo los niños seleccionan de manera sistemática las respuestas más probables.

En los trabajos de Fischbein se le concede importancia central a las intuiciones como acercamientos a los objetos físicos o matemáticos, pero también como medios a través de los cuales el individuo forma sus nuevas concepciones. Así se concibe que las intuiciones juegan un papel preponderante a lo largo del desarrollo cognitivo del individuo, que éstas se generan gracias a la experiencia adquirida al interactuar con el medio y que evolucionan ante nuevas experiencias. Sin embargo, las nuevas intuiciones que forma el individuo, dependiendo de las condiciones en las que se de la experiencia o del contexto en el que se presente, pueden resultar correctas o no, o incluso pueden estropearse en su evolución.

Desde esta perspectiva se tiene que la instrucción es un factor fundamental para el desarrollo de dichas intuiciones, por lo que ésta debe planear, diseñar e implementar acciones que permitan a los niños tener las experiencias adecuadas para apoyar el desarrollo de intuiciones correctas, corregir las que son incorrectas, evitar su deterioro y apoyar la evolución de las intuiciones correctas que ya tiene desarrolladas. Esto es, sin una instrucción adecuada, no es posible explotar el potencial que tienen los niños en sus diferentes etapas, es decir, a pesar de que el sujeto esté en condiciones de llegar a un aprendizaje que le permita analizar, interpretar y resolver cierto tipo de situaciones probabilísticas, requiere de una instrucción adecuada para lograrlo.

Desarrollo de las nociones de Probabilidad y Aleatoriedad

La evolución de los conceptos de aleatoriedad, azar y probabilidad ha pasado por etapas difíciles, entre otras cosas motivado por la manera de ver e interpretar el mundo y los fenómenos que en el ocurren. Concretamente, la evolución de las visiones y consideraciones acerca del azar y la probabilidad, en particular las diferentes formas en que han sido definidos. A lo largo de su desarrollo dichas nociones han sido interpretadas de diferente forma: subjetiva y objetivamente. En el primer caso se caracteriza a las situaciones aleatorias como aquellas que están determinadas por la ignorancia o desconocimiento de los factores que en ellas influyen.

En el caso de la visión objetiva se caracteriza las situaciones aleatorias como aquellas que ocurren debido a una coincidencia impredecible de causas propias de la situación.

Heurísticas y sesgos

Las heurísticas y sesgos que se pretenden identificar en los sujetos que participan en esta investigación son:
Sesgo de equiprobabilidad, se manifiesta cuando se señala que todos los eventos asociados a un experimento aleatorio son equiprobables.

Sesgo del enfoque en el resultado aislado, este tipo de sesgos está presente cuando los sujetos interpretan y responden a una pregunta de probabilidad como si fuera no probabilística.

Heurística de representatividad, consiste en una tendencia a considerar que un evento o una observación de un experimento aleatorio tiene mayores posibilidades de ocurrir si es más parecido a la población de la que procede o éste reproduce algunas características esenciales del proceso que genera la información. Este tipo de heurística produce varios tipos de sesgo, los que analizaremos en este trabajo son dos:

Sesgo de la insensibilidad al tamaño de la muestra, el cual se presenta cuando el juicio de representatividad sobreestima el poder de decisión proporcionado por la información contenida en una muestra, omitiendo información relevante que proporciona el tamaño de ésta.

Sesgo de concepciones erróneas en las secuencias aleatorias, se presenta cuando se espera que una parte, aunque sea muy corta, del proceso aleatorio, lo representa fielmente sin tomar en cuenta que algunas de sus características son observables a la larga.

Metodología

Para este trabajo se seleccionaron 180 estudiantes de la Universidad de Sonora, 60 de cada una de las siguientes carreras: Licenciatura en Ciencias de la Comunicación, Licenciatura en Contabilidad e Ingeniería Civil, en cada caso seleccionamos 30 estudiantes de primer semestre sin instrucción en probabilidad en este nivel educativo y 30 de semestres que ya tuvieron instrucción en probabilidad.

Conociendo las características de los sujetos de estudio, se consideró pertinente una revisión de los planes y programas de estudio de los niveles medio superior y superior, con la intención de conocer los antecedentes académicos que tienen los estudiantes.

Para indagar acerca del tipo de razonamiento que ponen en juego estos estudiantes al enfrentar situaciones probabilísticas, se diseñó un cuestionario. Para la integración del cuestionario, que constituye el instrumento a través del cual realizamos nuestra exploración, se seleccionaron, rediseñaron y diseñaron problemas o reactivos. El cuestionario que se aplicó a los estudiantes consta de ocho reactivos, los primeros siete son retomados de los reactivos que utilizaron en su investigación Serrano y colaboradores (1998), algunos de los cuales sufrieron pequeñas modificaciones basadas en nuestra observación al aplicarlos en nuestro medio; los primeros siete problemas son de opción múltiple, pero siempre se les pidió que argumentaran por qué seleccionaban tal opción. El problema ocho, a diferencia de los primeros siete, era abierto, por lo que el estudiante tenía más libertad de proponer la respuesta que considerara correcta.

Como nuestro interés es determinar el tipo de razonamiento que utiliza el estudiante al enfrentar estas ocho situaciones, dicho razonamiento puede ser normativo o puede ser sesgado. Para cada uno de los problemas del cuestionario se estableció el objetivo que persigue, así como una caracterización según tipo de argumento que el estudiante dio. La caracterización de los argumentos ya se ha dado en trabajos previos, pero fueron complementados con algunas observaciones que se realizaron al poner a prueba los reactivos en una comunidad estudiantil del nivel medio superior.

Problema No. 1 ¿Cuál de las siguientes sucesiones es más probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada cinco veces? a) AAASS b) SAASA c) SASSS
d) ASASA e) Las cuatro sucesiones son igualmente probables.

¿Por qué has dado esta respuesta?

En la investigación de Serrano y colaboradores (1998) el objetivo de este problema es identificar la heurística de representatividad al utilizar concepciones erróneas sobre secuencias aleatorias, así como el enfoque en el resultado aislado. Pero cuando se aplicó en nuestro medio en los estudiantes del nivel medio superior, en la prueba de pilotaje, se vio que también es posible identificar el sesgo de equiprobabilidad, el cual está presente en aproximadamente el 26% de los estudiantes que participaron en este estudio.

Para el problema No. 1, mostraremos dos ejemplos del tipo de argumento (1 y 3) que se puede encontrar en las respuestas que dan los estudiantes:

Argumento 1): Debe haber aproximadamente igual número de águilas que de sello o hay la misma probabilidad de águilas y sellos; con este argumento se puede interpretar que los estudiantes ponen de manifiesto que buscan el equilibrio de la secuencia aleatoria, aún cuando éstas son cortas.

Estudiante 1: a), b), d) *"La moneda está equilibrada me imagino que deben caer igual número de águilas y sello pero de diferente manera"*. Este estudiante parte de la búsqueda del equilibrio en la sucesión en cuanto al mismo número de águilas y sellos en la sucesión, lo que podría estar poniendo de manifiesto su comprensión de la equiprobabilidad teórica que tienen los puntos muestrales del experimento de lanzar una vez una moneda equilibrada, pero dejando de lado un aspecto que en este tipo de situaciones está presente, la independencia de cada lanzamiento respecto a los demás y el espacio muestra del experimento aleatorio compuesto. En este caso particular, el estudiante está poniendo en juego la heurística de representatividad, en términos de la idea que se tiene de lo que es una sucesión aleatoria, en cuyo caso la característica que asocia a este tipo de situaciones es el equilibrio que se debe mantener en la cantidad de águilas o sellos que aparecen en la sucesión, o a través de mantener una frecuencia relativa parecida a la probabilidad de los elementos en la distribución.

Argumento 3): Es cuestión de suerte puede ocurrir cualquiera de las secuencias; en este tipo de argumento se asume que por el hecho de estar ante una situación aleatoria todas las secuencias posibles son igualmente probables.

Estudiante 2: e) "*Como es una situación de azar todas las opciones son igualmente probables"*. La interpretación que se hace a esta justificación del estudiante es que está poniendo de manifiesto la presencia del sesgo de equiprobabilidad.
Después de organizar la información obtenida de las respuestas que proporcionaron los estudiantes, para cada uno de los problemas, se realizó este tipo de análisis.

Conclusiones

De la revisión de los programas de materia de los cursos que contemplan el tema de probabilidad, se pude ver que la estructura que tienen, está orientada a priorizar el desarrollo de la estructura lógico secuencial de la disciplina, más que el desarrollo de las concepciones e intuiciones que el estudiante debe lograr al terminar dichos cursos.

Una proporción muy grande de estudiantes da muestra de desviaciones en su razonamiento respecto a lo que se considera como razonamiento normativo, se pudo ubicar la presencia de los siguientes sesgos: de equiprobabilidad, del enfoque en el resultado aislado, de la insensibilidad al tamaño de la muestra y el de concepciones erróneas de sucesiones aleatorias; estos últimos dos, asociados a la heurística de representatividad.

Lo anterior se presenta a pesar de que los estudiantes ya han rebasado la edad que Piaget propone para los sujetos que están en la tercera etapa. Por otra parte, no se ve diferencia entre el tipo de argumento que utilizan los estudiantes que ya recibieron instrucción del tema respecto a los que no la han tenido. Por lo que es probable, que el tipo de instrucción que han recibido, no esté diseñada para proporcionar a los estudiantes experiencias que les permitan enriquecer sus intuiciones y, por ende, sus concepciones respecto a las ideas básicas relacionadas con el concepto de probabilidad.

Referencias Bibliograficas

Borovcnik, M. y Kapadia R. (1991), *Chance Encounters: Probability in Education*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. (1975), *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Chidren*. Dordrech, Netherlands: Reidel Publishing Company.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studios in Mathematics, No. 6*, 187 - 205.

Kahneman, D.y Slovic, D. y Tversky, A. (1982), *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge University Press.

Konold, C.: (1991), Understanding students' beliefs about probability. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 139-156). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Lecoutre, M.P. (1992), Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. Educational Studies in Mathematics, 23, 557-568.

Piaget, J. y Inhelder, B. (1975), *The Origin of the Idea of Chance in Children*. New York, USA: Norton.

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. y Cañizares, M. J. (1998). Heurísticas y Sesgos en el Razonamiento Probabilístico de los Estudiantes de Secundaria, *Educación Matemática, 10 (1)*, 7 - 25.

El Desarrollo Intelectual y la Resolución de Problemas

María del Valle y Eduardo Mardones
Universidad de Concepción, Facultad de Educación
Chile
mdelvall@udec.cl, emardone@udec.cl
Resolución de Problemas – Nivel Superior

Resumen

La resolución de problemas es una habilidad intelectual que requiere tiempo, maduración, esfuerzo y dedicación. Varios autores han escrito sobre el tema. La mayoría se refieren a cuatro acciones fundamentales, unas de carácter elaborativo, otras de carácter operativo, a las que se debe prestar gran atención. Se relacionan con la comprensión lectora, la identificación del conocimiento matemático, la ejecución de operaciones matemáticas y con el nivel de análisis a desarrollar al evaluar la pertinencia de la solución encontrada. La resolución permanente de problemas desarrolla dichas capacidades y otras, asociadas; pero por otra parte el desarrollo conjugado de dichas acciones generan, la necesidad de reencauzar el proceso evaluativo, bajo este enfoque, la resolución de problemas requiere una mirada de carácter cualitativo.

Introducción

La habilidad para resolver problemas se considera fundamental para la vida del hombre ya que le permite, si no dar solución a sus problemas, al menos vislumbrar sus posibilidades de solución, lo que resulta no frustrante, motivador, generador de autoestima y fortalecedor de saberes.

En un comienzo se pensó que la resolución de problemas estaba sólo vinculada a Matemática, sin embargo, en la actualidad se reconoce que todos los ámbitos de desarrollo del hombre ofrece la oportunidad de resolverlos, por lo tanto este hacer no es privativo de la Matemática.

Muchos autores desde hace mucho tiempo han realizado análisis profundos relacionados con la resolución de problemas y las habilidades requeridas para alcanzar un buen nivel resolutorio; al mismo tiempo se han intentado describir las acciones que son necesarias desarrollar para alcanzar la respuesta a un problema planteado. Autores que van desde prebásica a básica, y desde la adolescencia a la adultés, han descrito mas o menos de la misma forma los caminos a seguir para intentar la resolución de un problema en forma exitosa. Han surgido esquemas bajo la forma de "etapas en la resolución de un problema" (Polya, 1985), o estrategias a utilizar en la resolución de problemas (Hoogeboom y Goodnow, 1987), o acciones a desarrollar en la resolución de un problema geométrico (Landa, 1965).

La verdad es que la resolución de problemas es una actividad intelectual de orden superior que es necesario desarrollar en las personas así no sea llevándolas, en sus primeros pasos, a través del uso de “recetas” que permitan diseñar, bajo la forma de generalización, un modo propio de resolver problemas en el futuro mediato, en donde verdaderamente se puede identificar cruces originales en el hacer resolutorio.

¿Qué es un problema y qué significa resolverlo?

Un problema existe cuando hay tres elementos, cada uno claramente definido: una situación inicial; una situación final u objetivo a alcanzar y restricciones respecto de métodos-actividades, tipos de operaciones, etc. sobre los cuales hay acuerdos previos.

¿Qué implica resolver un problema? Resolver un problema implica realizar tareas que demandan procesos de razonamientos más o menos complejos y no simplemente una actividad asociativa y rutinaria.

¿Cómo resolver un problema? La respuesta a esta pregunta no sólo afecta a la enseñanza de esta disciplina sino a otras, pues, entre las primeras dificultades con las que se enfrenta un alumno, están incluidas tanto la lectura y comprensión de un texto, como el planteo de una situación problemática sea cual fuere el tema de que se trate.

La simbolización de un problema es un aprendizaje constructivo, por lo tanto individual y distinto, en el cual uno utiliza sus propias estrategias.

Dada entonces una situación problemática en particular, el objetivo radica en establecer como se la puede caracterizar con el propósito de intentar modelizarla, cómo se la puede definir en términos de problemas y cómo, encontrada la metodología de la resolución específica, se llega al modelo.

Cuando los problemas que se resuelven son matemáticos o juegos, se tiene la posibilidad de adquirir metodologías de razonamientos permanentes, explicitadas mediante estrategias conducentes a modelizar tales situaciones, esto permite aprovechar los mecanismos de resolución y reutilizarlos en nuevas problemáticas, por lo tanto, resulta importante disponer de un gran número de estrategias o saber generarlas, de modo que, conocidas y comprendidas, se intente transferirlas a los efectos de poder hallar solución a los problemas.

En general, tales estrategias corresponden más a procedimientos heurísticos que a procedimientos algorítmicos.

Teoría

Según una buena parte de los autores que se han dedicado al tema, la resolución de problemas consta de tres etapas o procesos, una etapa inicial que consiste en comprender el problema familiarizándose con él lo más posible; una etapa de producción en la que se ejecuta un plan que permite la solución al problema- y una etapa de enjuiciamiento, verificación o contrastación en que se evalúa la solución generada, contrastándola con el criterio de solución empleado, estableciendo el correcto enlace de todos las acciones realizadas (D'amico, Mangieri y otros, 2000, http://www.uniu.edu.arl-deb/matematlindex.htm).

Según Orton (1990), la resolución de problemas se concibe ahora, normalmente, como generadora de un proceso a través del cual quien aprende combina elementos del conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar solución a una situación nueva.

Las investigaciones más recientes de las capacidades humanas en la resolución de problemas indican que ésta supone tratamiento de la información, una actividad que resulta muy apropiada para las computadoras, especialmente cuando incluye la comprobación de muchas posibilidades. En este contexto, las actividades clasificadas como resolución de problemas en matemática, incluye problemas simples con enunciados verbales, problemas no rutinarios o puzzles, problemas de aplicación de la matemática a situaciones de la vida real, problemas que permitan conducir a nuevos campos de estudio.

Desde el punto de vista del proceso de enseñanza aprendizaje, la resolución de problemas está íntimamente relacionada con el pensamiento reflexivo. Ambos consisten en otorgar a una cosa o materia, una consideración seria y consecutiva, abstrayendo y empleando relaciones significativas. Ambos se inician con una interrogante o problema y tienden a una conclusión o solución. (Cofré A. y Tapia, L. 1997).

La capacidad para razonar o resolver problemas no se presenta inmediatamente en su óptimo nivel. "Existe una cantidad considerable de experimentos que muestran que el pensamiento crítico, el raciocinio, el pensamiento creativo y la resolución de problemas adquieren relevancia mediante los métodos de enseñanza" (Freehill, y otros. 1961) por lo tanto, resulta importante disponer de un gran número de estrategias o saber generarlas, de modo que, conocidas y comprendidas, se intente transferirlas a los efectos de poder hallar solución a los problemas.

En general, tales estrategias corresponden más a procedimientos heurísticos que a procedimientos algorítmicos.

Los pasos, aspectos o fases típicas de la resolución de problemas son similares a los del pensamiento reflexivo. Percibir y solucionar problemas se consideran funciones de los más elevados procesos mentales. En estas consideraciones radica la importancia de solucionar problemas, por lo tanto, debe considerarse como un instrumento primordial para el aprendizaje porque es un proceso de pensamiento y al trabajar la resolución de problemas:

- Se enfatiza la información más que la memorización.
- Se desarrolla la actividad creadora.
- Se desarrollan las habilidades de generalización, transferencia, significado, percepción, intuición, observación, y, formación de hábitos.

Gagné (1970) clasificó la resolución e problemas como la forma más elevada de aprendizaje y desde Dewey (1910), a Shoenfeíd (1988), a Bransford (1990) y desde Polya (1945), a Hadwnard (1945) y Poncaré (1924), ha habido preocupación por esbozar estrategias para la resolución de problemas; en todos estos intentos hay aspectos comunes tales como, la determinación de etapas secuenciadas y la inclusión de preguntas claves.

Polya ofrece un modelo formal centrado especialmente en la aplicación de procesos heurísticos generales: a) comprender el problema-, b) concebir un plan; c) ejecutar el plan, d) examinar la solución. Por otro lado Puig y Cerdan (1988), proponen un modelo siguiendo a Polya, pero más centrado en la resolución de problemas aritméticos escolares: a) lectura; b) comprensión; c) traducción; d) cálculo; e) solución; f) revisión.

El constructo teórico hasta aquí señalado nos da nuevos lineamiento para abordar la resolución de problema a nivel de aula, bajo el prisma de la evaluación.

Evaluación

Es habitual entre el profesorado considerar a la evaluación como un aspecto neurálgico a la hora de enmarcarla dentro de la resolución de problemas, por cuanto, los procesos mentales involucrados, en esta capacidad resolutoria, permite propiciar el desarrollo de habilidades, destrezas y capacidades de carácter cognitivo y metacognitivo en los resolutores, las cuales involucran a los profesores a definir los niveles de logros alcanzados por sus alumnos bajo una perspectiva cualitativa de la evaluación

La evaluación se puede caracterizar como aquella que permite orientar la enseñanza a las necesidades de los alumnos; remediar y regular la acción pedagógica de modo de facilitar

aprendizajes de los alumnos y conocer cómo los alumnos integran y otorgan significado a los conocimientos adquiridos.

Dentro de los aspectos a considerar en la evaluación de las capacidades para resolver problemas, debemos mencionar la comprensión del enunciado, la identificación de variables dentro del problema, la identificación de datos y sus asociaciones, la ejecución de operatorias, el análisis de los resultados, entre otros.

A continuación se sugiere una Pauta para Evaluar Habilidades en Resolución de Problemas.

Pauta para Evaluar Habilidades en Resolución de Problemas

(María del Valle L.; Eduardo Mardones F. Universidad de Concepción - Chile)

Nombre alumno: ______________________________________ Fecha: ____________

Propósito de la Pauta:

- Recolectar información que permita al docente fortalecer las etapas deficitarias en el proceso resolutorio que demuestra cada persona, cuando resuelve un problema.
- Potenciar la autoevaluación por parte de las personas, con el fin de fortalecer su capacidad resolutora como a si mismo brindar la posibilidad del autoanalisis el cual orientará su proceso de retroalimentación.

Instrucciones: De acuerdo a lo observado por Usted señale su apreciación marcando con una X frente a cada aspecto, en la respectiva columna de los conceptos valorativos:

Rasgos	**Categoría de Valoración**			
Habilidad de comprensión del enunciado	**S**	**A/V**	**R/V**	**N**
Solicita aclaraciones respecto del enunciado				
Identifica el contexto del problema				
Se plantea preguntas sobre el problema				
Usa analogías que le ayudan a identificar el significado del problema				

Aplica estrategias esquemáticas para la compresión del problema				
Aplica estrategias nemotécnicas				
Identifica las variables presentes en el problema				
Identifica los datos en el problema				
Discrimina los datos pertinentes de los no pertinentes para resolver el problema				
Habilidad en la generación de un plan	**S**	**A/V**	**R/V**	**N**
Estructura ideas de manera nemotécnica				
Establece asociaciones con experiencias anteriores similares				
Identifica los conceptos involucrados en el problema				
Establece los procedimientos a seguir				
Considera, mentalmente, la secuencia de acciones a seguir				
Elabora, finalmente, un plan de trabajo				
Habilidad en la Ejecución del plan	**S**	**A/V**	**R/V**	**N**
Utiliza conceptos, procedimientos, algoritmos ya establecidos				
Ejecuta las operaciones matemáticas identificadas				
Se asegura que las operaciones matemáticas estén correctamente desarrolladas				
Interpreta los resultados obtenidos				
Concluye en función de la(s) pregunta(s) del problema				
Informa sus ideas por escrito				
Usa terminología, notación y simbología matemática				
Habilidad en la revisión	**S**	**A/V**	**R/V**	**N**
Analiza los procedimientos según el plan trazado				
Presenta las ideas en forma organizada				
Expresa en forma completa y detallada las ideas				
Transfiere información				

Escala conceptual, con cuatro categorías de respuesta

Siempre (S) : Cuando el rasgo se manifiesta de manera permanente	**Rara Vez (R/V)** : Cuando en escasas ocasiones el rasgo se manifiesta
A Veces (A/V) : Cuando el rasgo se manifiesta de manera ocasional	**Nunca (N)**: Cuando el rasgo no se manifiesta.

Consideraciones finales

La habilidad para resolver problemas es una habilidad permanente del ser humano y necesita ser atendida prontamente por la escuela desde sus estadios más tempranos. En este intento permanente y continuo se hibridan complejas tareas de carácter reconstructivo en que saberes, motivaciones, contextos y emociones se conjugan para colaborar con el desarrollo de esta habilidad.

Los modelos de Resolución de problemas han estado presentes en la literatura durante los últimos 50 años. Esto con la intención de centrar la atención en cuatro aspectos fundamentales del proceso de resolución los cuales han sido mencionados de manera similar por todos ellos:

a) La lectura compresiva del enunciado a fin de generar la identificación de las variables presentes en el problema, como los datos que sobre ellos se mencionan, las relaciones entre las variables posibles de identificar y todos aquellos elementos del problema planteado.

b) La elaboración de un plan de acción para dar respuesta a la pregunta del problema. Esta acción implica identificar y recuperar el conocimiento matemático que requiere el problema, tanto en su sentido conceptual como operativo. Sin embargo también implica el establecer variadas vías de solución (cuando esto sea posible).

c) Ejecutar el plan de acción elegido, ello implica el encuentro con un resultado que permite dar respuesta al problema y;

d) El revisar la naturaleza del resultado encontrado y establecer su pertinencia con la pregunta del problema.

Paralelamente a lo anterior debemos destacar que en el ámbito de la resolución de problemas existen a lo menos 2 pilares fundamentales: la lectura compresiva y el dominio de contenido.

El profesorado debe desarrollar un nivel de competencia en el ámbito de la resolución de problema que le permita de manera permanente y progresiva instalar en sus alumnos las capacidades y destrezas requeridas para que estos se conviertan en buenos solucionadores de problemas. Estas competencias están relacionadas, entre otras con:

a) El generar experiencias de aprendizaje que permitan a sus alumnos alcanzar una comprensión cabal del enunciado del problema; esta competencia incluye el plantear preguntas oportunas y pertinentes que colaboren con alcanzar el pleno significado del problema.

b) Plantear a sus alumnos experiencias relacionadas con diferenciar la temporalidad de la adquisición del conocimiento con la aplicación de él en la resolución de problema, puesto que la mayoría de las veces se suelen generar actividades de aprendizaje para instalar un cierto conocimiento matemático e inmediatamente aplicarlo en la resolución de problemas. La verdadera experiencia de aprendizaje para desarrollar habilidad en resolver problemas debería proveerse asociada a los contenidos matemáticos ya revisados (a lo largo de los años de escolaridad; recientemente;……) y no necesariamente asociada a los recientemente adquiridos.

c) Diferenciar claramente ejercicios de problemas puesto que en la literatura disponible circulan con bastante frecuencia enunciados que simulan ser problemas pero que no lo son.

Referencias Bibliográficas

Almeida, C. (1998). *Didáctica de la Resolución de Problemas en la Escuela Media.* Instituto Superior Pedagógico Juan Marinello. Matanza. Cuba. (59)

Cofre A, Tapia L. (1997). *Cómo desarrollar el razonamiento lógico matemático.* Santiago, Chile: Universitaria.

Del Valle, M. (1998). *La enseñanza de matemática en Educación Básica enmarcada en las nuevas tendencias curriculares.* Universidad de Concepción, Concepción, Chile. (59)

Hoogeboom, S. y Goodnow, J. (1987). The Problem Solver. *Activities for Problem-solving strategies..* Sunnyvale, California, Estado Unidos: Creative Publications.

Labarrere S. (1990). *Bases Psicopedagógicas de la Enseñanza de la solución de problemas matemáticas en la Escuela Primaria.* La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Yuste C. y Galve J. (2000). *Progresint/25. Estrategias de Cálculo y Resolución de Problemas.* Madrid. España.

Zamora D. (1998). *Elaboración y Validación de material didáctico que favorezca el desarrollo de habilidades para resolver problemas en niños de Séptimo y Octavo Años de Educación. General Básico* Tesis de Maestría no publicada. Concepción, Chile.

Enseñanza y Comprensión del Enfoque Clásico de la Probabilidad en Primer Grado de Secundaria

Orlando Vázquez
DME, Cinvestav del IPN
México
kepler74@hotmail.com
Probabilidad, Estadística y Combinatoria – Nivel Básico

Resumen

Esta investigación, de carácter cualitativo (Eisner, 1998), es parte de un proyecto relativo a la comprensión de la probabilidad en primer grado de la educación secundaria. El estudio se constituyó en tres fases. La primera correspondió al análisis documental de la propuesta institucional (SEP, 1993) que rige la enseñanza de la probabilidad. La segunda, desarrollada en estudio dirigido y aula alterna, se orientó al docente y a su práctica en el aula mediada por un libro de texto (Filloy, et al., 2001), para propiciar elementos de su iniciación en la crítica de la enseñanza de estocásticos. Los resultados sustentaron la tercera fase, se enfocó al estudiante de aula normal, donde el investigador ejerció la docencia y su autocrítica. Los criterios para efectuar los análisis derivaron de elementos teóricos epistemológicos, sociales y cognitivos.

1. Ejes de la investigación

Esta investigación se interesó en identificar elementos que requiere el docente en situaciones de enseñanza de la probabilidad —enfoque clásico— utilizando como medio el libro de texto (Filloy, et al., 2001); de modo análogo, fueron objeto de estudio las dificultades de comprensión de los alumnos de primer grado de secundaria.

1.1. Epistemología de estocásticos

Modelos explicativos. Heitele (1975) denomina *modelo explicativo* al proporcionado por las principales ideas que interesa enseñar al estudiante a lo largo de toda su educación. En estos modelos están implícitos no sólo nociones y conceptos, sino sus interrelaciones; y se distinguen en los distintos niveles cognoscitivos, no de manera estructural, sino en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración" (p. 3). Son diez ideas las que propone: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de adición, regla del producto e independencia, equidistribución y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, idea de variable estocástica, ley de los grandes números, y la idea de muestra (p. 22).

1.2. Elementos sociales. La interacción en el aula

De acuerdo con Piaget e Inhelder (1951-1954), el desarrollo mental operatorio pasa por tres etapas: pensamiento preoperatorio (2 a 7 años), operaciones concretas (7 a 12 años) y operaciones formales (12 a 14 años) (Piaget e Inhelder, 1951, pp. 212-245). A este respecto, Steinbring (1991), señala que la epistemología del conocimiento matemático está determinada en gran medida por condiciones sociales; la participación del docente, las actividades que realiza el alumno y el conocimiento matemático determinan, con mucho, el proceso de enseñanza, en el cual interactúan tanto quien enseña como quienes aprenden.

1.3. Elementos de cognición

Piaget e Inhelder (1951) puntualizan que la idea de azar no es innata. Estos autores argumentan que la idea de azar se inicia cuando el infante accede a la etapa de las operaciones concretas. De sus estudios resulta que las operaciones combinatorias no se desarrollan sino hasta el nivel del pensamiento formal, al igual que la idea de proporción, lo cual permite el inventario completo de posibilidades (espacio muestra) y la cuantificación de sus probabilidades. Sin embargo, Fischbein (en Colín, et al., 1993) critica estos resultados señalando que no todos los sujetos de esta edad son capaces de descubrir el método de construcción de combinaciones y considera que, aún en el nivel de las operaciones formales, las técnicas combinatorias no se adquieren espontáneamente, por lo que su enseñanza es necesaria.

La obra de Fischbein (1975) en el campo de la comprensión de ideas probabilísticas constituye una referencia importante para estudios de probabilidad, pues plantea que "La enseñanza en estocásticos no sólo es posible, sino necesaria en niveles educativos tan tempranos como lo son los básicos [preescolar, primaria y secundaria]. La ausencia de una enseñanza en tales niveles redundaría en el arraigo de intuiciones erróneas, que con la edad vienen a ser más y más difíciles de erradicar" (en Colín, et al., 1993).

Del procesamiento de la información a la conciencia. Frawley (1999) plantea que la experiencia subjetiva se presenta de tres formas: el procesamiento no consciente, la conciencia y la metaconciencia. La primera de ellas ocurre cuando los estudiantes dan una respuesta de manera rápida (contestación automática), sin importar que ésta sea correcta o que se haya comprendido o no (Frawley, pp. 155-156). La segunda "ocurre cuando un sujeto parece estar interpretando sobre la experiencia" (op. cit. p. 157). El tercer tipo de subjetividad se refiere a "la toma de conciencia y la organización deliberada de la experiencia" (p. 157); es la conciencia de la experiencia; ésta cobra importancia pues establece el diálogo interno por medio del *habla privada* o *lenguaje para el pensamiento*.

2. Objeto de estudio, elementos y criterios de análisis

La presente investigación está conformada por tres fases a saber.

2.1. Primera fase: Propuesta institucional para la enseñanza de probabilidad en primer grado de secundaria. Se realizó un análisis curricular de la propuesta institucional para la enseñanza de probabilidad en primer grado de secundaria. Por propuesta institucional consideramos el conjunto de medios que se le brindan al profesor de matemáticas para llevar a cabo su misión, que es la de enseñar los temas relacionados con esta asignatura. En el marco de esta investigación se consideraron aquéllos que se relacionan con la probabilidad para primer grado de secundaria. Tal propuesta está constituida por el *Plan y Programas de Estudio para la Educación Secundaria* vigente (SEP, 1993), *Libro para el Maestro* (Alarcón, et al., 1999), *Secuencia y Organización de Contenidos* (Alarcón, et al., 1997), *Fichero de Actividades Didácticas* (Espinosa, et al., 2000), y libros de texto. De éstos, se analizaron entre otros los de la propuesta de Filloy, et al. 2001.

2.2. Segunda fase: *Estudio dirigido* y *aula alterna*. Con las lecciones de probabilidad en un libro de texto (Filloy, et al., 2001, pp. 219-235) como referente, la *segunda fase* se orientó a la docencia en secundaria, en el marco de sesiones de *estudio dirigido*. Este espacio cumplió una función metodológica específica, es decir, estableció condiciones para ir al aula, y en el aula se hizo un seguimiento en el proceso de enseñanza. Estas sesiones tuvieron como propósito estudiar con un grupo de profesores en servicio frente a grupo de nivel secundaria elementos de estocásticos para su práctica en el aula; hacer una indagación y luego una investigación en el aula para la comprensión de la enseñanza de la probabilidad. El segundo propósito fue formarse conjuntamente y propiciar elementos de iniciación en la crítica de la enseñanza de estocásticos, entendiendo ésta no sólo como la práctica del docente, sino en un sentido más amplio en lo propuesto institucionalmente (SEP) en libros de texto y materiales. En forma simultánea, uno de los docentes participantes desarrolló una estrategia utilizando el mismo libro de texto para la enseñanza en el aula, a la cual se denominó *aula alterna*. Este espacio ofreció condiciones de posibilidad de alternativas para el perfil del docente mediante la actualización y la reflexión sobre la indagación. De esta forma, mantener el proceso de enseñanza de manera dinámica requirió de la interacción entre docencia e investigación, al grado de que algunas veces la investigación estuvo más orientada hacia el docente. Lo anterior dio cabida a la apertura de la interacción estrecha entre el profesor titular, el conductor en estudio dirigido (observador) y alumnos. Así se ofreció un primer acercamiento en el análisis de la crítica de la enseñanza.

2.3. Tercera fase: aula normal. Estuvo orientada al estudiante en cuanto a su comprensión del enfoque clásico de probabilidad, luego de la enseñanza propuesta para primer grado de secundaria con 10 alumnos (11 a 13 años de edad) del turno vespertino de una escuela pública del Distrito Federal. Se diseñó un cuestionario de exploración con 10 problemas de probabilidad referidos al enfoque clásico. Este instrumento fue aplicado previamente a 15 sesiones de enseñanza de 50 minutos cada una. Posterior a las sesiones de enseñanza se administró nuevamente el mismo cuestionario, sin cambio alguno, para identificar posibles variaciones en el desempeño de los estudiantes. En lo que se refiere a la *enseñanza*, se utilizó el libro de texto empleado también en la segunda fase. Tres meses después de esa enseñanza se entrevistó a un alumno para profundizar en el tipo de respuestas otorgadas.

3. Criterios de análisis

Los elementos teóricos derivaron en criterios de análisis de la información, tanto documental como recopilada. Para el *análisis de los medios* se consideró: situación planteada, ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, términos de estocásticos utilizados, recursos para organizar y tratar la información.

3.1. *Instrumentos para la recopilación de información y técnicas*. Se empleó un guión de observación para estudio dirigido y aulas; para tener mayor evidencia al respecto de cada una de las sesiones en *aula alterna*, el profesor informó por escrito de las actividades desarrolladas con cada una de las lecciones respecto a los siguientes aspectos: tempo-ralidad, propósito, contenido matemático tratado con la lección, estrategias utilizadas en el desarrollo de la lección en el aula, dificultades identificadas en la enseñanza según lo propuesto en la lección, dificultades identificadas en los estudiantes ante la puesta en juego de la lección, y comentarios. Se aplicó un cuestionario y un guión de entrevista en aula normal.

Para la segunda y tercera fases, los criterios utilizados se asentaron en el análisis de las lecciones para caracterizar las dificultades en la enseñanza y en la comprensión de los estudiantes. La indagación de *estudio dirigido*, *aula alterna* y *aula normal* se dirigió a las escenas registradas en video grabaciones y en sus transcripciones como material bruto para interpretarlas y analizarlas (Eisner, 1998, p. 220), y para identificar convenciones para la interacción social entre el profesor y el estudiante (Steinbring, 1991, p. 6).

4. Análisis curricular de la propuesta institucional: el caso de la probabilidad

Plan y Programas de Estudio (SEP, 1993). Los temas del programa están agrupados en cinco áreas, a saber: Aritmética, Álgebra, Geometría (en el tercer grado se agrega trigonometría), Presentación y tratamiento de la información y Nociones de probabilidad. Si bien los Planes y Programas de estudio vigentes hacen énfasis en no dejar al último los temas de probabilidad, no ha cambiado el lugar que en ellos se les destina. Desde la edición de 1975 hasta la actual (1993), los contenidos de probabilidad siempre se han presentado en el último lugar (Galván, 1996); tal se les presenta también en el *Libro para el Maestro* (1999, p. 361).
Libro para el Maestro de Matemáticas. En este medio institucional se enfatiza la ventaja de usar tablas y gráficas, ya que estos recursos "proporcionan a los alumnos elementos útiles para comparar y establecer relaciones entre los tratamientos probabilistas y estadísticos de situaciones aleatorias" (Alarcón, et al., 1999, p. 382). En este medio no se incluyen de manera íntegra las recomendaciones de Heitele (1975), ni se le da crédito a su propuesta, aunque se insinúa su propuesta de ideas fundamentales de estocásticos en una argumentación que no parece referirse a las interrelaciones entre ellas.

Propuesta utilizada en el libro de texto para la enseñanza de la probabilidad. Del análisis realizado del libro de texto citado, resultó que "sólo cuatro lecciones parecen ser insuficientes para satisfacer las necesidades del acercamiento a lo aleatorio en este grado" (Vázquez, 2003, p. 52). También, la variedad de recursos para el desarrollo de las lecciones es desaprovechada por el formato del texto —a dos columnas— el cual interrumpe las argumentaciones y es incompatible con el formato —a lo ancho de la página— de figuras, tablas y gráficas.

5. La enseñanza del enfoque clásico y su influencia en la comprensión de estudiantes

Enseñanza en aula normal y un referente. Con el fin de explorar los conocimientos del enfoque clásico de la probabilidad en los alumnos se aplicó un cuestionario de exploración con 10 problemas de opción múltiple y solicitud de justificación de la elección. Los tipos de justificación dada, fueron analizados con base en elementos de la perspectiva teórica expuesta: de *marco* (alude a la experiencia del sujeto), *azar* (advierte su intervención), *determinista* (inadvertencia del azar), *frecuencial* (cuando alude al número de veces que se realiza el ensayo), *alternancia* y *recencias* (positiva o negativa), y *clásico* (advertencia del número de casos favorables entre el total de casos igualmente posibles).

5.1. Resultados generales del cuestionario

Análisis de respuestas de las aplicaciones inicial y final del cuestionario de exploración. Como un ejemplo del tipo de preguntas planteadas en el instrumento y del análisis realizado de las respuestas, nos referiremos sólo a los resultados del primer problema antes y después de haberse desarrollado las lecciones ya referidas.

1.En dos volados consecutivos, ¿cuál es la probabilidad de obtener sólo águilas?

a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\mathbf{\frac{1}{4}}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 0

La respuesta correcta informa si el alumno identifica para dos volados consecutivos el espacio muestra del fenómeno, la independencia de los ensayos y si tiene noción de la regla del producto de probabilidades.

Condiciones iniciales. *Resumiendo*, cinco de los diez alumnos constataron de manera semejante, advirtieron el espacio muestra del fenómeno para situaciones sencillas como el problema 7 planteado en el cuestionario (Vázquez, 2004, pp. 166-167) referente al lanzamiento de una moneda. Uno de los diez estudiantes dio la respuesta correcta (inciso b), pero su justificación reveló la estrategia de *alternancia*.

Condiciones finales. *Resumiendo*, un alumno eligió la opción *a* y elaboró un diagrama de árbol para cuatro volados consecutivos (ver Figura 5.1). Para el inciso *b*, seis estudiantes justificaron su respuesta en términos del *enfoque clásico* de la probabilidad. Un estudiante no realizó diagrama de árbol, pero enlistó el espacio muestra del fenómeno, de acuerdo con Frawley (1999) pasó de la etapa del *procesamiento no consciente* a la *conciencia* (ver Figura 5.2); un cuarto estudiante elaboró un diagrama de árbol y además estableció el espacio muestra de manera correcta, por lo que de acuerdo con Frawley (1999) puede argumentarse que este sujeto pasó del *procesamiento no consciente* a la *metaconciencia* (ver Figura 5.3).

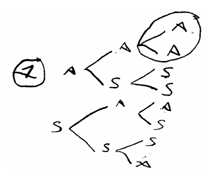


Figura 5.1. Procesamiento no consciente.

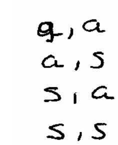


Figura 5.2. Del procesamiento no consciente-conciencia.

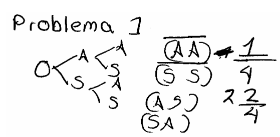


Figura 5.3. Del procesamiento no consciente a la metaconciencia.

Comentarios generales. Los resultados de la segunda aplicación, indican que las situaciones de enseñanza influyeron en el tipo de respuestas de los alumnos en ambos problemas. De la experiencia derivada con la puesta en juego de las lecciones ya referidas, se recomienda que para la escuela secundaria, y en particular para primer grado, no enfocarse desde el principio en realizar cálculos, sino que es mejor favorecer la comprensión de las nociones básicas de la probabilidad. Conviene considerar las experiencias surgidas de la interacción en el salón de clases a medida que se estudien los diferentes temas de probabilidad, pues es una manera de propiciar el desarrollo de las ideas fundamentales. Por otra parte, es necesario considerar la continuidad en el estudio de estocásticos a lo largo de los niveles educativos con la finalidad de promover una comprensión de las ideas fundamentales, ya que en particular las de probabilidad no se tratan de manera sistemática en los planes y programas de estudio del Sistema Educativo Nacional (Ojeda, 1986).

Referencias Bibliográficas

Alarcón J., Bonilla E., Nava R., Rojano T. y Quintero R. (1999). *Libro para el maestro.* Educación secundaria. Matemáticas. Subsecretaría de Educación Básica y Normal. Dirección General de Materiales y Métodos Educativos. México: SEP.

Alarcón J., Arriaga A., Barrón H. y Rosas R. (1997). *Secuencia y Organización de Contenidos*. Educación secundaria. Matemáticas. Subsecretaría de Educación Básica y Normal. Dirección General de Materiales y Métodos Educativos. México: SEP.

Colín J., Garnica I. y Ojeda, A. (1993). *Intuición y Probabilidad desde el punto de vista de Fischbein.* Cuadernos de Investigación No. 26 Año VII. Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas. Cinvestav del IPN. México.

Eisner E. (1998). *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. España: Paidós.

Espinosa H., García S. y García M. (2000). *Fichero de actividades didácticas.* Educación secundaria. Matemáticas. Subsecretaría de Educación Básica y Normal. Dirección General de Materiales y Métodos Educativos. México: SEP.

Filloy E., Figueras O., Ojeda A., Rojano T. y Zubieta G. (2001). *Matemática Educativa. Primer Grado.* México: McGraw-Hill.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children.* D. Reidel Publishing Company, USA.

Frawley W. (1999). *Vygotsky y la ciencia cognitiva*. (Trad.: Arnáiz, Víctor M). España: Paidós.

Galván M. (1996). *Nubes y relojes en los currícula de secundaria.* Tesis de maestría. DME. Cinvestav. México.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6 pp. 187-205. Reidel, Holland. (Traducción al español para uso del Seminario de Probabilidades y Estadística. Ojeda A. (1993). DME, Cinvestav del IPN. México).

Ojeda A. (1986). *La enseñanza de la probabilidad: una proposición audiovisual*. Tesis de maestría. Cinvestav del IPN. Sección Matemática Educativa. México.

Piaget J. & Bárbel I. (1951). *The Origin of the Idea of Chance in Children* W.W. Norton & Compañy Inc. New York, 1975.

SEP. (1993). *Plan y Programas de Estudio 1993*. Educación Básica. Secundaria. Subsecretaría de Educación Básica y Normal. Dirección General de Materiales y Métodos Educativos. México.

Steinbring H. (1991). The Concept of Chance in Eviryday Teaching: Aspects of a social Epistemology of Mathematical Knowlegde. *Educational Studies in Mathematics* 22: 503-522. Kluwer Academic Publishers. Holland. (Traducción de trabajo para uso interno: Garnica I. y Ojeda A. Seminario de Probabilidades y Estadística, DME, Cinvestav del IPN. México).

Vázquez O. (2003). Situaciones y medios para la enseñanza: Probabilidad en el primer grado de secundaria. *Tareas de indagación* (*Enseñanza y estocásticos en el aula*). Cinvestav del IPN. México.

Vázquez O. (2004). Enseñanza y comprensión del enfoque clásico de la probabilidad en primer grado de secundaria. Tesis de maestría. DME, Cinvestav. México.

El Papel de las Representaciones en el Éxito de la Resolución de Problemas

José Luis Villegas, J. Roberto García y Enrique Castro
Universidad de Los Andes, Universidad Michoacana de Sn. N.de Hdgo, Universidad de Granada
Venezuela, México, España
joselovi@ugr.es
Resolución de Problemas — Nivel Superior

Resumen

El presente trabajo forma parte de un estudio mas amplio (Villegas, 2002), él cual estaba dirigido a describir el papel que desempeñan las representaciones empleadas por estudiantes expertos cuando resuelven problemas de optimización. Para cumplir el objetivo propuesto se utilizó el análisis de protocolos de pensamiento en voz alta. Las producciones generadas fueron transcritas e interpretadas aplicando un marco para el análisis de protocolos, el cual fue adaptado de Schoenfeld (1985). Se consideraron tres tipos de representación (verbal, pictórica y simbólica) y las conversiones entre ellas. A través de un análisis de caso, esta comunicación pone de manifiesto que la metodología aplicada posibilita la identificación de características relevantes de los resolutotes exitosos, con relación al empleo de las representaciones en la resolución de problemas.

Introducción

Una característica de la inteligencia humana es el uso de diferentes tipos de representación, con fines lúdicos, normativos, comunicativos, artísticos, literarios,…esta característica nos diferencia de los animales y de la inteligencia artificial. Esto conlleva a que se realicen numerosas investigaciones sobre el papel de las representaciones en el aprendizaje de las matemáticas y en la resolución de problemas (Duval, 1998; Hitt, 2001). Como resultado de estas investigaciones se considera indiscutible la importancia de las múltiples representaciones en el desarrollo del pensamiento matemático. El interés sobre el papel que juegan las representaciones en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, también queda de manifiesto en diferentes obras y reuniones científicas de investigadores en didáctica de las matemáticas (Couco & Curcio, 2001; Goldin & Janvier, 1998; NCTM, 2000).

Mediante diversos medios de expresión los seres humanos nos familiarizamos y aprendemos un sin número de códigos, símbolos, señales, iconos y lenguajes de diversa naturaleza. El poder heurístico y de comunicación que nos dan esos elementos representativos a la actividad humana aumenta en la medida en que dichos medios de expresión se integran formalmente en sistemas complejos de simbolización sometidos a reglas sintácticas y gramaticales. Los sistemas de representación reúnen unos requisitos de complejidad, interrelación y poder de simbolización y abstracción cuyo dominio amplía y enriquece la inteligencia humana en cuanto son instrumentos útiles de modelización de la realidad y herramientas practicas para la resolución de diferentes tipos de problemas de la vida real.

En este trabajo se describe, a través de un análisis de caso, las representaciones usadas por un grupo de universitarios cuando resuelven un tipo específico de problemas de optimización cuyas posibilidades de representación y modelización de situaciones es múltiple y variada. Como hemos visto, el término representación es de gran importancia dentro de la psicología y de la didáctica de la matemática. Sin embargo, es complejo y está abierto a muchas interpretaciones, para nosotros el término representación se refiere a todas aquellas formas con que hacemos presentes los objetos o procesos matemáticos, y nos es esencial para definir, explicar y ostentar, así como para registrar y comunicar el conocimiento matemático.

Representaciones y resolución de problemas

A lo largo de las dos últimas décadas se ha puesto de manifiesto el elevado consenso que existe en la comunidad investigadora sobre el buen uso de las representaciones y de la conversión entre representaciones por parte de los estudiantes y su éxito como instrumento al servicio de la resolución de problemas. Por tanto, debemos tener claro que, si bien es importante poseer varias representaciones de un concepto, la pura existencia de estas no es suficiente para permitir un uso flexible del concepto en la resolución de problemas. Kaput (1992) afirma que la habilidad para vincular diferentes representaciones ayuda a revelar explicita y dinámicamente las diferentes facetas de una idea compleja. De tal manera que, en la resolución de problemas, se necesita tener la posibilidad de cambiar de una representación a otra, cuando la otra sea más eficiente para el nuevo paso que queremos tomar (Dreyfus, 1991).

Diversas investigaciones (Hitt, 2001; Lesh, Post & Behr, 1987) señalan que el éxito de los resolutores de problemas competentes se debe a varios factores, entre otros, tener un buen conocimiento de las diferentes formas de representar un concepto, poseer habilidad para construir representaciones apropiadas para situaciones de resolución de problemas, usar esas representaciones como ayuda para entender la información, articular sin contradicciones esas representaciones y recurrir a ellas en forma espontánea durante la resolución de problemas.

Metodología y Análisis

El método empleado en esta investigación para la recolección de datos es el análisis de protocolos (Ericsson & Simon, 1993). Entendiéndose por protocolo, la descripción ordenada cronológicamente de las actividades que un sujeto desarrolla mientras ejecuta una tarea de resolución de problemas. En este método, los sujetos resuelven un problema y los datos son principalmente las verbalizaciones que realizan durante la resolución con algunos comentarios y observaciones del investigador. Ocasionalmente, también pueden realizarse observaciones conductuales (Ginsburg, Kossan, Schwartz & Swanson, 1983). Los sujetos que han participado son estudiantes de quinto año de la Licenciatura de Matemáticas, especialidad Metodología de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, del curso 2001-2002.

Instrumento

En principio se construyó una batería de problemas de optimización siguiendo los siguientes criterios: que estuvieran en los libros de textos de nivel universitario, que fueran problemas matemáticos del mundo real, con enunciado estrictamente "narrativo"y adecuados para estudiantes de primer año de la Universidad de carreras como Ciencias e Ingeniería, que necesitaran para su resolución el empleo de varias representaciones y no fuese preciso el uso de calculadoras. Los problemas seleccionados se sometieron a consideración de algunos investigadores y licenciados en matemáticas que opinaron acerca de la pertinencia de estos en el estudio a realizar y si eran adecuados para los sujetos a participar en el estudio. Con estas opiniones se seleccionaron cuatro problemas, con los que se efectuó una prueba piloto. Como consecuencia de esta prueba, se decidió conservar sólo 3 problemas.

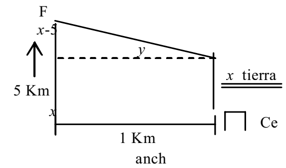
Recogida y Análisis de Datos

Cada uno de los estudiantes, resolvieron los tres problemas en una sesión de aproximadamente 90 minutos, en la cual solo estuvieron presentes el investigador y un asistente de investigación. Ambos actuaron como observadores durante el proceso, haciendo anotaciones adicionales para complementar los registros de audio y vídeo. Los problemas planteados fueron resueltos en voz alta, tratando que el investigador interviniera lo menos posible en el proceso de resolución, (Gindburg et al., 1983; Schoenfeld, 1985). Las pocas intervenciones efectuadas ocurrían cuando el resolutor se quedaba en silencio durante un período largo de tiempo, o estaba "dándole vueltas" al problema sin encontrar salida, y el investigador consideraba que era más importante para su estudio "encaminarlo" hacia la solución, ya que esto produciría mayor información. La elección de estas pautas, no se hicieron por casualidad, tienen un sustento teórico, están justificadas de acuerdo a cinco variables (Schoenfeld, 1985b; Villegas, 2003): número de personas siendo grabadas, grado de intervención, la naturaleza y los grados de libertad en la instrucción y la intervención, la naturaleza del entorno y cuan confortable se siente el sujeto con él, y la variable tarea.

El análisis de los protocolos se realizó usando un marco, el cual es una adaptación del realizado por Schoenfeld (1985a). En nuestro análisis, se observó el empleo de las representaciones y la conversión por parte de los estudiantes cuando resuelven problemas de optimización. Para esto se tomó en cuenta tres tipos de representación: *verbales* (enunciado del problema), *pictórica*s y *simbólicas*, así como las conversiones entre ellas.

El número de episodios establecidos para el marco fue de 7, tres proporcionados por las representaciones, otros tres de las conversiones entre representaciones y uno correspondiente a 'otros', no asociados a representaciones (Villegas, 2002; Villegas & Castro, 2002). Con este marco para el análisis de protocolos de resolución de problemas se analizaron las transcripciones generando un protocolo escrito, a este protocolo le fue anexado el trabajo realizado por el resolutor en la sesión de resolución de problemas, para hacer esto, el investigador observaba nuevamente el vídeo, e iba correlacionando, las verbalizaciones realizadas con el material escrito en la sesión de la resolución de problemas. Esto se intento hacer lo más parecido posible a lo que el resolutor había hecho en la sesión, de tal forma que al observar el documento, se "perciba" lo que él estaba realizando en cada instante de la resolución. Aunado a esto, a la transcripción definitiva también se le colocó el tiempo en el que comenzaba y finalizaba cada ítem (ver Cuadro 1)

06:36
38. si esto es x, esto es $5 - x$, y esto es y



06:42
39. como esto es lo que quiero que sea mínimo

$c = 3y + 5x =$ f mínimo

06:44
40. voy a hallar la relación que existe entre x e y,

Cuadro 1 Fragmento del protocolo escrito del resolutor

Los resultados fueron reportados en forma de análisis de caso, esto consiste en realizar una interpretación del trabajo efectuado por los resolutores. El análisis es presentado en forma de narración con una serie de comentarios interpretativos y soportados por algunos ítems ilustrativos. Para su elaboración se han tomado en cuenta, los protocolos verbales (donde se consideró: tono de voz, duración de las pausas, etc.), las imágenes de video, el tiempo en cada representación, la frecuencia de uso de las representaciones, así como la "revisión" de los trabajos escritos elaborados por los resolutores en su intento de resolución de los problemas (Villegas, 2002). En este análisis de caso se puede observar la conducta del resolutor frente al problema, su competencia en el uso de las representaciones, su habilidad para hacer traslaciones entre varias representaciones y cómo, la planificación, el monitoreo, el control y las "afectividades locales" (Goldin, 1998) son generadores de éxito, o bien, creadores de obstáculos en la resolución de problemas.

A continuación presentamos un extracto[1] correspondiente al análisis de caso realizado a uno de los sujetos participantes en su intento de solución del siguiente problema: "*A un lado de un río recto de 1 Km de anchura hay una central eléctrica y al otro lado 5 Km corriente arriba una factoría; su dueño desea tender un cable desde la central eléctrica hasta la factoría, él sabe que tender cable por tierra cuesta 3 euros por metro y tenderlo por agua cuesta 5 euros por metro. ¿Cuál será la trayectoria del tendido que le resulta más económica?.Si el cable por tierra tiene el mismo precio que el cable por agua, ¿Cuál será la trayectoria?*"[2], es importante reseñar que este sujeto resolvió con éxito los tres problemas que le fueron planteados en la sesión de resolución de problemas.

Análisis de caso: Problema 1 Resolutor C

El resolutor comienza con un breve episodio de lectura; expresa la intención de iniciar

[1] Los cuatro primeros minutos, de un total de 24 minutos 26 segundos que el resolutor invirtió en su intento de solución del problema 1.

[2] Los otros dos problemas propuestos fueron los siguientes:
P2: Se desea construir una ventana rectangular coronada por un semicírculo (el ancho del rectángulo ha de ser igual que el del semicírculo). Cual es la ventana que admitirá la mayor cantidad de luz posible, si su perímetro ha de ser fijo.
P3: Un espejo rectangular de dimensiones 80 y 90 cm. Se rompe por una esquina en línea recta. De los dos trozos que quedan, el menor tiene una forma de triángulo rectángulo de catetos 10 y 12 cm., correspondientes, respectivamente, a las dimensiones menor y mayor del espejo. ¿Cuál es el espejo rectangular más grande que se puede obtener del trozo mayor?

la resolución del problema «¿puedo empezar a escribir ya, no?», pero continúa con la lectura sin realizar otra representación del problema. Cuando termina la lectura del enunciado, manifiesta su intención por realizar una representación pictórica «voy a pintar»(4). Este episodio fue catalogado como de verbalizaciones de tipo afectivo.

Enseguida C realiza una representación pictórica directamente del enunciado, comienza a través del dibujo a representar la situación, verificando la relación que existe entre su "dibujo" y el enunciado -«anchura, corriente arriba» (7)-, simultáneamente a la verbalización señala con su mano el dibujo mientras lee nuevamente el problema.

C manifiesta no entender el problema y vuelve a leer gran parte del enunciado. Al finalizar, verbaliza una especie de plan -«esto es una mezcla entre tierra y agua, vale, una función de optimización» (9)-, aunque de lo que habla, por supuesto, no es una "función de optimización", se deduce que lo que quiere decir es que es un problema de optimización. Enseguida, comienza a asignar variables a las posibles formas de "tender el cable" y al final vuelve a leer la pregunta formulada en el enunciado -«... por metro ¿cuál será la trayectoria del tendido que resulta más económica?» (13)-, esto con el fin de asegurarse de no desviar su cometido.

C plantea la ecuación de la trayectoria del tendido directamente de la representación pictórica que había realizado -« la trayectoria del tendido será ... $y+x$ metros, que sea mínimo» (14)- y aunque la plantea erróneamente ya que olvida considerar el precio del cable, demuestra destreza en la conversión entre la representación pictórica y la representación simbólica.

La ecuación formulada la relaciona inmediatamente con el enunciado usando palabras de su lenguaje personal -«esto es lo que me preguntaban, ¿cuanto es el y más x que te haga la distancia mínima?» (15)-, como se puede observar existe una gran capacidad en el resolutor para realizar las traducciones entre representaciones, moviéndose apropiadamente entre las tres representaciones en un breve período de tiempo (menos de 20 segundos).

Paso siguiente, plantea la necesidad de relacionar la x con la y observando la figura realizada previamente -«vamos hallar una relación entre x e y, donde x es por tierra e y es por agua» (16)- esto no es tan claro para él, entonces relaciona la figura con el enunciado buscando ideas que le sugieran el camino a seguir, no las encuentra, se desespera un poco - «.... ¡madre mía!, x por metros, que sea mínimo» (18)-, se da cuenta de que los cables tienen diferentes precios y construye la función de coste (con los precios invertidos ¿culpa de los nervios?) y verbaliza una expresión de planificación -«.... tengo que y, si pongo x en función de y, y optimizo, obtengo un mínimo, calculo cuanto vale y en función de x» (22)-.

De la función de coste formulada: despeja y en función de x -«obtengo que $y=-5x/3$» (23)-, para hacer esto ¿supuso que el coste es cero?, ó ¿los nervios vuelven a jugar un papel fundamental?

03:24 20. entonces, el coste total será 3y euros, 5x euros	Coste total $\begin{matrix} 3y\in \\ 5x\in \end{matrix}$
03:52 21. en total son $3y+5x$, ¿cuando es mínimo esta función?	$c=3y+5y=f$ mínimo

Manifiesta de nuevo incertidumbre, recordando, primero y luego leyendo el enunciado del problema y además verbaliza relaciones entre una expresión simbólica y el enunciado buscando dos cosas: la solución del problema y lograr tranquilizarse.

C deriva la función de y encontrada y la relaciona mentalmente con una representación pictórica, -«en donde el mínimo es una recta» (30)-, -«... el mínimo se alcanzaría... rápidamente...

$y' = -\frac{5}{3}$,» - (31), cometiendo con lo anterior graves errores, de los cuales se percata rápidamente y se propone leer el problema de mejor manera -«leo despacio el problema» (33)-, lee de nuevo el problema, notándose esta vez una mayor concentración en la lectura.

Cuadro 2 Análisis de caso: Problema 1 Resolutor C

Caracterización del Resolutor

El análisis realizado proporcionó una vasta información acerca del resolutor, con la que caracterizamos su actuación. Este estudiante fue etiquetado como resolutor competente debido a su habilidad para usar los conceptos y las herramientas matemáticas en una manera hábil y no necesariamente por resolver siempre de manera correcta los problemas. A continuación se presenta la descripción del resolutor:

> *Estudiante con mucha destreza para hacer traducciones entre varias representaciones con precisión y eficacia. Claro entendimiento del tipo de información que revela una conversión. Habilidad para darse cuenta de la relevancia de los datos, relaciones y hechos expresados en el enunciado del problema ó revelados por una conversión ó representación. Capacidad para extraer información de una representación y usarla en otro tipo de representación. Destreza en el trabajo con más de una representación y con capacidad de trabajo con más de dos representaciones el mismo tiempo.*

Podemos observar que su competencia en la resolución de problemas esta íntimamente ligada a habilidad con que maneja las representaciones y la conversión entre representaciones.

Reflexiones Finales

A través de un análisis de caso, esta comunicación pone de manifiesto que la metodología aplicada posibilita la identificación de características relevantes de los resolutotes exitosos, con relación al empleo de las representaciones en la resolución de problemas. El estudio aportó datos que nos permiten considerar que el éxito de los resolutotes de problemas esta íntimamente ligado al dominio de diferentes formas de representar un problema y a la habilidad para traducir entre representaciones, es decir, entre otras, a la comprensión del enunciado del problema, su habilidad para construir representaciones apropiadas, utilizar estas representaciones para estructurar y ejecutar un plan, así como para realizar actividades metacognitivas.

Consideramos importante tener en cuenta de una manera detallada los efectos de la afectividad en el proceso de resolución de problemas, cuales son sus influencias en la regulación de la metacognición y en el uso de las diferentes representaciones.

Referencias Bibliográficas

Couco, A., y Curcio, F. (2001). *The roles of representation in school mathematics*. Reston: VA: NCTM.

Dreyfus, T (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Netherlands: Kluwer Academic Publishers

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ericsson, K.A. y Simon, H.A. (1993). *Protocol analysis. Verbal reports as data*. Cambridge, MA: MIT Press.

Ginsburg, H.P., Kossan, N.E., Schwartz, R. y Swanson, D. (1983). Protocol methods in research on mathematical thinking. En H. Ginsburg (Ed). *The development of mathematical thinking*. (pp. 7-47). New York: Academic Press Inc.

Goldin, G. y Janvier, C. (Eds.) (1998). PME Working Group on Representations. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (1) y (2).

Goldin, G. (1998).Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of mathematical behaviour*, 17(2), 137-165.

Hitt, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas en un proyecto de investigación en educación matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al Profesor Mauricio Castro.* Granada: Universidad de Granada.

Kaput, J.J. (1992). Technology and mathematics education. En D.A. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 515-556). Reston, VA: NCTM; New York: Macmillan.

Lesh, R., Post, T., y Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. En C. Janvier (Ed.). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press Inc.

Villegas, J. L. (2002). *Representaciones en resolución de problemas: Un marco de análisis de protocolos.* Trabajo de Investigación Tutelada. Granada: Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Villegas, J.L. y Castro, E (2003). Pensamiento en voz alta en la resolución de problemas. En Castro, Flores, Ortega, Rico y Vallecillos (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. VII SEIEM*. UGR.: Granada. España.

Villegas, J.L. y Castro, E (2002). Marco para el análisis de protocolos de resolución de problemas de optimización. En Cardeñoso, Castro, Moreno y Peñas (Eds.). *Resolución de Problemas.* Granada: Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Categoría 2:

El Pensamiento del Profesor, sus Prácticas y Elementos para su Formación Profesional

Introducción

En esta categoría, hemos reunido los trabajos que ponen atención al pensamiento del profesor, su práctica profesional, así como a algunas acciones realizadas para la formación de nuevos profesores y algunas otras dirigidas a la actualización de los que están en activo. Las modalidades tanto en la formación como en la actividad docente de los profesores de matemáticas y la problemática que enfrentan, es amplia y diversa, ante esto, distintos grupos de investigadores, unidos por proyectos institucionales, regionales o bien, por afinidades teóricas, han abordado el estudio de esos problemas, con variados recursos teóricos y metodológicos, dirigiendo su atención a entender el pensamiento del profesor y su práctica profesional, además de elaborar creativas formas de actualización para la renovación de dicha práctica. Estos trabajos dan muestra que la comunidad de investigadores latinoamericanos reconoce el papel principal que tiene el profesor en las acciones que buscan mejoras en el proceso de adquisición del saber matemático en la escuela.

En un intento de reagrupar los artículos de esta categoría, por afinidad temática, tendríamos un primer grupo definirlo como análisis y reflexión de las prácticas docentes, en este grupo, colocamos trabajos como el de Juan Godino, Miguel Wilhelmi y Delisa Bencomo de las Universidades de Granada, Pública de Navarra y Nacional Experimental de Guayana, respectivamente, en el que establecen criterios sobre la idoneidad de la instrucción, realizando análisis sobre acciones didácticas ya realizadas y que da pie al análisis sobre procesos de instrucción. Otra investigación más, estudia la posibilidad de repetición de efectos didácticos (reproducibilidad) poniendo en relieve experiencias didácticas con estudiantes y analizando en especial, las interacciones con el profesor, tal es el caso de Jorge López y Javier Lezama de Universidad Nacional Autónoma de México e Instituto Politécnico Nacional. Dilma Fregona de Universidad Nacional de Córdoba, nos muestra un agudo estudio de las prácticas ostensivas en los profesores. En el planteamiento de la necesidad de desarrollar habilidades lógicas para poder manejar abstracciones matemáticas, Josefina Royo, Celia Torres, Edna Agostini, Ana Lasserre y Mercedes Naraskevicins todas de la Universidad Nacional de Jujuy, nos describen un taller para profesores en el que se plantea un diagnóstico de dichas habilidades en estudiantes y se discute con los profesores el marco y las habilidades que se proponen. Corine Castela e Ismenia Guzmán de los Institut Universitaire de Formation des Maîtres de Rouen et Equipe Didirem Paris 7 y Pontifical Universidad Catolica de Valparaiso, respectivamente, nos muestran los resultados del análisis de la enseñanza en sistemas escolares (en relación a la geometría) orientada a alcanzar una comparación de los sistemas de formación docente, siendo este un estudio comparativo orientado a identificar la actividad matemática asociada a creencias, finalmente nos dicen que tal estudio comparativo permite conocer el propio sistema y además permite el planteamiento de nuevas preguntas de investigación. Encontraremos también un estudio muy estructurado sobre la caracterización de los significados institucionales y personales en relación a un saber y un nivel educativo específico, desarrollando estudios documentales e instruccionales empleando estrategias de observación e interpretación, trabajo realizado por Juviry González y Mario Arrieche, de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador-Maracay.

Un segundo grupo podríamos denominarlo como análisis de los sistemas de creencias, ya que centran su atención sobre los sistemas de creencias de los profesores, resaltando las implicaciones de las concepciones sobre la enseñanza, tal es el trabajo de Silvia Vilanova, Cristina Rocerau, Perla Medina, Mercedes Astiz, María Oliver, Susana Vecino y Guillermo Valdez de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Cecilia Crespo y Christiane Ponteville, del

Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V.González" y Universidad de Buenos Aires desarrollan una investigación sobre las concepciones de los docentes en relación a la noción de demostración y la influencia en sus prácticas a través de entrevistas y encuestas a docentes y profesores en formación. Por último, Hugo Parra de la Universidad de Zulia, realiza un análisis de concepciones de profesores en formación, en relación al concepto de número entero en los trabajos de planificación relativa a la enseñanza de los números enteros por un grupo de estudiantes próximos a obtener su licenciatura, para ejercer la docencia en matemática a nivel de la educación intermedia.

El tercer grupo de artículos, éstos se caracterizarían por el diseño de cursos para la formación de profesores, tal es el caso de Santiago Ramiro Velásquez, de la Universidad Autónoma de Guerrero, y Centro de Investigación y Desarrollo Educativo, en el que hace el planteamiento de un curso con una perspectiva integradora que considera la incorporación de teorías tales como las de la actividad, enfoques antropológicos y teoría de situaciones. Claudia Flores y Betsabé Contreras, nos muestran experiencias con profesores (en un campo temático específico) que brinda elementos para el desarrollo de prácticas docentes congruentes el marco de un modelo educativo institucional, para ello hacen uso de tecnologías y modelación de las prácticas de clase propuestas al profesor. También podremos conocer el planteamiento de una investigación de una propuesta de formación de profesores orientada a propiciar mayor participación del docente en la reconstrucción de sus saberes, a través de un curso orientado a reconstruir los saberes matemáticos en forma colectiva, haciendo un seguimiento de los profesores en sus trabajos de regreso al aula, tal es el trabajo de Yolanda Serres de Universidad Central de Venezuela. Tania Toledo y Violeta Fernández, describen una propuesta para la formación de profesores a fin de propiciar el desarrollo de habilidades del pensamiento relacionadas a la formación de conceptos matemáticos. Finalmente Hermes Nolasco, de la Universidad Autónoma de Guerrero, nos muestra una propuesta de actualización didáctica, como resultado de la reflexión y la reconstrucción de la experiencia docente, que compete al trabajo de la geometría en la educación primaria.

Otro grupo más, que consistiría en propuestas didácticas, entrarían artículos como el de Cecilia Crespo, que propone una estrategia didáctica para la enseñanza de la geometría consistente en la contextualización del saber para la instrucción, empleando para ello análisis de contextos artísticos e históricos. Por otra parte Otilio Mederos y Enrique Martínez, de la Universidad Central "Marta Abreu" de las Villas, desarrollan un estudio de los procesos de formación, desarrollo y generalización de conceptos matemáticos, constituyendo así una propuesta metodológica para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el marco de la resolución de problemas. De especial interés en la actualización de los profesores encontramos una propuesta de taller en la que se propicia introducir a profesores a la discusión de situaciones de movimiento y sus respectivas representaciones gráficas, empleando la simulación de diverso tipos de movimientos y su respectiva modelación gráfica, tal es el trabajo de Liliana Suárez, Carolina Carrillo e Iván López del Cinvestav. Una propuesta didáctica más (en geometría) y desarrollada por Cristina Ferraris, se dirige a maestros, centrándose en aspectos procedimentales orientados primero a actividades de carácter cognitivo, tales como observar, describir, organizar, y luego otras de carácter matemático como conjeturar, clasificar demostrar. Por último en este apartado, Gustavo Bermúdez del ANEP, Consejo de Educación Secundaria, desarrolla una propuesta didáctica dirigida a profesores para el aprendizaje de la geometría en el bachillerato, tal que permita trabajar niveles de comprensión y razonamiento a través de la formulación de conjeturas y demostraciones.

Por último, hacemos referencia a artículos que hacen reflexione teórica sobre el campo de la Matemática Educativa, reflexiones relevantes para el profesor ya que éste constituye desde el punto de vista teórico el campo de saber de referencia para el profesor de matemáticas, tal es el caso de Andrés Moya, de Universidad Pedagógica Experimental Libertador e Instituto Pedagógico de Miranda, en el que realiza una reflexión sobre las características del campo de la Matemática Educativa y la relevancia de su carácter interdisciplinar. De manera análoga, Martín Zabala, de la Universidad Pedagógica e Instituto Pedagógico de Barquisimeto, reflexiona sobre el análisis del carácter complejo de la educación matemática y su traslado a una visión compleja de la matemática, haciéndolo esto desde la visión de la teoría de la educación matemática crítica.

Por último, encontramos una reflexión personal sobre el uso inadecuado de conceptos matemáticos en las escuelas de ingeniería, realizada por Alejandro Muñoz, del Instituto Politécnico Nacional.

Es importante señalar que en la mayoría de las investigaciones presentadas en esta categoría, es posible identificar marcos teóricos de una manera clara, unos de amplia difusión en nuestro medio, así como algunos otros de nueva aparición en nuestra comunidad. Es de resaltar el interés que hay en la comunidad por las investigaciones centradas en el profesor, pues sin duda, con base a ellas, se podrá obtener el conocimiento necesario para utilizarlo en la formación de los futuros profesores de matemáticas en Latinoamérica.

Pensamiento Complejo y Educación Matemática Crítica

Martín Andonegui
Universidad Pedagógica – Instituto Pedagógico de Barquisimeto
Venezuela
m_andonegui@hotmail.com
Epistemología - Nivel Superior

Resumen

Los planteamientos del llamado pensamiento complejo (Morin, 1995*a*) proponen que cada disciplina sea percibida como "compleja" desde su propio interior. En este sentido, la educación matemática crítica está intrínsecamente abierta a la complejidad ya que, por un lado, postula la posibilidad de abordar cada uno de los objetos matemáticos desde diversas perspectivas: epistémica, histórico-constructiva, formal, de modelaje y aplicaciones, y estética. Y además, porque persigue formar ciudadanos críticos.

La complejidad del pensamiento complejo

No vamos a presentar aquí una visión en extenso del pensamiento complejo. Pero sí resulta conveniente ofrecer aquí un repaso –aunque sea muy somero- de la naturaleza y de las características más destacadas del pensamiento complejo (Morin, 1995*a*).

Fundamentalmente, el pensamiento complejo es un pensamiento que relaciona y que es capaz de producir sucesivas religaciones. Parte del hecho de que existen diversos niveles de realidad (físicos, biológicos, sociales) y de que toda realidad es un sistema por el hecho de estar en relación con su contexto, razón por la cual el objeto de conocimiento debe ser estudiado a su vez en relación con tal contexto.

Es, pues, un pensamiento abierto, que rompe con el cuarto precepto lógico o "regla para la dirección del espíritu" propuesta por Descartes: "hacer en todo enumeraciones tan completas y revisiones tan generales que estuviera seguro de no omitir nada" (Descartes, 1981, p. 39). Frente a esta visión cartesiana que busca la integralidad por la vía de la exhaustividad, el pensamiento complejo plantea la heterogeneidad, la interacción, el azar. Y se rige por estos "siete principios guía para un pensamiento vinculante" tal como los resume el propio autor (Morin, 1999, pp. 98–101):

- El principio *sistémico u organizativo* "que une el conocimiento de las partes con el conocimiento del todo".
- El principio *holográmico* de las organizaciones complejas: "la parte está en el todo, pero también el todo está inscrito en cada parte".
- El principio *del bucle retroactivo o retroalimentación*: "la causa actúa sobre el efecto y el efecto sobre la causa".
- El principio *del bucle recursivo*: "los productos y los efectos son en sí mismos productores y causantes de lo que los produce".
- El principio *de autonomía / dependencia (auto-eco-organización)*: "los seres vivos […] gastan energía en mantener su autonomía. Como necesitan encontrar la energía, la

información y la organización en su medio ambiente, su autonomía es inseparable de esta dependencia".

- El principio *dialógico*: "la dialógica entre el orden, el desorden y la organización, a través de innumerables inter-retroacciones, está en constante acción […] El pensamiento debe asumir dialógicamente dos términos que tienden a excluirse entre sí".
- El principio de *reintroducción del que conoce en todo conocimiento*: "todo conocimiento es una reconstrucción/traducción que hace una mente/cerebro en una cultura y un tiempo determinados".

Este pensamiento, dirigido por estos principios, se corresponde con una visión compleja de la realidad y se considera como el sustrato fundamental del enfoque y del método transdisciplinares con los cuales abordar e investigar la realidad en toda su complejidad (Espina, 2003).

Pensamiento complejo y pensamiento disciplinar

Con alguna frecuencia, la referencia a las disciplinas se limita a resaltar el carácter fragmentario y reductor del discurso disciplinar de cara a la complejidad de la realidad. Se insiste en que es un discurso que intenta romper el carácter multidimensional de la realidad y ubicarse en un solo nivel de la misma.

Sin embargo, una descripción estrictamente negativa como la anterior también peca de reductora y fragmentaria. Más acertada resulta la visión propuesta por Morin (1999): "Las disciplinas están totalmente *justificadas* intelectualmente, a condición de que mantengan un campo de visión que reconozca y conciba la existencia de vínculos y solidaridades" (p. 124). El principio dialógico nos lleva a considerar que "es necesario que una disciplina sea, simultáneamente, abierta y cerrada" (p. 127), pero definitivamente "no se puede romper lo creado por las disciplinas" (p. 127).

Garantizada la legitimidad de las disciplinas hay que destacar que no podemos considerar el pensamiento complejo como enfrentado al disciplinar al modo de "otra disciplina más". No existe una disciplina llamada, por ejemplo, pensamiento complejo tal que, si se estudia y asimila convenientemente, permite llegar a disponer de un modo de pensar complejo y de una visión trans o interdisciplinar de la realidad. Y esto es así porque "no se puede crear una ciencia unitaria del hombre, que disolvería la multiplicidad compleja de lo que es humano" (Morin, 1999, p. 124).

La situación es otra: los conocimientos disciplinares y el pensar disciplinar que los estructura y conforma son *necesarios* para la constitución del pensamiento complejo. El mejor argumento para el aserto anterior puede ser la propia experiencia de Edgar Morin. Como se sabe, Morin relata en su capítulo *Las reorganizaciones genéticas* (Morin, 1995*b*, pp. 202-217) cómo arribó a la tercera de tales reorganizaciones personales –la reforma paradigmática- a sus casi 50 años, cuando a partir de lecturas tales como *El azar y la necesidad* de Jacques Monod, se dedicó al estudio de la biología, la cibernética, la teoría de sistemas, la teoría de la información, la física cuántica, la termodinámica y la filosofía de la ciencia (Popper, Kuhn, Lakatos, Husserl, Heidegger…).

La base de estos conocimientos, unidos a los de su formación temprana –historia, geografía, derecho, sociología- constituyó la plataforma para construir el Método con el cual abordar la realidad y su conocimiento, en una propuesta que reconoce la inseparabilidad de los aspectos físicos, biológicos y sociales de cualquier fenómeno. Sin esta base de conocimientos y métodos disciplinares no es posible llegar a formular los planteamientos del pensamiento complejo.

Ahora bien, la necesidad de los conocimientos y los métodos disciplinares no implica automáticamente su suficiencia. Más aún, estos conocimientos *no son suficientes* para la formulación indicada. Y no se trata solamente de una insuficiencia de carácter cuantitativo, que pudiera superarse a base de ampliar los conocimientos disciplinares, es decir, a base de mayores acumulaciones de tales conocimientos. No. Es una insuficiencia cualitativa, ya que para revelar los desafíos de la complejidad en las esferas de lo natural, lo científico, lo social, lo político y lo humano, no pueden olvidarse las *interacciones* entre ellas, condición que exige llegar a los terrenos de la inter o de la transdisciplinariedad.

Así, pues, la construcción del pensamiento complejo y de la correspondiente visión trans o interdisciplinaria requiere simultáneamente que no se devalúe ni se mutile ningún conocimiento disciplinar –ya que todos ellos son necesarios- y que no se levanten tabiques entre ellos –ya que ninguno de ellos, ni su conjunto sin más, son suficientes-.

Pensamiento complejo y educación matemática crítica

Descendamos ahora al terreno que nos interesa para formularnos una pregunta que consideramos clave: ¿Es posible concebir una *Educación matemática* –o una Didáctica de la Matemática-, entendida como disciplina científica, *abierta a la complejidad, a la formación del pensamiento complejo* en el educando?

El camino hacia una respuesta afirmativa exige que, ante todo, se contemple a la propia Educación Matemática desde una perspectiva compleja. Pero, ¿qué implica *una visión compleja de la Educación Matemática*?

A nuestro modo de ver supone, en primer lugar, adoptar una visión compleja de la propia matemática como objeto de enseñanza y aprendizaje. Caemos, pues, en otra pregunta: ¿Cómo se alcanza esta visión compleja de la Matemática? Con la posibilidad de abordarla desde diversas perspectivas:

- *Epistémica*: cómo se construye el objeto matemático, cómo se representa, cómo se relacionan entre sí tales objetos, y cómo se valida el conocimiento matemático.
- *De contenidos de la realidad*: la cantidad, la forma, el símbolo y la representación, la dimensión, los patrones, las relaciones, la determinación y la incertidumbre, la estabilidad y el cambio… (Steen, 1998).
- *Histórico-constructiva*: en la aventura humana de la matemática hay cabida para ensayos y errores, para el ejercicio de la imaginación y de la intuición, para el razonamiento deductivo y para la analogía y la metáfora, para el análisis y para la síntesis…
- *De modelaje y aplicaciones*: con la posibilidad de venir de y de abrirse hacia los problemas del contexto humano, científico y social.

- *Estética*: desde los predios de las regularidades, de las simetrías y asimetrías, de las generalizaciones y singularidades…

Es decir, es posible una visión compleja de una matemática compleja, más allá de la mera contemplación de la operación y del teorema. Visión que puede y debe estar presente en cada uno de los objetos matemáticos que, traspuestos didácticamente, pueden ser llevados al aula en cualquier nivel y convertidos en objeto de conocimiento: es posible acercarse a ellos, a su construcción y estudio, desde todas y cada una de estas perspectivas, de una forma abierta a la complejidad. Esta sería una concreción del principio holográmico: las partes están en el todo, pero también el todo complejo de la matemática está en cada uno de sus objetos.

Pero una visión compleja de la Educación Matemática supone también no limitar su finalidad al logro del dominio de los conocimientos matemáticos por sí mismos, sin ningún otro horizonte. Nos referimos a la necesidad de incorporar la formación ciudadana de las personas como finalidad intrínseca de la Educación Matemática. Evidentemente, esto requiere un planteamiento epistemológico particular.

Y esto es lo que se pretende desde los ámbitos de la Educación Matemática Crítica (Skovsmose, 1999). Como una de sus referencias inmediatas, recordemos que Paulo Freire considera a *la educación como práctica de la libertad* (Freire, 1969), es decir, como una acción de conocer, una aproximación crítica a la realidad, pues sólo en su relación dialéctica con la realidad puede la educación concebirse como un proceso transformador, de constante liberación del hombre. Para ello debe promover la concientización, proceso que permite problematizar la realidad y percibir las restricciones que impone, con el fin de dar paso a una acción transformadora.

La educación matemática debe situarse en este ámbito. Skovsmose (1999) –en la línea ya iniciada por Freire- le asigna como objetivo propiciar la *alfabetización matemática* de los individuos. Esto significa atribuirle el propósito de formar ciudadanos críticos, mediante un empoderamiento que permita a los alumnos reorganizar y reconstruir sus interpretaciones relativas a las instituciones sociales. Es decir, capacitarlos para discutir críticamente la utilización de la matemática en el diseño tecnológico y, por esta vía, reflexionar acerca de las condiciones a que se ve sometida su vida por la aplicación de esta tecnología. El mismo autor destaca tres tipos de conoceres implicados en el logro de tal propósito:

- El *conocer matemático*, referido al dominio de los conceptos, procedimientos y demás competencias matemáticas al uso.
- El *conocer tecnológico*, referido a las habilidades para aplicar el conocimiento matemático y para construir modelos matemáticos. Es decir, es el conocer necesario para desarrollar y utilizar una tecnología dada.
- El *conocer reflexivo*, relativo a la capacidad de reflexionar acerca del uso de la matemática, es decir, acerca de las consecuencias sociales y éticas, derivadas de la aplicación de la tecnología en los distintos sistemas económicos, culturales y políticos.

Existe una marcada correspondencia entre los planteamientos de la educación matemática crítica y los que expone Morin (Morin, 1999), quien cuestiona la trinidad positivista de Razón-Ciencia-Progreso: "No se trata más de blandir el estandarte de la ciencia, de la razón, del progreso, sino de hacerles preguntas, se trata de movilizarse en contra de las evidencias impensadas de la Tecno-Ciencia. Y este es un problema democrático clave. Existen zonas cada vez más amplias en las que se produce una regresión de la democracia. Esto sucede en los lugares en los que el desarrollo científico y técnico plantea nuevos problemas vitales para todos […] En estos casos se crean comités de expertos que lo único que hacen, como mucho, es divulgar sus opiniones en los medios masivos de comunicación, pero los ciudadanos están cada vez más desposeídos, porque los nuevos depositarios de un saber esotérico y especializado los remiten a su ignorancia" (o. c., p. 113).

En esta línea, Morin hace un llamamiento a combate por una democracia cognitiva "en la que el debate de los problemas fundamentales no sea más monopolio de los expertos que luego se lo alcanzan a los ciudadanos" (o. c., p. 114). Como puede apreciarse, el propósito de la educación matemática crítica responde, en su terreno disciplinar, a estos mismos planteamientos.

En el nivel particular de las dos primeras etapas de la Educación Básica esa formación crítica de los alumnos puede adoptar diversas formas, sin necesidad de esperar a que sean totalmente capaces de esa discusión crítica acerca de la utilización de la matemática en el diseño tecnológico que conforma los sistemas que rigen sus vidas (Andonegui, 2003).

Por ejemplo, los docentes deberían revisar críticamente algunas situaciones habituales en el aula de matemática. Tal es el caso en que los alumnos (y a veces los mismos docentes) justifican sus acciones matemáticas simplemente en la existencia previa de algoritmos y procedimientos para hacer las cosas. "¿Cómo sabes que el valor obtenido es, efectivamente, el mínimo común múltiplo de los dos números dados?" "Porque para calcular el mínimo común múltiplo se toman los factores primos comunes y no comunes con su mayor exponente". "Está bien". Y el docente valida la respuesta, sin percatarse de las implicaciones formativas (o más bien deformativas) que tal validación acarrea.

En efecto, con esta actuación y otras similares, se va constituyendo una matriz de activación de la acción, traspasable a la vida diaria: Para hacer algo, basta con que exista un procedimiento para hacerlo; lo seguimos, y ya. La existencia del procedimiento justifica la acción; nada de preguntarnos acerca de la justificación del procedimiento, actitud cuestionadora necesaria para la formación de un ciudadano crítico.

Como puede apreciarse, la búsqueda de esta formación puede estar presente en el hacer cotidiano de la construcción de conocimientos matemáticos en la escuela. Los ejemplos abundan, sobre todo en este terreno particular del necesario establecimiento de relaciones entre los conceptos y los procedimientos derivados, en contenidos matemáticos correspondientes a los programas del nivel que consideramos (operaciones aritméticas con números enteros y con fracciones, resolución de situaciones referentes a la divisibilidad y a la proporcionalidad, construcción de figuras geométricas, etc.).

En este contexto podemos plantear algunos *principios orientadores de la acción didáctica en el aula de matemática:*

1. *Enseñar matemática para generar diversidad*
   Hay que plantear una didáctica de la matemática que no sólo tome en cuenta la diversidad presente en docentes y en alumnos, sino que, además, *genere diversidad* por la propia vía de la enseñanza de la matemática. ¿Qué significa esto en la práctica?
   Significa presentar y manejar diversos sistemas de representación de los conceptos matemáticos (por ejemplo, de las fracciones...), distintos procedimientos operativos, diversas vías para resolver un mismo problema, diversas formas de demostrar proposiciones matemáticas... Y también, diversas formas de construir los conocimientos matemáticos en el aula, es decir, diversidad en las estrategias de enseñanza que pueden utilizar los docentes en el aula.
   Como puede apreciarse, estamos centrados en el terreno del pensamiento complejo en cuanto apertura a la diferencia y en cuanto a considerar la complejidad de la realidad didáctica, en este caso más allá de la simpleza de una enseñanza repetitiva y memorística.

2. *Comprender los conceptos para establecer su relación entre ellos y con los procedimientos*
   Los conceptos deben ser dotados de significado. Significado que debe ser construido por los mismos alumnos, interactuando con el docente y entre ellos mismos. Además, es preciso establecer relaciones entre tales conceptos. De hecho, esta tarea resulta fundamental ya que la matemática es, eminentemente, una ciencia de relaciones. Por otro lado, la clarificación del significado de los conceptos es una premisa indispensable para dotar de sentido a los procedimientos derivados. Y también, la única forma de romper el estereotipo de aprendizaje mecánico, rutinario y memorístico que domina en el aprendizaje habitual de la matemática.

3. *Plantearse una matemática "en la vida"*
   Y no para el futuro, o exclusivamente "para" la vida. Esto significa, en términos generales, tomar en cuenta los contextos próximos a nuestros alumnos, tanto para buscar en ellos las situaciones a modelizar matemáticamente en el aula, como para encontrar aquellas que sirvan de aplicación a los conocimientos adquiridos. Del mismo modo, significa aceptar en el aula las formas propias de los alumnos para establecer relaciones y para resolver problemas en su vida.
   Pero también significa traer al aula y legitimar aquellos conocimientos, particularmente los procedimentales, que son utilizados habitualmente por la gente aun cuando desconozcan su fundamento matemático o no sepan cómo explicarlo.
   Otro punto a destacar en referencia a una matemática en la vida, es el del lenguaje. La matemática posee un lenguaje muy preciso. Adquirir ese lenguaje formal es una meta de la enseñanza de la matemática, a todos los niveles. Pero eso no significa que la rigurosidad de su uso deba ser la misma en todos los niveles, ni que el lenguaje formal deba ser necesariamente el lenguaje de partida en el aula. La imposición desencarnada del lenguaje matemático formal acentuaría los niveles de pobreza y dependencia de los alumnos, pues, como nos lo recuerda Foucault, el lenguaje es un elemento de constitución de la realidad y siempre es cómplice con las relaciones de poder.

Pensamos que la conclusión queda clara: no hay enfrentamiento entre la formación de un pensamiento complejo y las disciplinas de la matemática y de la educación matemática. Estas dos últimas presentan una gran vitalidad complejizante si se entienden adecuadamente, es decir, si se sabe construir esa apertura desde su interior.

Referencias Bibliográficas

Andonegui, M. (2003). La enseñanza de la matemática en los proyectos pedagógicos: Reflexiones desde una perspectiva crítica. En G. Blanco (Ed.), *Hacia el pensamiento integral*. Barquisimeto, Venezuela: UPEL-IPB. 48 -59.

Descartes, R. (1981). *Discurso del método*. Castellón, España: Los libros de Plon.

Espina, M. (2003). Complejidad y pensamiento social. En L. Carrizo (Ed.), *Transdisciplinariedad y complejidad en el análisis social*. Montevideo: UNESCO. 11 – 32.

Freire, P. (1969). *La educación como práctica de la libertad*. Madrid: Siglo XXI.

Morin, E. (1995*a*). *Introducción al pensamiento complejo*. Barcelona: Gedisa.

Morin, E. (1995*b*). *Mis demonios*. Barcelona: Kairos.

Morin, E. (1999). *La cabeza bien puesta. Repensar la reforma. Reformar el pensamiento*. Buenos Aires: Nueva Visión.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá: Una Empresa Docente.

Steen, L. A. (1998). *La enseñanza agradable de las matemáticas*. México: Limusa.

Incremento, Diferencial y Aproximación Lineal

José Ismael Arcos
Facultad de Ingeniería, UAEM
México
iarcos@fi.uaemex.mx
Revisión histórico-didáctica – Nivel Superior

RESUMEN

En los orígenes del Cálculo el *diferencial* de una variable se definió como un incremento infinitesimal de la misma, idea que ha prevalecido en muchos textos de ciencias básicas y de la ingeniería. Sin embargo, cuando los infinitesimales fueron desechados del Cálculo, se hizo lo mismo con la concepción infinitesimalista del diferencial, y ahora, como sabemos, se presenta en los textos de Cálculo como una cantidad finita que resulta del producto de la derivada de la función en un punto y el incremento (finito) de la variable, lo que da lugar a la idea de la *aproximación lineal*, la que también resulta muy útil. En este documento se describen y comentan, desde la perspectiva de la enseñanza, algunas de las diferentes concepciones del diferencial que se han tenido desde los orígenes del Cálculo, a finales del siglo XVII hasta la segunda mitad del XIX.

El diferencial en el Cálculo leibniziano

A fines del siglo XVII, el Cálculo leibniziano se presentaba generalmente en un contexto geométrico, aunque desde los primeros escritos de Leibniz se manifestaba ya la potencialidad de la nueva herramienta para abordar y resolver problemas de la física, particularmente del movimiento. En cuanto al concepto de diferencial, podemos ver, en la definición 2 del *Análisis de los infinitamente pequeños* de L'Hôpital lo siguiente:

> La parte infinitamente pequeña en la que una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente es llamada la *Diferencia*… (L'Hôpital, 1696)

En esta definición podemos observar que la diferencial[1] (o diferencia) de una variable era la medida de un cambio infinitesimal de la misma, y que la variación continua de una variable se podía interpretar como una variación con "saltos" infinitesimales. Esta situación se describe claramente en el *Cálculo infinitesimal* de Bezout, escrito a mediados del siglo XVIII, pero publicado medio siglo después. En este texto, en el que el estudio del Cálculo se consideraba necesario para aprender Mecánica, se define diferencial como sigue:

> Cuando se considera una cantidad variable que crece por grados infinitamente pequeños y se desea conocer el valor de esos incrementos, lo que se presenta como más natural es determinar el valor de esa cantidad para un instante cualquiera y el valor de esa misma cantidad para el instante inmediatamente siguiente; entonces, la diferencia de estos valores es el incremento (o el decremento) que recibe esa cantidad: a esto es a lo que se llama *diferencial* de esa cantidad. (Bezout, 1760 ?)

[1] Obsérvese que el término *diferencia* indica justamente la medida del cambio. Sin embargo ese término podría también aplicarse a un cambio finito, de manera que con el tiempo se conservó el término *diferencial* para especificar que se trataba de un cambio infinitesimal, tal como se observa en la referencia dada.

Así pues, de acuerdo con esta definición, podemos pensar en un eje temporal en el que el tiempo transcurre gradualmente, con grados de tamaño infinitesimal *dt*. Siendo *a* un instante dado, entonces $a - dt$ es el instante anterior a *a* y $a + dt$ el instante siguiente de *a* (ver figura 1).

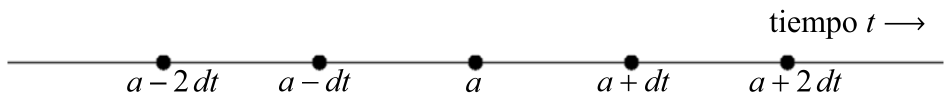


Fig. 1

De esta manera, suponiendo una cantidad *x* que varía con el tiempo, el diferencial de *x*, correspondiente al instante *a*, será: $dx(a) = x(a+dt) - x(a)$. Esta definición, por supuesto, puede generalizarse a cualquier cantidad variable que depende (como una función) de otra; así, si $y = f(x)$, $dy(a) = f(a+dx) - f(a)$.

Ahora bien, a fines del siglo XVII, una curva era considerada como una poligonal con una infinidad de lados, cada uno de ellos uniendo dos puntos infinitamente próximos entre sí. Esta manera de ver las curvas permitía, entre otras cosas, ubicar fácilmente la recta tangente. Por ejemplo, Leibniz, en su "nuevo método de máximos y mínimos...", decía:

> Encontrar la *tangente*, es trazar una recta que une dos puntos de la curva, separados una distancia infinitamente pequeña, o bien, prolongar el lado de un polígono de un número infinito de ángulos, lo que para nosotros es equivalente a una *curva*... (Leibniz, 1684)

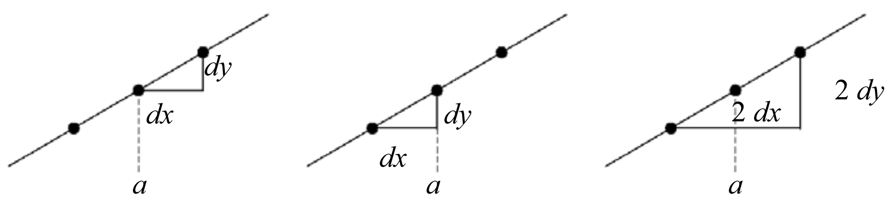


Fig. 2

Esta interpretación infinitesimalista de las curvas simplifica notablemente algunas cuestiones referentes a la recta tangente y a la función derivada; por ejemplo, la pendiente de la recta tangente a una curva definida por $y = f(x)$ (figura 2, izquierda), en el punto de abscisa *a*, estará dada por:

$$m_T(a) = \frac{dy(a)}{dx} = \frac{f(a+dx) - f(a)}{dx} \qquad (1)$$

El diferencial izquierdo de *f*, en $x = a$ (figura 2, centro) será: $df_{-}(a) = f(a) - f(a-dx)$ y el diferencial centrado (figura 2, derecha): $df_{c}(a) = f(a+dx) - f(a-dx)$. Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente, en $x = a$, también se podrá obtener mediante:

$$m_T(a) = \frac{dy_{-}(a)}{dx} = \frac{f(a) - f(a-dx)}{dx} \qquad (2)$$

o $$m_T(a) = \frac{dy_c(a)}{2\,dx} = \frac{f(a+dx) - f(a-dx)}{2\,dx}.$$ [2] (3)

En cuanto al manejo simbólico, también hay simplificaciones. Por ejemplo, si se considera la ecuación $PV = T$, donde *P,V* y *T* son cantidades variables (en el tiempo), de manera que un instante después sus valores son $P + dP$, $V + dV$ y $T + dT$ y se desea conocer el incremento infinitesimal *dT* de la variable *T*, correspondiente a los incrementos infinitesimales *dP* y *dV* de las otras variables, tenemos que $T = PV$, así que

$$dT = (P + dP)(V + dV) - PV = PV + P\,dV + V\,dP + dP\,dV - PV,$$

$$dT = P\,dV + V\,dP + dP\,dV = P\,dV + V\,dP$$ [3]

El diferencial en la segunda mitad del siglo XVIII

Como señalaba Bos (1974), los conceptos básicos del Cálculo leibniziano se presentaban, básicamente, en un contexto geométrico, aunque se abordaron, con éxito, un sinnúmero de problemas en la física. Por otra parte, en el caso de la propuesta de Newton, encontramos una presentación en el contexto del movimiento, aunque se manifestara también un interés particular en el estudio de las curvas:

> Ahora se deben presentar algunos problemas, especialmente los que se refieren a la naturaleza de las curvas, para ilustrar este arte analítico. Primero se observará que todas las dificultades se pueden reducir tan sólo a los siguientes dos problemas:
> 1. Dada de manera continua la longitud del espacio recorrido, esto es, en todo instante de tiempo, encontrar la velocidad de movimiento en cualquier tiempo propuesto.
> 2. Dada de manera continua la velocidad del movimiento, encontrar la longitud del espacio descrito en cualquier tiempo propuesto. (Newton, 1671)

De hecho, como lo plantea Pardo: "Un primer aspecto que se debe consignar es el hecho de que en el siglo XVIII, más que en ningún otro, el trabajo matemático estuvo directamente inspirado por la resolución de los problemas de la física…". (Pardo, 2003)

Así pues, el recurso del Cálculo infinitesimal, sobre todo de la propuesta leibniziana, permitió a los científicos del siglo XVIII abordar y resolver una gran cantidad de problemas de la geometría y la física, desarrollando incluso nuevas ramas del Análisis para tal efecto. Sin embargo, al final de ese siglo los principales matemáticos de la época comenzaron a pensar que ya no había más que descubrir (en las matemáticas). Así, en 1781, Lagrange escribía a D'Alembert:

> "Me parece que la mina de las matemáticas es ya muy profunda, y a menos de que alguno descubra nuevas vetas será necesario, en algún momento, abandonarla. La

[2] Si en estas tres ecuaciones se sustituye el incremento infinitesimal *dx* por uno finito, pero pequeño (por ejemplo, $\Delta x = h = 0.0001$, se obtendrán tres expresiones para aproximar la derivada, llamadas, respectivamente, de diferencias adelantadas, retrasadas o centradas.

[3] En este procedimiento, que podemos encontrar en textos de termodinámica, primeramente se utiliza la definición de diferencial (más claramente expresada por Bezout), y, enseguida, se utiliza una regla básica de la aritmética infinitesimalista, según la cual los infinitesimales de orden mayor resultan despreciables.

> Física y la Química ofrecen ahora una explotación más rica y más fácil; también el gusto de nuestro siglo parece ir en esa dirección y no parece imposible que las cátedras de Geometría de la Academia, se conviertan algún día en lo que las cátedras de árabe son actualmente en las Universidades". (Citado en Pardo, 2003)

Así pues, se comenzó a sentir la necesidad de descontextualizar el Análisis para que éste adquiriera mayor "libertad" y pudiera crecer por sí solo, lo que, a su vez, requería de una profunda revisión de sus fundamentos. Para entonces se tenían ya varias presentaciones del Cálculo, y cada una de ellas tenía sus partidarios y sus particulares características. A pesar de ello, Carnot, en sus *Reflexiones sobre la Metafísica del Cálculo infinitesimal* (1813) indicaba que todas las presentaciones conocidas hasta entonces eran equivalentes entre sí, no siendo más que distintas versiones del método de exhaución de los antiguos griegos.

Sin embargo, parece ser que era la falta de rigor, presente en las "viejas presentaciones" lo que se señalaba como grave deficiencia. Así, en su *Teoría de las funciones analíticas* (1813), Lagrange promete que su propuesta "contiene los Principios del Cálculo diferencial, liberados de toda consideración de los infinitamente pequeños, de los evanescentes, de los límites y las fluxiones, y se reducen al análisis algebraico de cantidades finitas".

En cuanto al concepto de diferencial, en su *Teoría*, Lagrange ni siquiera define el diferencial, sin embargo, Lacroix, quien de alguna manera escribe su texto con base en la propuesta de Lagrange (lo que implica el recurso extensivo del desarrollo en series de potencias), indicaba:

> …tomaré como ejemplo la función $u = ax^3$. Poniendo $x+h$ en el lugar de x y restando la cantidad ax^3 del resultado, se ha obtenido, en la expresión
>
> $$u' - u = 3a^2x + 3ax^2 + ah^3,$$
>
> … el primer término $3ax^2h$ de esta diferencia, que no es sino una porción de la misma, se llama diferencial, y se le designa por *du*… (Lacroix, 1837)

Vemos, pues, que se utiliza un desarrollo en serie de potencias (o serie de Taylor) para expresar el incremento de la función (al que llama diferencia), reconociendo al primer término del desarrollo como el diferencial, es decir, viendo a la diferencial como la aproximación lineal del incremento, que es como se presenta en los textos actuales de cálculo.

El diferencial en el Análisis de Cauchy

Con la propuesta de Lagrange, a finales del siglo XVIII, se comenzaron a explorar propuestas del Cálculo en las que dejaran de utilizarse las cantidades infinitamente pequeñas. En la tercera década del siglo XIX, Cauchy escribe su *Curso de Análisis*, en el que utilizaducho la terminología infinitesimalista, sin embargo, el infinitesimal ya no es una cantidad fija, sino una variable que decrece convergiendo a cero:

> Decimos que una cantidad variable deviene infinitamente pequeña cuando su valor numérico decrece indefinidamente de manera a converger al límite cero. (Cauchy, 1821)

De esta manera, el diferencial deberá ser también redefinido:

> Sean como siempre $y = f(x)$ una función de la variable independiente *x*, *i* una cantidad infinitamente pequeña, y *h* una cantidad finita. Si se hace $i = \alpha h$, α será también una cantidad infinitamente pequeña y se tendrá la identidad
>
> $$\frac{f(x+i)-f(x)}{i} = \frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha h}$$
>
> de donde se concluirá: $$\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}h \qquad (1)$$
>
> Cuando la variable α se aproxima indefinidamente a cero y la cantidad *h* permanece constante, el primer miembro de la ecuación (1) converge hacia un límite que es llamado la diferencial de la función $y = f(x)$. Se indicará esta diferencial por la característica *d*, (…) así que $d\,f(x) = h\,f'(x)$. (Cauchy, 1821)

Como puede observarse, esta definición es, prácticamente, la que se da actualmente en los cursos de Cálculo, considerando que la definición de infinitesimal implica un límite cuando una variable tiende a cero. Por otra parte, como lo indica Jean Dhombres, con la propuesta de Cauchy, el Análisis terminó por abandonar el contexto físico:

> En el Análisis algebraico Cauchy no hace ninguna referencia a la física matemática, a pesar de que él mismo la cultivó con mucho talento, y no parece interesarse en el conocimiento del mundo sensible ni en las aplicaciones de la ciencia matemática (…). Si bien no es el primer texto de matemáticas puras, la obra de Cauchy es tal vez la primera, en análisis, que por sus objetivos, no intenta ninguna justificación ajena a las relaciones intrínsecamente matemáticas... (Dhombres, 1994)

A partir de entonces el Cálculo crece de manera independiente y los infinitesimales (fijos) comienzan a ser desechados, al menos en el quehacer de los matemáticos. Sin embargo, desde esa época y aún en nuestros días, cuando el Cálculo se utiliza en otras ciencias básicas o de la ingeniería, los infinitesimales siguen utilizándose.

Resulta sumamente interesante lo que ocurrió en el caso de Lagrange. Mientras que en su *Teoría de las Funciones Analíticas* no recurría a las cantidades infinitesimales y, por lo tanto, tampoco al diferencial, al menos en se concepción leibniziana, en su *Mecánica analítica* (que fue escrita en la misma época que la *Teoría*) utilizaba claramente una terminología infinitesimalista:

> Ahora, la fuerza aceleratriz que actúa siguiendo la tangente, y que se llama fuerza tangencial, será toda empleada para alterar la rapidez absoluta del cuerpo, y estará expresada por el elemento de rapidez dividido por el elemento de tiempo. (…) Reduciendo las fuerzas normales a una sola, esta fuerza compuesta se encuentra dentro del plano de la curvatura, y se expresa por el cuadrado de la rapidez dividido por el radio osculador, porque en cada instante el cuerpo puede ser visto como metido en el círculo osculador.
>
> …la variación de estas coordenadas representarán, evidentemente, los espacios recorridos por el cuerpo siguiendo las direcciones de esas coordenadas; por consiguiente, sus diferenciales segundas, divididas por el cuadrado de la diferencial constante del tiempo, expresarán las fuerzas… (Lagrange, 1853)

Así pues, Lagrange hablaba de un "elemento de rapidez dividido por el elemento de tiempo" (es decir, *ds* entre *dt*), o de las "diferenciales segundas, divididas por el cuadrado de la diferencial constante del tiempo" (es decir, d^2s/dt^2), lo que no puede hacerse sin aceptar a las diferenciales como cantidades infinitesimales (fijas). Por otra parte, al indicar que "en cada instante el cuerpo puede ser visto como metido en el círculo osculador", está recurriendo claramente a un argumento de geometría infinitesimalista.

Como mencioné anteriormente, aún hoy podemos ver un Cálculo más bien leibniziano (o euleriano) en los textos de ciencias básicas y de la ingeniería. Por ejemplo, en el texto de Termodinámica de Wark se indica que: "la variación infinitesimal de una propiedad se indicará con el símbolo de la diferencial *d* antepuesta al símbolo de la propiedad. Por ejemplo, el cambio infinitesimal en la presión de un sistema está dado por *dp*…" (Wark, 1987). Esta situación nos debe llevar a los docentes a preguntarnos sobre la pertinencia de seguir ofreciendo una presentación del Cálculo que resulta claramente inadecuada, al menos en las aulas de las escuelas de ingeniería.

Referencias Bibliográficas

Bezout, E. (1999). *Cálculo infinitesimal.* México: Limusa-IPN. (Trabajo original en francés publicado en el siglo XVIII).

Bos, H. J. M. (1974). Differentials, higher order differentials and the derivative in the leibnizian calculus. *Arch. Hist. Exact Sc. 14*, 1-90.

Carnot, L. (1813). *Réflexions sur la Métaphysique du calcul infinitesimal* (2a. Ed.) París, Francia: Gauthier-Villars.

Cauchy, A. L. (1994). Curso de análisis. C*olección MATHEMA*. México: UNAM.

Lacroix, S. F. (1837). *Traité elémentaire de Calcul Différentiel et de Calcul Integral* (5a. ed.). Paris, Francia: Bachelier.

Lagrange, J. L. (1813). *Théorie des fonctions analytiques* (3a. ed.). Paris, Francia : Courcier.

Lagrange, J., L. (1853). *Méchanique Analytique* (3a. ed.). Paris, Francia.

Leibniz, W. G. (1983). Nouvelle method pour les maxima et les minima. *Oeuvre concernant le Calcul Infinitesimal.* París, Francia: J. P. Blanchard. (Obra original publicada en latín en las actas de Leipzig en 1684).

L'Hôpital, M. de (1998). Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas. *Colección MATHEMA*. México: UNAM.

Newton, I. (2001). Tratado de Métodos de Series y Fluxiones. *Colección MATHEMA*. México: UNAM.

Pardo, V. (2003). Lagrange, la elegancia matemática. *La matemática y sus personajes 14*. España: Nivela.

Wark, K. (1991). *Termodinámica* (2a. ed.). México: McGraw-Hill.

Sistema Para la Gestión, Evaluación y Seguimiento de Sistemas de Enseñanza de las Matemáticas mediante e-Learning

Juan Baltazar Cruz
Universidad Autónoma de Guerrero
México
cruzramirez@yahoo.com
Educación a Distancia – Nivel Superior

Resumen

El Sistema E+ es una solución integral de para el diseño de e-learning en el área de las matemáticas**,** basada en código libre y enfocada a instituciones dedicadas a la enseñanza de las matemáticas y la educación, funcionando como una plataforma de software para desarrollar escenarios de arranque educativo mediante un sistema fácil de usar y que no representa un gasto oneroso en hardware y licencias de software. Este sistema esta desarrollado para que los usuarios, tanto docentes como alumnos del mismo, cuenten con una herramienta fácilmente programable, planeada para combinar el poder de Internet, redes locales y sistemas autónomos, utilizando para esto la estructura clásica de los sistemas de computo que se utilizan actualmente en la mayoría de las instituciones de educación y enseñanza de las matemáticas.

Introducción

El sistema E+ es una iniciativa pensada para potenciar, facilitar y administrar eficientemente el proceso de enseñanza/-aprendizaje, enfocado en la interacción docente-alumno, para construir un conocimiento basado en la colaboración y sustentado la experiencia. Este sistema cuenta con herramientas diseñadas que permiten a los usuarios crear complementos virtuales para sus quehaceres académicos, integrando dentro de una sola aplicación, los elementos y programas informáticos más usuales, con lo que podrán desarrollar desde una presentación hasta un curso virtual.

Así mismo, permite el acceso desde cualquier lugar y en todo momento a la documentación que este sistema puede diseñar, para integrarla dentro de un solo Objeto Reusable de Aprendizaje, accediendo de manera fácil a los servicios integrados del mismo.

Planteamiento del problema

Las principales motivaciones para desarrollar una herramienta de este tipo han sido, por un lado, la de suministrar a docentes y alumnos un conjunto de recursos que les ayuden en el proceso de aprendizaje de cualquier área de las matemáticas y por otro, la de proporcionar a los docentes y administradores del sistema, no necesariamente expertos en materias informáticas, un sistema que les aporte medios adicionales de gestión y transmisión de contenidos didácticos y que les ofrezca información sobre el proceso de asimilación de la materia por parte de los alumnos, con el fin último de mejorar la calidad de la enseñanza.

A lo largo de los últimos años, se han venido desarrollando diferentes proyectos para distintas organizaciones, instituciones y empresas en el campo de la enseñanza de las matemáticas basadas en la utilización de las nuevas tecnologías e Internet; y en base a la experiencia recogida en estos proyectos, se desarrolló una aplicación informática de utilidad dentro del proceso de formación de los alumnos, en la que los docentes enfocados a la enseñanza de las matemáticas, puedan desarrollar sus materiales de enseñanza en forma virtual.

El sistema es una aplicación concebida para facilitar mediante un entorno amigable y sencillo de utilizar, tanto al alumnado como al docente, tareas como la publicación, diseño y entrega de información y recursos formativos, actividades de autoevaluación y el establecimiento de tutorías informáticas.

El aprovechamiento de las nuevas tecnologías aplicables a Internet debe permitir el acceso a las actividades anteriormente descritas de los alumnos y docentes con una gran flexibilidad temporal y espacial, ya sea desde su domicilio particular, desde la sala de computo del centro educativo o, en general, desde cualquier computadora conectada a Internet o a la Intranet en que los cursos se van a alojar.

Objetivos

Considerar el proceso de enseñanza de las matemáticas como un entorno global, utilizando el sistema como un integrador de nuevas tecnologías en la educación, no como un fin en sí mismas, sino al servicio de una oferta formativa de calidad, controlada y administrada por los docentes/administradores del sistema, sin tener que depender de expertos o de sistemas especiales para el manejo del mismo.

Optimizar el tiempo, costo, administración y control de los cursos de enseñanza de las matemáticas programados, así como de los instructores y alumnos, permitiendo una planeación eficaz y controlada de los cursos que se imparten mediante este sistema, de acuerdo a las necesidades de los usuarios del mismo.

Ofrecer una formación práctica, de aplicación inmediata en escuelas o instituciones cuyos recursos humanos, tanto por escasez de medios como por jornadas de asistencia a las aulas apretadas, ven reducidas sus posibilidades de participar en cursos de enseñanza de las matemáticas en formatos clásicos.

Algunas de las claves en este camino son la elaboración de materiales de soporte de calidad y el diseño acertado de los contenidos de gestión del curso. Por encima de todo, el objetivo en e-learning no es otro que el acceso universal al aprendizaje personalizado a lo largo de toda la vida.

Otro reto colateral es que, ante la escasez de expertos en redes, se adecuen los sistemas de información a las capacidades actuales de alumnos y docentes, de forma que se evite la pérdida de oportunidades de aprendizaje y la ralentización del crecimiento académico

Las expectativas de mejora en versiones subsecuentes son amplias para diversos colectivos profesionales ajenos a nuestra área, como los diseñadores de contenidos, creadores de entornos virtuales, formadores, suministradores de contenidos, gestores de procesos de aprendizaje o dinamizadores de comunidades virtuales.

Marco Teórico

El e-Learning se está configurando como uno de los sectores con más perspectivas de crecimiento en Internet, ya que este tipo de sistemas son las claves que ayudan a entender la vigorosa realidad de la formación virtual. Así, se han lanzado iniciativas en la comunidad europea como eEurope (para hacer llegar la red a todos los ciudadanos) y e-Learning (objetivos educativos), el programa de investigación tecnológica Tecnologías de la Sociedad de la Información (TSI), la red de redes nacionales de escuelas (EUN, the European School Network) y la formación profesional (proyecto Derive) complementan varios proyectos que reflejan la voluntad de promover la formación a distancia.

La formación virtual no sólo es Internet, el aprendizaje a través de nuevas tecnologías no se sintetiza en la computadora, sino que puede canalizarse a través del teléfono móvil, el televisor. Intranets, Internet, CD-Rom, satélite, wireless, PC, mainframes, PDA, teléfonos móviles o redes WAN o LAN, mismas que pueden utilizarse para englobar los contenidos del e-Learning, que se esta convirtiendo en un nuevo paradigma de la educación y la formación, como un elemento estratégico en las instituciones educativas.

El desarrollo de la metodología de Objetos de Aprendizaje a permitido plantear una nueva forma de pensar la estructura del e-learning y, en general, del material de instrucción. Los puntos más destacados hasta ahora, desde los ámbitos especializados, tienen que ver con una forma de pensar el diseño que permita la flexibilización en el desarrollo de contenidos, disminución de costos y optimización de la pérdida de vigencia de los contenidos por dificultades en la actualización. Los aportes en investigación se han centrado en cómo generar nomenclaturas para los Objetos de Aprendizaje, cómo optimizar los procesos de diseño, el estudio de las combinaciones de elementos nucleares en la construcción de Objetos de Aprendizaje, y finalmente, su relación con las teorías del diseño instruccional.

El trabajo enfocado en el diseño por parte del los usuarios de los Objetos Reusables de Aprendizaje que este sistema genera, esta basado principalmente en la Teoría Genética del Conocimiento de Piaget (Piaget, 1977), quien sostiene que las personas tienen una tendencia innata a adaptarse a las exigencias de su medio, a través de los mecanismos de acomodación que son los cambios producidos en la estructura cognoscitiva existente para ajustarse a situaciones nuevas y en la asimilación, que es el proceso de ubicar nueva información o resolver problemas mediante el uso de esquemas que ya poseemos. Esto tiene como consecuencia el desequilibrio entre el organismo y el mundo exterior, lo que impulsa la adaptación; lo cual ocurre sin perder de vista que en cada etapa de la vida las personas desarrollan distintas habilidades, para enfrentar diferentes tipos de problemas, de modo que cada etapa sirve a la siguiente, complejizándose de este modo las estructuras mentales a través de las diferentes etapas de la vida hasta llegar a la capacidad de pensar en términos simbólicos.

Completamos este enfoque con el cognitivismo, teoría que sustenta que el aprendizaje es un proceso activo, dependiendo de actividades mentales. Es decir, pasa de un sujeto pasivo a un sujeto activo, a un procesador de información responsable de su propio aprendizaje; aprendizaje que esta más relacionado con el significado que con la conducta, el cual implica la reestructuración de percepciones, conceptos y esquemas cognitivos y depende principalmente de las ideas relevantes que ya posee y de la interacción de éstas con el nuevo conocimiento (Coll, Marchesi y Palacios, 1962).

Finalmente, Vygotski postula que la educación, la cultura y el desarrollo cognitivo se entrelazan para potenciar los procesos de aprendizaje que preceden al desarrollo, a través de la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), entendida ésta como la distancia entre el nivel alcanzado por el educando y el nivel de desarrollo potencial que se crea con ayuda de la mediación social e instrumental, es decir a través del proceso gestionado por otras personas, las cuales utilizan los instrumentos que sirven para ordenar y reposicionar externamente la información y operar con estímulos representados, siendo el más importante el lenguaje (Del Río, 1996).

En consecuencia, el diseño del sistema E+ esta pensado y diseñado para usuarios que sin ser expertos en informática, puedan actuar como guías y mediatizadores de los saberes socioculturales que debe internalizar el educando, ayudando al alumno a construir el conocimiento, primero en un plano interindividual y luego intraindividual.

Este sistema, por sus características, es catalogado como un medio de diseño y desarrollo de nuevas tecnologías (Sartori, 1997), aplicadas al entorno de educación y enseñanza de las matemáticas, La importancia de este tipo de sistema es lo que puede proveer al entorno de enseñanza de las matemáticas, elementos tales como es el de ser un sistema accesible a todo tipo de usuarios, sin las limitantes que se encuentran con los sistemas actuales, tanto económicas, de administración y desarrollo, de aplicación de nuevos entornos de aprendizaje, sin costo y usando las herramientas mas comunes de una computadora; los elementos que se pueden estudiar con los Objetos Reusables de Aprendizaje generados por el sistema, pueden ser tomados como objeto de estudio para ofrecer una nueva línea de investigación basada en este tipo de sistemas y descubrir en un entorno académico, cuales pueden ser sus ventajas y desventajas.

Materiales y métodos.

Podemos situar a la construcción de objetos de aprendizaje en el nivel de una tecnología instruccional, enfocada al diseño de mensajes, espacios y artefactos que permitan dar un determinado tipo de instrucción. Esto puede ser discutido, ya que esta supuesta neutralidad teórica es cuestionable pensando en que toda tecnología implica una teoría de cómo funcionan las cosas, en este caso esta tecnología instruccional tiene a la base una teoría de lo que es enseñar y lo que es aprender y como se realizan ambos procesos.

Willey (2000) propone una Metáfora para hablar de los Objetos de Aprendizaje, esto es, representarlos y entenderlos como átomos, en donde:

- No todo átomo es combinable con cualquier otro átomo

- Los átomos sólo pueden ser ensamblados en ciertas estructuras prescritas por su propia estructura interna.
- Algunas características son necesarias para ensamblar átomos.

Dentro del proceso de diseño instruccional del proyecto que ocupa nuestro estudio, pudimos constatar como la metáfora del átomo se hace más útil en la medida que los objetos se vuelven más complejos y se plantean objetivos más ambiciosos para ellos. Estos objetivos están asociados a tres temas prioritarios del diseño para entornos virtuales y el uso de plataformas de administración de aprendizaje (Gary y Mazur, 1991):

Reusabilidad: potencia de los objetos para ser combinados dentro de nuevos cursos (o entornos de aprendizaje).

- Escalabilidad: potencia de los objetos para ser integrados a estructuras más complejas o extensas dentro del dominio de aprendizaje para el que fueron creados.

Autocontención conceptual: potencia de los objetos para autoexplicarse y posibilitar experiencias de aprendizaje integras.

Las herramientas diseñadas del Sistema E+ cumplen con una serie de características, entre las que se cuentan las siguientes (Jaén, J.; Martínez R. y García-Beltrán, A. 2001):

- *Capacidad de ser aprendidas:* deben ser fácilmente comprensibles, sin producir una carga cognitiva adicional para el usuario.
- *Capacidad de ser usadas:* hay que tener en cuenta una serie de factores como son la comprensión del propósito de la herramienta, su mecánica, y el uso satisfactorio de la herramienta de navegación en una situación que la requiera.
- *Consistencia*: esta característica es imprescindible en el diseño de las herramientas de navegación, al igual que en otros elementos similares del interfaz.
- *Flexibilidad*: las herramientas de navegación deben adaptarse a los distintos tipos de usuarios y a sus diferentes metas. Los navegadores pueden construirse de forma personalizada.

Los generadores de código, en el lenguaje de los sistemas de e-learning, se comportan como el CMS (*Content Management System*) o Sistema de Administración de Contenidos, que es la aplicación que diseña, ensambla y entrega las e-clases, así mismo, funciona como la integradora de lo que se conoce como el STKR (Support Tools and Knowledge Resources) Herramientas de Soporte y Recursos de Enseñanza que son las utilerías que acompañan al sistema.

Consideraciones finales

El Sistema E+ esta programado en su totalidad en JavaScript, lo que lo hace compatible con cualquier plataforma de hardware y software..Genera los códigos de resultados en HTML 4.0 Transitional sin ninguna falla y puede generar e-clases de una manera, fácil, rápida y sin ningún costo.

Todo cambio que se le haga a estos programas queda bajo la responsabilidad de quien lo modifica. El sistema funciona sin ningún problema y cualquier cambio al código, podrá derivar en que ya no funcione. Si lo modifica, haga las pruebas en un archivo diferente al original, a efecto de tener siempre un respaldo del código prototipo.

Como lo señalamos al principio, el Sistema E+ es un ente vivo que esta en constante evolución. Así que para toda crítica, duda y actualizaciones, consulten siguiente página dirección en Internet http://www.dicuagro.org/e/ o envíame un mensaje electrónico al autor

Referencias Bibliográficas

Coll, C., Marchesi, A. y Palacios, J. (1962). *Psicología de la Educación*. Vol. II, Madrid, España: Alianza.

Del Río. P.(1996). *Psicología de los Medios de Comunicación*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Gary, G. y Mazur, J. (1991). Navigating Hypermedia. En: Berk, E. y Devlin, J. (Eds.), *Hypertext/Hypermedia Handbook*. Nueva York, USA: Intertext Publications. McGraw-Hill. 271-283.

Jaén, J., Martínez R. y García-Beltrán, A. (2001). Desarrollo de Proyectos Software para la Formación que Emplean Nuevas Tecnologías e Internet. *New System/Nuevo Sistema (Ingeniería y empresa),* 32, 347-350.

Piaget, J. (1977). La première année de l'enfant. *British J. Psychol. 18*, 97-120. Transcrito en: Gruber, H. y Vonèche, J. (Eds.), *The Essential Piaget.* New York, USA: Basic Books.

Sartori, G. (1997), *Homo videns: la sociedad teledirigida*. Madrid, España: Taurus.

Wiley, D. (2000). Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and a taxonomy. En Wiley, D. (Ed.), *The Instructional Use of Learning Objects: Online Version*. Obtenido en Enero 6 del 2003, de la dirección: http://reusability.org/read/chapters/wiley.doc

Construyendo una Estrategia Metodológica Participativa en el Curso de Geometría del Currículo de Formación del Docente Integrador

Rosa Becerra
Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto I Pedagógico de Caracas
Venezuela
rosabecerra3@yahoo.com
Formación de Profesores – Nivel Superior

Resumen

Se intentó construir una estrategia metodológica participativa que facilitara el desarrollo del curso de Geometría del currículo del docente integrador del Pedagógico de Caracas. La opción metodológica utilizada fue la Investigación-Acción, por permitirnos acercarnos a la realidad con la intención de transformarla. La acción participativa y transformadora del grupo de estudiantes y su profesora estuvo sustentada en la Teoría Social Crítica de Habermas, por permitir incorporar una comprensión de la naturaleza indisoluble de la unidad teoría-práctica. La recolección, categorización y triangulación de la información se realizó mediante métodos cualitativos. Entre los logros podemos mencionar el cambio de actitud de los estudiantes al asumir un papel más activo en la construcción de su aprendizaje, y la reflexión ante sus propias capacidades.

Reconstrucción del Objeto de Estudio

El Instituto Pedagógico de Caracas pasa a formar parte de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL) en el año 1989, se inicia al mismo tiempo el Diseño Curricular Homologado que daría coherencia y homogeneidad a los currícula de los Institutos que pasan a integrar la Universidad Pedagógica. La conformación de la UPEL trae consigo la apertura de la carrera de Educación Integral, la cual egresará docentes integradores cuyo campo laboral sería la docencia en las dos primeras etapas de la Educación Básica. En el año 1995 se realiza la primera revisión a este pensum de estudios, teniendo como cursos homologados obligatorios Matemática I y Matemática II, Geometría queda relegada al bloque obligatorio institucional, y se crean simultáneamente dos cursos optativos, Resolución de Problemas y Juegos y Recursos Matemáticos. Mientras esto sucede en nuestra universidad, en el plan de estudio de la Educación Básica la Geometría ocupa un lugar cada vez más preponderante y se le asigna uno de los bloques de contenidos de los programas oficiales de 1° a 6°. A pesar de esto, la Universidad sigue sin asumir plenamente la importancia del pensamiento geométrico, evidencia de este señalamiento lo tenemos en el hecho de la no inclusión de la Geometría en el bloque de cursos homologados de la UPEL.

En cuanto al programa de estudio de este curso, el mismo carecía de coherencia con el perfil del egresado al que se dirigía, los contenidos programáticos respondían al diseño de los cursos dirigidos al docente de Matemática de la tercera etapa de Educación Básica y Educación Media. Por otra parte, el cambio en el currículo de la Educación Básica trajo como consecuencia el desplazamiento de contenidos conceptuales y procedimentales de $7^{mo.}$ grado hacia $5^{to.}$ y $6^{xto.}$ grado, lo que influyó en la cantidad de contenidos nuevos a incorporar en la formación de los docentes.

Esta situación de minusvalía en la enseñanza de la Geometría no es exclusiva de nuestro país, en el ámbito internacional esta problemática es de vieja data. La aparición de las "Matemáticas

Modernas" y la crisis de los fundamentos de principios de siglo, llevó al matemático a colocar el énfasis en el rigor, en el formalismo, y a relegar a la intuición de la construcción de su ciencia, como lo manifiesta Miguel de Guzmán (Gil y de Guzmán,1993). Lo que servía para la formalización fue utilizado también para la transmisión del conocimiento, indudablemente que esta concepción trajo consigo resultados nada alentadores para la enseñanza de la matemática, pero para el aprendizaje de la geometría resultaron verdaderamente devastadores. De Guzmán va más allá y analiza la situación del eslabón más débil en la estructura del conocimiento escolarizado, la enseñanza en los niveles elementales y la repercusión de estas crisis sobre ella. "La geometría, a nivel elemental es difícil de formalizar adecuadamente y así, en este intento, se nos fue por el mismo agujero el pensamiento geométrico, la intuición espacial y la fuente más importante que por muchos siglos ha tenido la matemática de verdaderos problemas y resultados interesantes abordables con un número pequeño de herramientas fácilmente asimilables". (Gil y de Guzmán, 1993, p.127).

La formación de los docentes no puede ser constante y predecible (lo que no implica improvisación), pues este tipo de educación no prepara a nuestros futuros docentes para las aulas que son heterogéneas, y con alto grado de incertidumbre. Así, debemos priorizar la construcción y reconstrucción de conceptos, la elaboración de conjeturas, la resolución de problemas, la adquisición de destrezas básicas de observación, estableciendo clases y jerarquías, trazando y construyendo figuras geométricas, es decir adquiriendo los procesos que le permitan comprender y transformar su medio. .

Por otra parte, la Educación Matemática debe coadyuvar en la formación de los ciudadanos conscientes de sus deberes y derechos, por lo tanto, es indispensable la profundización de la relación Educación Matemática y Desarrollo Social. Skovsmose (1999) nos habla así de lo indispensable que resulta la Matemática para ejercer la ciudadanía y comprender mejor el trabajo de los gobernantes. Al unísono, Almeida y Chamoso (2001), nos plantean que las explicaciones en las clases de Matemática no solo comunican información, sino que las opiniones y conclusiones de las personas también importan. Estos autores evidencian la importancia del trabajo reflexivo y cooperativo, por los resultados que este produce, y como enseñar a argumentar escuchando y respetando argumentos ajenos, que hace de esta tipología de actividad matemática una verdadera clase democrática.

En virtud de los planteamientos anteriores, ¿será posible el rescate, en los futuros docentes, del pensamiento geométrico y la intuición espacial de la que nos hablaba de Guzmán?, ¿podremos mediante una planificación flexible enfrentar la incertidumbre propia de los salones de clase?, ¿será factible la construcción y reconstrucción de conceptos, así como la elaboración de conjeturas en el tiempo limitado que poseemos y en un ambiente verdaderamente democrático?.

El análisis anterior y los cuestrionamientos que han surgido nos permiten visualizar en la actualidad un curso de Geometría, con el cual se forman los docentes integradores, estático, con poca participación de los estudiantes-docentes, y con un monopolio del conocimiento por parte del docente, en donde la intuición se deja de lado y la construcción del imprescindible pensamiento geométrico se reduce a trazados y memorizaciones.

Marco Teórico – Referencial. *Enseñanza de la Geometría*

La creencia de que la matemática se "inventa" ha sido desarrollada por científicos de trascendencia en el ámbito de la Educación Matemática como Leopold Kronecker, quien sostenía que sólo las operaciones de contar estaban predeterminadas, y que "Dios creó los números enteros...pero todo lo demás es obra del hombre", mostrándonos así el asombro de un ser humano ante un campo matemático que escapa a toda regla mecánica de pensamiento. Si aceptamos este último enfoque y nos adherimos a este planteamiento en cuanto a la Geometría, estaremos admitiendo que aún los denominados conceptos primitivos, no obstante la imposibilidad de encontrar en la naturaleza entes como los puntos y las líneas, desprovistos de tamaño los primeros y de anchura los segundos, casi todas las personas, matemáticos o no matemáticos creemos saber que son. Lo que podríamos llamar la "recuperación" de los procedimientos en Geometría es muy importante dentro de la matemática escolar, porque rescata una manera de hacer Geometría que había sido dejada de lado.

En base a lo anterior podemos afirmar que la observación del medio natural basándose en el sentido común, la intuición y la acción y la relación entre objetos, animales y personas, permite al hombre establecer reglas y principios geométricos que lo llevaron a sentar las bases del pensamiento lógico matemático y su formalización. ¿Por qué no usar este referente histórico como nuestra particular manera de acercar a nuestros estudiantes al aprendizaje de la Geometría?.

Teoría Social Crítica

La Teoría Social Crítica aborda la praxis crítica que conlleva a una acción social transformadora, esto porque los grupos sociales que la llevan a cabo tienen como objetivo su propia emancipación. Se trata pues de un modelo teórico, que orienta la investigación a la resolución crítica de los problemas y que fomenta la capacitación de los sujetos para su propia emancipación.

Carr y Kemmis (1988) la presentan como una forma de indagación que intenta incorporar una comprensión de la naturaleza indisoluble de la unidad teoría-práctica. Así se plantea en ella que esta relación teoría-práctica no puede limitarse, por una parte, a prescribir una práctica sobre la base de una teoría, y por la otra, a informar el juicio práctico.

Formación Docente

El tercer gran organizador de esta revisión teórica es la formación de los docentes, y de forma más general la educación como vía indispensable para potenciar al ser humano y desarrollar al máximo sus potencialidades, la educación cuya misión será transformar lo más profundo de ese ser, permanentemente en proceso de conformación e incorporarlo a una sociedad en evolución en la que esa persona se ha de integrar y transformar simultáneamente.

La formación de los docentes no puede ser constante y predecible, pues este tipo de educación no prepara a nuestros docentes para las aulas que son ambiguas y definitivamente humanas, ni las ciencias de la educación pueden eliminar totalmente esa incertidumbre. Creemos también en el docente que piensa en acción, el que hace uso de una variedad de planteamientos teóricos, estrategias pedagógicas y conocimientos, que se sirve de una serie de significados que le permitirán emitir juicios oportunos sobre un objetivo deseable.

Si cumplimos, en la práctica, con garantizar una preparación integral, que desarrolle capacidades técnicas y habilidades diversas, un aprendizaje continuo y una conciencia comprometida en la búsqueda de una sociedad más justa y solidaria, estaremos cumpliendo con la reivindicación de la educación como proceso social que responda a las características y necesidades de la sociedad para lograr el desarrollo pleno del ser humano.

Direccionalidad. *Cambios Propuestos.* Finalidad

Construir una estrategia metodológica para el desarrollo didáctico del curso Geometría, que permita una praxis pedagógica bidireccional y un papel activo, protagónico y cooperativo de los alumnos en la construcción de su aprendizaje.

Objetivos

- Planificar secuencias didácticas apropiadas y factibles de ser transferidas al nivel de Educación Básica, que propicien la participación activa y reflexiva del alumno en la construcción de su aprendizaje.
- Elaborar y utilizar materiales didácticos adecuados a los contenidos de aprendizaje referidos a las unidades de sólidos geométricos, Triángulos y Cuadriláteros, así como a las características de los alumnos del curso.
- Establecer en el aula relaciones interactivas y de reflexión que propicien en los estudiantes una actitud crítica y responsable ante su propio aprendizaje.

Para el logro de estos objetivos, intentamos acercarnos a los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales reflejados en el programa instruccional del curso de Geometría, como se describe a continuación: En primer lugar, recreando la mayor cantidad de contenidos que el tiempo útil de clase nos permita y haciendo uso de la intuición mediante actividades accesibles al nivel matemático de los alumnos, y que puedan relacionarse con el mundo real. Para este fin se diseñaron secuencias didácticas apropiadas que permitieron reorganizar los contenidos del curso y hacer uso de los talleres como estrategia de aprendizaje, en donde la resolución de problemas servirá como heurística. En segundo lugar, la utilización del Portafolio, para la recolección, organización y reflexión individual del progreso de cada estudiante, el cual permitió evidenciar la comprensión y el logro matemático de cada uno de ellos. En tercer lugar, a través de la selección y uso de un conjunto básico de materiales instruccionales apropiados, tales como el Tangram, el Geoplano, materiales reciclables, y juegos matemáticos, que permitieron mediante una pedagogía activa la recreación de conceptos, elementos y relaciones propias de los contenidos geométricos a desarrollar en este curso. Por último, se destacó en esta investigación la importancia del aprendizaje cooperativo, por lo tanto, asumimos el trabajo en pequeños grupos y las discusiones en plenarias afianzando la construcción de consensos a través de la cooperación de los miembros de los grupos, con respeto a las individualidades.

Diseño General de la Investigación. *Tipo de Investigación*

Se seleccionó la investigación-acción como método a través del cual se podían implementar técnicas y actividades dinámicas, amplias y participativas que facilitaran las acciones interrelacionadas de toda la clase.

Participantes y su Situación

Los sujetos involucrados en esta investigación fueron:

- 23 Estudiantes inscritos en el curso Geometría de la carrera de Educación Integral del Pedagógico de Caracas, quienes comparten sus estudios con la docencia.
- La docente del curso, egresada del Pedagógico de Caracas, especialidad de Física y Matemática, con postgrado en la especialidad de Dificultades en el Aprendizaje de la Matemática. Experiencia docente de dieciocho (18) años en la Formación inicial y permanente de Docentes Integradores, y de la especialidad Matemática.

Estrategias de Recolección de la Información.

Para realizar la recolección, procesamiento y análisis de la información, se siguieron las pautas de la investigación cualitativa. Se utilizaron las siguientes técnicas:

- Observación Participante: Se realizó durante y posterior a la acción y fueron registradas en las notas del investigador. Adicionalmente, se seleccionó un estudiante por cada grupo de trabajo como informante clave, se esperaba que recogieran las opiniones, actitudes y reflexiones de sus compañeros durante el trabajo en los pequeños grupos.
- Entrevistas a profundidad: Se ubicaron en dos momentos del semestre, y se pudo obtener tanto información acerca de algunas concepciones previas de los estudiantes, como las justificaciones acerca de una determinada actuación o conocimiento adquirido durante el curso. Todas las entrevistas realizadas fueron grabadas y se tomaron notas complementarias.

Estrategias para el Procesamiento, Análisis e Interpretación de la Información

Las categorías para el análisis e interpretación de la información recogida surgieron de la misma información obtenida.

Hasta el momento los resultados preliminares son

Los resultados fueron obtenidos mediante la triangulación de información proveniente de la observación participante, las entrevistas, los informantes claves, y los elementos teóricos que sustentan la investigación.

1. Categoría: **Concepciones Previas**: Se evidenció, que las ideas previas de los estudiantes se han mantenido durante la mayor parte de su vida. Estos hallazgos coinciden con los de Astolfi (1994), quien nos habla de lo perdurable de las ideas previamente construidas por los alumnos, las que según el autor, se mantienen, casi sin sufrir modificaciones hasta la educación superior.
2. Categoría: **Elaboración de Conjeturas**: El reconstruir una teoría, y no simplemente aplicarla, devino en múltiples dificultades, dudas y hasta frustración momentánea.

3. Categoría: **Situaciones Problematizadas:** Las situaciones problematizadas presentadas convergerían en conjeturas, en nuevos contenidos conceptuales y procedimentales. Se evidenció la poca experiencia que tienen los estudiantes al resolver un problema y obtener conclusiones al respecto.
4. Categoría: **Organización Social del Aula:** Las diferentes formas adoptadas para organizar a los estudiantes, favoreció la participación de un gran número de estudiantes en cada clase. De igual forma, la confrontación de ideas y concepciones, reflexión y toma de posición fue potenciada por las estrategias grupales utilizadas y por el ambiente de respeto que se propició.
5. Categoría: **Participación:** El papel activo y protagónico de los estudiantes estuvo limitado al inicio del semestre, se incrementó poco a poco y se consolidó notablemente hacia mediados del semestre. Se evidenció la poca cultura de participación que tienen los estudiantes, esto ligado al estigma de dificultad que presenta la asignatura no facilitó la creación de un ambiente abierto de participación espontánea desde el inicio del curso.
6. Categoría: **Modalidad de Clase:** El no realizar juicios sobre las participaciones y tomar en cuenta las opiniones de los estudiantes, fue percibido por ellos como rasgos de una clase democrática.
7. Categoría: **Actitud hacia la Matemática:** La actitud inicial de los estudiantes hacia a la Matemática fue mayoritariamente negativa, con un cambio positivo reportado hacia el final del curso.
8. Categoría: **Uso de Recursos:** Los recursos didácticos utilizados fueron percibidos como apropiados, propiciaron una mejor comprensión de los contenidos y surgieron como una necesidad de resolver un problema.
9. Categoría: **Transferencia a la Vida Profesional:** Se reportó que las estrategias desarrolladas y los recursos utilizados pueden, y deben, ser transferidos al ambiente de trabajo de los estudiantes-docentes.
10. Categoría: **Mediación del Docen**te**:** La mediación docente fue instrumento propiciador de los aprendizajes, y el uso de preguntas incentivó la discusión y facilitó la elaboración de conclusiones.
11. Categoría: **Tiempo:** Algunos estudiantes reportaron angustia y presión por la limitación del tiempo.

Dificultades evidenciadas

El reporte elaborado por informantes claves durante la primera mitad del curso se perdió en un alto porcentaje, al transcribían opiniones y juicios de valor en lugar de las descripciones de los procesos que se llevaban acabo en los grupos pequeños.

La evaluación de los contenidos de aprendizaje, a pesar del intento de diversificar técnicas e instrumentos, no respondió cabalmente a la metodología activa desarrollada.

Conclusiones generales

La Investigación-Acción fue la opción metodológica utilizada para guiar la investigación, asumimos las dificultades en su aplicación debido a la poca experiencia en este tipo de metodología. Sin embargo, a nuestro entender fue la opción correcta, puesto que permitió en varios momentos del proceso revisar estrategias, actividades y recursos y realizar los ajustes necesarios.

La Teoría Social Crítica sustentó el desarrollo de esta investigación, otorgándole una base teórico-educativa a la didáctica crítica que se estaba construyendo, como una referencia explícita a la praxis, la acción y el cambio que se estaba propiciando. Este cambio se vio reflejado en: el incremento del nivel de participación de los estudiantes, en la generación de sentimientos de seguridad con respecto a la materia y que contribuyen a formar en el alumno una percepción positiva de sí mismo, y en la responsabilidad asumida por los estudiantes del curso en cuanto a cumplir con tareas y asignaciones en los tiempos previsto y el nivel de compromiso con el que las asumían. La acción transformadora se evidenció también en el uso por parte de los alumnos-docentes de estrategias y recursos utilizados en clase, en sus propios salones de clase, y por último en la confrontación de supuestos teóricos al ser sometidos por la docente-investigadora y los estudiantes-docentes a la crítica reflexiva, lo que abría nuevas posibilidades de entendimiento.

Referencias Bibliográficas

Almeida, D. y Chamoso, J. (2001). ¿Existen lazos entre Democracia y Matemática?. *Uno. Revista Didáctica de las Matemáticas 28*, 100-109.

Carr, W. y Kemmis, S. (1988). *Teoría Crítica de la Enseñanza. La Investigación Acción en la Formación del Profesorado*. Barcelona: Martínez Roca.

Elliott, J. (2000). *El Cambio Educativo desde la Investigación-Acción*. Madrid: Morata.

Freire, P. (1975). *La Pedagogía del Oprimido*. Madrid: Siglo XXI.

Gil, D. y De Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias e Innovaciones*. IBERCIMA. Madrid: Popular. S.A.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1995). ¿Por qué los estudiantes no comprenden la Geometría?. *Geometría y algunos aspectos generales de la Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Habermas, J. (1987). *Teoría de la Acción Comunicativa*. Madrid: Taurus.

Mora, D. (2002). *Didáctica de las Matemáticas*. Caracas: Ed. de la Biblioteca - EBUC.

Namo, G. (2000). Formacao Inicial de Profesores para a Educacao Básica: Uma (Re)visáo Radical. Obtenido en Noviembre de 2001 de la dirección: www.unesco.cl/word/guiomaresignificacion.doc

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una Filosofía de la Educación Matemática Crítica*. (2a. ed.) (P. Valero, Trad.) Bogotá: Una Empresa Docente.

Geometría en Bachillerato

Gustavo Bermúdez
ANEP. Consejo de Educación Secundaria.
Uruguay
gbermudez@ipn.mx, gbermudez@adinet.com.uy
Factores afectivos, Pensamiento geométrico, Resolución de problemas – Nivel Medio y Superior

Resumen

La enseñanza de la geometría es materia de muchos estudios y aproximaciones. En trabajos considerados para este taller (Bermúdez,1996; Flores y Barrera,2002; Nolé, 2001; Siñeriz,2002; Gutiérrez y Jaime,1994), se percibe el interés de docentes e investigadores latinoamericanos en generar propuestas que permitan mejorar su enseñanza. En general, éstas parten del modelo Van Hiele[1], y se reportan propuestas a alumnos (Bermúdez, 1996) y profesores (Flores y Barrera, 2002) en los cuales se exploran dificultades de unos y otros para acceder a los distintos niveles de aprendizaje. Así, se propuso este taller donde el participante pudo experimentar el proceso de conjetura y demostración, para trabajar en el nivel 4 del modelo, del que se registran pocas propuestas.

Introducción

La propuesta de taller presentado en esta oportunidad, es la continuación de una línea de trabajo en el área de la enseñanza de la geometría que el autor ha presentado en varias reuniones anteriores: Puerto Rico 1996, República Dominicana 1999 y Argentina 2001, en búsqueda de estrategias que permitan a los estudiantes la participación activa en la construcción de su conocimiento y apropiarse verdaderamente de una poderosa herramienta de comprensión del mundo de la matemática como lo es la geometría métrica (o euclidiana). Desde la utilización de los instrumentos geométricos, que permiten construcciones más o menos elementales, se propusieron en este taller, la resolución de un conjunto de problemas sobre lugares geométricos. En ellos, los participantes, debieron analizar, conjeturar y demostrar, en un ambiente de trabajo en equipo.
El objetivo perseguido, es el de tener "a mano" una serie de problemas y ejercicios, que permitan trabajar con propuestas para el nivel 4 de Van Hiele. En general, las que se registran, se destinan al trabajo en los primeros dos o tres niveles.

---

[1] Según (Gutiérrez y Jaime, 1995) los cuatro niveles de Van Hiele, pueden esquematizarse de la siguiente forma: Primer nivel: la consideración de conceptos es global, no se consideran elementos ni propiedades. Segundo nivel: los conceptos se entienden y manejan a través de sus elementos. Tercer nivel: se establecen relaciones entre propiedades. Cuarto nivel: se caracteriza por la comprensión y el empleo del razonamiento formal. Esto significa que "*se comprende y utiliza el engranaje existente en el mundo matemático, por el cualexisten unas primeras propiedades –axiomas- a partir de las cuales se puede construir el edificio matemático, en el cual las reglas de juego consisten en la aplicación estricta y correcta, según las leyes de la lógica, de propiedades ya verificadas para obtrener nuevas propiedades*". Quinto nivel: a partir de diferentes sistemas axiomaticos, es posible manejarse en diferentes geometrías. Los niveles no están asignados a una edad especial de los estudiantes.

Este cuarto nivel, es el que plantea la posibilidad del alumno de efectuar conjeturas y demostraciones. O sea, el alumno que llega a este nivel, es el que puede demostrar. Por ello, la demostración, como proceso, es central en el trabajo propuesto.

Así, se intentaron acercamientos para percibir el valor de la demostración en geometría (y, por extensión, a la matemática): un tema que ha sido analizado y estudiado ampliamente, pero que sigue planteando dificultades a alumnos, y resulta árido a los docentes.

En los últimos años, además, la propuesta de hacer demostraciones en la clase (aún en bachillerato) ha sido puesta en cuestión, en parte debido a algunas discusiones que se han generado en torno al papel de la demostración en el currículum, especialmente en Norteamérica en los últimos 30 años.

Es especialmente ilustrativo, lo que afirma (Hanna,1996), buscando causas de esta situación:

> " *en la investigación misma el uso de las demostraciones asistidas por la computadora, la creciente consideración en la cual se considera la experimentación en matemáticas y la invención de nuevos tipos de demostración que se separan de los criterios tradicionales, han llevado a plantear la hipótesis que los matemáticos aceptarán tales formas de validación en lugar de las demostraciones.*" (traducción libre del autor)

Todos vemos día a día propuestas, que más que demostraciones, consisten en verificaciones o experimentaciones, muchas veces visualizaciones mediante herramientas informáticas, pero que frecuentemente dejan de lado la <u>rigurosa</u> demostración. La creciente utilización de, por ejemplo, software para geometría dinámica, ha provocado una gran difusión de "demostraciones" que se reducen al registro de elementos visuales, de experimentaciones, pero que dejan totalmente relegada la misma justificación de tales situaciones o resultados.

Sin embargo, sostenemos que la demostración, la posibilidad de aprender a demostrar, de "armar" y escribir una demostración, es parte imprescindible de la formación básica matemática de cualquier individuo.

La propuesta consistió en una serie de problemas, tomados de diferentes ámbitos y cursos de geometría euclidiana o métrica de Uruguay, buscando acercamientos variados, en los que, además de trabajar en geometría, se buscaron formas para que cada participante pudiera, mientras trabajaba en geometría, experimentar el valor de la demostración.
Compartimos la preocupación de Gila Hanna:

> " *..muchos de los que se ocupan de la didáctica de las matemáticas han llamado en cuestión el estatuto de la demostración llevando adelante la afirmación ,(.....) de que la demostración es un elemento clave para la imagen autoritaria de las matemáticas....*
>
> ....
>
> *De hecho es verdad lo opuesto. Una demostración es un razonamiento transparente, en el cual todas las afirmaciones usadas y todas las reglas de razonamiento son claramente expuestas y abiertas a las críticas. La misma naturaleza de la demostración impone que la validez de las conclusiones deriva de la demostración misma,*

> *no de una autoridad externa.. La demostración lleva a los estudiantes el mensaje de que pueden razonar por su propia cabeza, que no tienen necesidad de remitirse a una autoridad. Por lo tanto el uso de la demostración en la práctica didáctica es realmente anti-autoritario* (traducción libre del autor)

Se consideraron problemas de "determinación de lugares geométricos", como objetos que permiten "hacer demostraciones". Un *lugar geométrico* es un conjunto de elementos geométricos caracterizados por una propiedad (en general, pues, un conjunto de puntos definido por comprensión).

El análisis del problema de "determinar el lugar geométrico" de un punto, implica demostrar dos proposiciones que llamamos directa y recíproca.
Es decir, diremos que si el punto cumple la propiedad, entonces pertenece a una figura *F*; y recíprocamente, si el punto pertenece a la figura F, entonces cumple la propiedad .

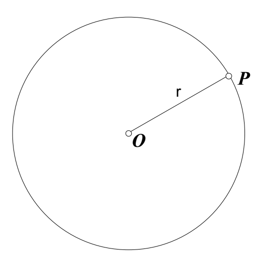
Bajo estos supuestos, en el trabajo realizado, se debieron demostrar condiciones necesarias y suficientes. Podríamos abundar en los detalles "formales" de este tipo de proposiciones, pero nos limitaremos a establecer, al menos, que la lista de problemas constituyen un ejercicio de demostración, en las cuales, además, es posible distinguir proposiciones directas y recíprocas. Y todos los docentes, somos concientes de la gran dificultad que experimentamos en nuestras clases cuando intentamos demostrar o, incluso, hacer comprender la diferencia entre proposiciones directas y recíprocas.

Por ello, comenzamos por recordar algunas definiciones con las que trabajaríamos, caracterizando a estos entes geométricos, básicamente, por sus características como lugares geométricos.

Lugares geométricos básicos:

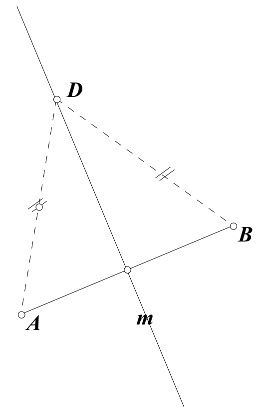
Circunferencia: Es el conjunto de los puntos del plano que distan una longitud r (radio) de un punto fijo *O* (centro)

En símbolos: $P \in C \Leftrightarrow \mathbf{d}(P, O) = r$



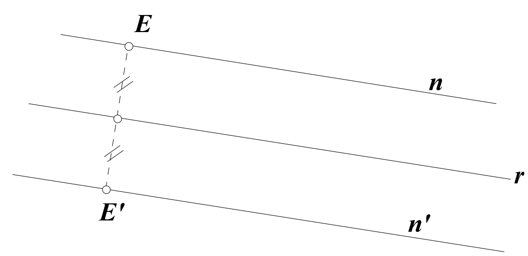
Mediatriz de un segmento: Es el conjunto de los puntos de un plano que equidistan de los extremos del segmento.

En símbolos: $D \in m \Leftrightarrow \mathbf{d}(D, A) = \mathbf{d}(D, B)$



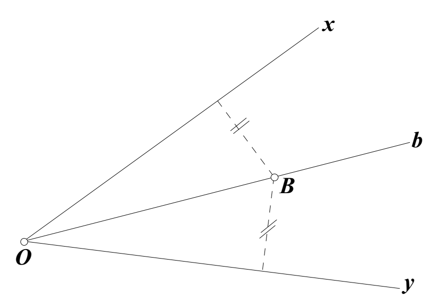
Unión de paralelas: Es el conjunto de los puntos de un plano que distan una longitud l de una recta r.

En símbolos:$E \in n \Leftrightarrow \mathbf{d}(D, r) = l$

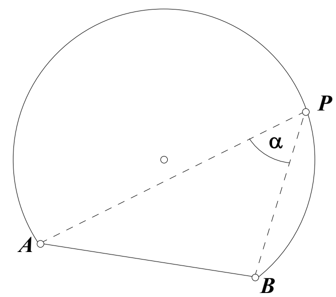


Bisectriz de un ángulo: Es el conjunto de los puntos interiores del plano que equidistan de las rectas que contienen los lados del ángulo.

En símbolos: $B \in b \Leftrightarrow \mathbf{d}(B, Ox) = \mathbf{d}(B, Oy)$



Arco capaz: Es el conjunto de los puntos del plano que son vértices de un ángulo dado, cuyos lados pasan por dos puntos fijos.



Los problemas:

1.- Dadas dos semirrectas perpendiculares, *Ox* y *Oy*, fijas. Se considera en cada una de ellas puntos *A* y *B* (variables) tales que la distancia *AB* sea constante. Sea *M* el punto medio del segmento *AB*.

a. Determine el lugar geométrico del punto *M*
b. Por *A* y *B* se trazan dos rectas perpendiculares a las semirrectas *Ox* y *Oy* que se cortan en *P*. Determine el lugar geométrico del punto *P*.

2.- Se considera una recta *m* y un punto $A \in m$ fijos. Se construyen los triángulos equiláteros *ABC* (de sentido horario), con $B \in m$.

a. Determine el lugar geométrico del punto *C* al variar *B*.
b. Sea *I* el incentro del triángulo *ABC*, determine el lugar geométrico de *I* al variar *B*

3.- Sea *AMN* un triángulo equilátero (en sentido antihorario) fijo. Una recta *r* variable, pasa por *M*, y en ella se consideran dos puntos *B* y *C*, tales que el triángulo *ABC* es equilátero (antihorario).

a. Determine el lugar geométrico de *B* cuando *r* no corta al segmento *AN*
b. Determine el lugar geométrico de *B* cuando *r* corta al segmento *AN*.

4.- Sean una circunferencia, de centro *O*, y un punto *P* exterior a ella (fijos) Por *P* se traza una recta *n* (variable), que corta a la circunferencia en dos puntos *A* y *B*. *M* es el punto medio del segmento *AB*. Determine el lugar geométrico de *M*.

5.- Sea una semi-circunferencia fija de diámetro *AB*. En ella se consideran dos puntos *M* y *N* tales que la distancia entre ellos es igual al radio (*A*, *M*, *N* y *B* horario). Las rectas *AM* y *BN* se cortan en *L*. Determine el lugar geométrico de *L*.

6.- Sea *AB* una cuerda fija (no diametral), de una circunferencia C fija. En el mayor de los arcos que determinan *A* y *B*, se considera un punto *P* variable. En la semirrecta opuesta a *PA* se elige un punto *D*, de forma que $\overline{PD} = \overline{BD}$ Determine el lugar geométrico del punto *D*.

7.- Sea *BC* una cuerda fija, no diametral, de una circunferencia C. En el mayor arco de los determinados, se elige un punto *A*, variable. Determine el lugar geométrico del *incentro* del triángulo *ABC*.

8.- Sea *BC* una cuerda fija, no diametral, de una circunferencia C. En el mayor arco de los determinados, se elige un punto *A*, variable. Determine el lugar geométrico del *ortocentro* del triángulo *ABC* (recuerde analizar dos casos, según sea acutángulo u obtusángulo el triángulo *ABC*).

Evaluación del trabajo:

Se propuso a los participantes la serie de problemas (dos en cada sesión) y se manejaron los elementos necesarios para establecer las conjeturas que permitiesen elaborar una proposición a demostrar. La tarea resultó bastante compleja, pues la mayoría de los profesores asistentes, además de desconocer a los conjuntos de puntos descritos anteriormente como lugares geométricos (en especial el arco capaz), experimentaron numerosas dificultades para poder validar o refutar sus conjeturas.

Esto, nos hace pensar que los docentes participantes del taller, muchos de los cuales se presentaron como profesores que dictan geometría en sus cursos, no manejan como posibilidad del trabajo geométrico la conjetura y/o la demostración. De acuerdo a lo que el autor percibió y de lo que se conversó, se establece que la mayor parte de la labor que a diario realizan en el aula se limita a la identificación de propiedades (de triángulos, de cuadriláteros, etc.) y a su tratamiento a través de algunas construcciones bastante sencillas (niveles 1 a tres del modelo)

Así, podemos suponer, que nuestros cursos de geometría, en general, renuncian a la posibilidad del acceso a niveles los superiores del modelo planteado por el matrimonio Van Hiele, en el sentido que limitan su trabajo y propuestas a los dos primeros niveles y en pocas excepciones, el tercero. Esto confirma las conclusiones de Flores, H y Barrera, S (2002), quienes ya lo habían percibido y reportado.

En el mismo sentido, se constató la inexistencia de propuestas, ya sea a nivel de textos como de investigaciones, que permitan el acercamiento buscado, ya que la mayoría de ellas están planteadas para los primeros niveles.

Lamentablemente, el trabajo en el taller, no permitió detectar si la serie de problemas elegida es adecuada para el objetivo buscado. Sin embargo, la percepción de los participantes es que sí lo es. Para el autor de la propuesta, no deja de ser una percepción y reafirma la necesidad de la búsqueda de propuestas que sean validadas en la práctica y examinada mediante la investigación.

No fue considerada con la necesaria importancia (por falta de tiempo) la aplicabilidad de los asistentes informáticos de geometría dinámica que existen y como pueden auxiliar la labor docente en este aspecto.

Referencias Bibliográficas

Bermúdez, G. (1996). Taller: Geometría para alumnos de 15 años. En Cruz, Torres, Rodríguez y Planchart (Eds.), *Memorias de la Décima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (pp 472- 480). Puerto Rico: Universidad de Puerto Rico

Coxeter, H. y Greitzer, S. (1993). *Retorno a la geometría*. Madrid, España: DLS-Euler

Flores, H y Barrera, S. (2002). La geometría del círculo: Un camino hacia la demostración. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 15, Tomo 1, (pp.263-365). México.

Gutierrez, A. y Jaime, A. (1995). ¿Por qué los estudiantes no comprenden geometría?. *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática,* (pp 23-43) México: Iberoamérica.

Hanna, G. (1996). *The ongoing value of proof*. Obtenido en julio de 2004 del sitio web: http://www.oise.utoronto.ca/~ghanna/pme96pfr.html.

Nole, J. (2001). Evaluación del pensamiento lógico formal en estudiantes de un curso de geometría métrica. En G. Beitía (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Vol. 14, pp. 560-564). México.

Puig, A. (1972). *Curso de geometría métrica.* (Tomos I y II). (10a ed.). Madrid, España: Biblioteca Matemática

Siñeriz, L. (2002). Los problemas de regla y compás: una mirada heurística. En C. Crespo (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 15, Tomo 2, (pp. 932-937). México.

La Resolución de Problemas como un Medio para la Formación del Concepto de Media Numérica. Primera Parte

Otilio Bienvenido Mederos y José Enrique Martínez
Universidad Central "Marta Abreu" de las Villas
Cuba
oma8111@yahoo.es, josee@uclv.edu.cu
Formación de Profesores, Resolución de Problemas – Nivel Superior

Resumen

Se realiza el estudio del concepto de media numérica con dos objetivos: Contribuir a la preparación de los profesores de matemática en la utilización de la resolución de problemas como un medio para facilitar la formación de conceptos matemáticos, y Profundizar en las características particulares de este proceso de formación. Se ha escogido el concepto de *media numérica* porque en muchos cursos, su estudio sólo se limita a dar la definición de pocos objetos de su extensión como las medias aritmética, geométrica y armónica. El trabajo consta de cinco secciones que complementan los objetivos propuestos.

La enseñanza y el aprendizaje de la matemática por medio de la resolución de problemas

La enseñanza y el aprendizaje de los contenidos matemáticos por medio de la resolución de problemas están dirigidos a insistir en los procesos de pensamiento y de aprendizaje. Desde hace mucho tiempo en Psicología, se han estudiado profundamente los procesos de formación, desarrollo (Vygotski, 1998) y generalización (Davidov, 1981) de conceptos; no obstante, consideramos que hay mucho que hacer en esta dirección con relación a la utilización de la resolución de problemas con este fin en matemática.

En este sentido Miguel de Guzmán (1993) plantea: "Tengo un verdadero problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida; otras, un tanto confusamente perfilada y no conozco el camino que me puede llevar de una a otra". Siguiendo la idea de Guzmán, tenemos el criterio que algunas de las características que debe tener un problema son: ser accesible a los estudiantes; o sea, que estos conozcan recursos y contenidos matemáticos para su solución y de esta forma estén en condiciones de desarrollar diferentes estrategias para acceder y utilizar dichos recursos en la resolución del problema; que propicien que los estudiantes sientan una motivación intrínseca y que se diviertan con la actividad mental que requiere su solución; que faciliten el desarrollo de la intuición y la creatividad; que puedan generalizarse a otros contextos y de esta forma facilitar que los estudiantes planteen nuevos problemas, en particular de su entorno, etc.

Algunas de las acciones que hemos aplicado con buenos resultados al utilizar la resolución de problemas como un medio para la enseñanza-aprendizaje de la matemática han sido:

- Insistir en que la obtención de la solución de un problema no debe considerarse como su etapa final. Una vez que se haya obtenido su solución, se debe realizar un análisis de las ventajas, calidad de las estrategias o métodos utilizados en el proceso de resolución.

- Aconsejar varias formas de resolución de un problema teniendo en cuenta los diferentes estilos de aprendizajes de los estudiantes, mediante la orientación de su análisis desde el punto de vista de diferentes contextos matemáticos, por ejemplo, geométrico, algebraico, aritmético, funcional, etc. Por lo general, los estudiantes que llegan a la universidad han desarrollado pocas habilidades en el empleo de diferentes vías para resolver un problema, e incluso, muchos terminan su carrera sin esta habilidad.
- Utilizar cadenas del tipo (problema planteado–problema resuelto–nuevos problemas planteados) que motiven y faciliten diferentes generalizaciones de un concepto.
- Ofrecer impulsos y adecuados niveles de ayuda para que sientan la necesidad, una vez solucionado el problema, de plantear nuevos problemas dirigidos, por ejemplo, a eliminar alguna restricción bajo la cual fue resuelto, a un contexto más general intramatemático, o a resolver una situación práctica relacionada con el problema resuelto.
- Motivar el estudio de un nuevo tema mediante el planteamiento de un conjunto de problemas que le permitan a los estudiantes comprender la importancia de dicho tema. Estos problemas pueden estar relacionados con el desarrollo histórico del tema, con aplicaciones, con situaciones del contexto de los estudiantes, etc.
- Utilizar la resolución de problemas para que los estudiantes participen en la construcción de la matemática que aprenden y para que le encuentren un adecuado sentido a sus ideas, etc.

Ideas generales sobre el proceso de formación de conceptos

La formación de un pensamiento científico – teórico en los estudiantes es una exigencia con carácter científico en la educación. Para ello se requiere de un estudio amplio del sentido lógico y teórico – cognitivo de los procesos y formas de pensamiento, sobre todo de los procesos de abstracción, generalización y de formación de conceptos; los cuales, independientemente de sus singularidades, tienen una extraordinaria relación y unidad.

Algunas acciones útiles para que los estudiantes participen en estos procesos son:

- Se le presenta a los estudiantes cierto número de objetos, especialmente seleccionados, con el objetivo que los analicen y los comparen.
- Se ayude (de impulsos) a los estudiantes para que seleccionen propiedades de cada objeto, los comparen con los otros objetos y no consideren las propiedades no comunes.
- Determinar un conjunto de propiedades comunes a todos los objetos analizados.
- Del conjunto de propiedades comunes se debe seleccionar un conjunto mínimo de propiedades (esenciales), a partir de las cuales se puedan obtener todas las demás propiedades comunes.
- Utilizar una palabra para nombrar la clase de todos los objetos que cumplen las propiedades esenciales.

Problemas sencillos de geometría plana que conducen a diferentes medias de dos números reales positivos

El objetivo de estos problemas es mostrar a los profesores cómo es posible facilitar la presentación de un conjunto de objetos numéricos que constituyen su solución, y de esta forma comenzar a llamar la atención de los estudiantes sobre estos números. Si se presentan colecciones de problemas cuya solución numérica también nos llevaría a cada uno de estos números, los estudiantes comenzarán a tener interés por ellos y entonces pueden ser guiados para que sientan la necesidad de encontrar algunos rasgos comunes. El problema que a continuación se plantea ha sido tomado del artículo (Maor, 1977).

Problema 1

Dado un rectángulo de lados a y b, se quiere construir un cuadrado equivalente de lado l, que cumpla una de las propiedades siguientes:

1. ***El cuadrado tiene el mismo perímetro que el rectángulo.*** Esta propiedad se expresa matemáticamente por la igualdad $2(a + b)=4l$, de donde resulta que $l=½(a+b)$.

Una vez que se ha obtenido esta solución es muy importante que se plantee a los alumnos el ejercicio siguiente:

Ejercicio 1. Probar que si se representan en el eje real los números a, b y $½(a+b)$, el punto correspondiente a $½(a+b)$ ocupa el punto medio del segmento que tiene por extremos los puntos correspondientes a los números a y b.

Otra variante de solución apropiada para los estudiantes con un estilo de aprendizaje preferentemente visual o físico, que puede ilustrarse geométricamente, se basa en el razonamiento siguiente: el cuadrado se puede obtener reduciendo el lado mayor b en una cantidad r y aumentando el lado a del rectángulo en una misma cantidad r, hasta que $a+r=b-r$. En efecto, de la igualdad anterior se obtiene $r=½(b-a)$ y de $l=a+r$ resulta que $l=½(a+b)$.

Para que, dados dos números a y b, el número $½(a+b)$ adquiera un significado, es muy importante que se presenten varios problemas cuya solución conduzca a ese número, o en cuyo proceso de solución juegue un papel importante ese número. Sólo entones debemos darle el nombre de media aritmética y utilizar la notación MA, o sea, $MA = ½(a+b)$.

2. ***El cuadrado tiene la misma área que el rectángulo.*** Siguiendo la primera idea, ahora rutinaria, que condujo a la solución del caso anterior; los estudiantes pueden llegar a que $ab = l^2$, o sea, $l = \sqrt{ab}$.

Si se quiere favorecer a los alumnos visuales se puede utilizar e ilustrar geométricamente la idea siguiente: contraer el lado mayor b multiplicándolo por el número $1/r$ y dilatando el lado menor *a* del rectángulo multiplicándolo por el número *r* (*r*>1) de tal forma que $l = b/r = ar$ de donde resulta que $r = \sqrt{b/a}$ y $l = \sqrt{ab}$.

Un ejercicio muy útil para que los estudiantes puedan determinar algunos rasgos comunes de las medias que van obteniendo es el siguiente:

Ejercicio 2: Pruebe que los números *a, b y* $\sqrt{ab}$ satisfacen la cadena de desigualdades $a \leq \sqrt{ab} \leq b$ y determine cuando se cumple la igualdad.

Es recomendable plantear a los estudiantes varios problemas cuya solución conduzca al número $\sqrt{ab}$. Cuando este número haya adquirido importancia para los estudiantes se le puede llamar media geométrica de *a* y *b*, e indicarse por $MG = \sqrt{ab}$.

3. ***Las diagonales del cuadrado tienen la misma longitud que las del rectángulo.*** Siguiendo la primera idea con que se han resuelto los dos casos anteriores se llega a la igualdad $\sqrt{2}l = \sqrt{a^2 + b^2}$, y de aquí resulta que $l = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2 + b^2)}$.

Ejercicio 3. Pruebe que $a \leq \sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2 + b^2)} \leq b$ y determine cuando se cumple la igualdad.

Después de plantear otros problemas cuya solución conduzca al número $\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2 + b^2)}$, se puede indicar este número por *MC* y denominarlo media cuadrática de *a* y *b*.

4. ***El cuadrado tiene igual relación área / perímetro que el rectángulo.*** Siguiendo la misma idea anterior se tiene que $\dfrac{l^2}{4l} = \dfrac{ab}{2(a+b)}$ de donde resulta $l = \dfrac{2ab}{a+b}$. A este número se le denomina media armónica de *a* y *b* y se denota por *MH*.

Ejercicio 4 Pruebe que $a \leq \dfrac{2ab}{a+b} \leq b$ y que las igualdades se tienen si y sólo si *a* = *b*.

5. ***El cuadrado tiene igual relación área / diagonal que el rectángulo.*** Siguiendo la idea rutinaria usual se llega a la igualdad $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{l^2}{\sqrt{2}l}$, de donde se obtiene que $l = \sqrt{\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}$ $\left(\dfrac{1}{l} = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}\right)}\right)$. De la expresión entre paréntesis se concluye que el recíproco del lado del cuadrado debe ser igual a la media cuadrada de los recíprocos de los lados del rectángulo. Por esta razón, se denomina al número $\sqrt{\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}$ media cuadrática armónica de los números *a* y *b*, y este número se indica por *MHC*.

Ejercicio 5. Pruebe que $a \leq MHC \leq b$ y que las igualdades se tienen si y sólo si, a = b.

Ejercicio 6. Pruebe que la media geométrica de dos números a y b es igual a la media geométrica de las medias cuadrática y armónica cuadrática de dichos números.

Conclusiones parciales

1. Se ha indicado cómo proceder para que dados dos números a y b se contribuya a que tengan un significado especial para los estudiantes los números:

$$\sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}},\ \frac{2ab}{a+b},\ \sqrt{ab},\ \frac{1}{2}(a+b),\ \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

2. Se han planteado cinco ejercicios que están dirigidos a destacar dos rasgos comunes a las cinco medias anteriores:
   2.1 Si M es uno cualquiera de esos cinco números, entonces $a \leq M \leq b$
   2.2 Se cumple que $M = a$ si, y sólo si, $a = b$.

Primeras abstracciones y primera generalización vinculadas al concepto de media numérica

En esta sección, trabajando sólo con la forma de las expresiones de cuatro de las cinco medias introducidas, se obtendrán expresiones que admiten, a partir de su comparación, una generalización; o sea, se realiza abstracción de todas las demás características y rasgos de estas cuatro medias y, analizando y trabajando con la forma de sus expresiones, se llega a nuevas expresiones que permiten una primera generalización.

Dados dos números *a* y *b*, se deben transformar las expresiones de *MHC, MH, MH, MC* hasta escribirlas en la forma

$$MHC = \left(\frac{a^{-2}+b^{-2}}{2}\right)^{\frac{1}{-2}},\quad MH = \left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{\frac{1}{-1}},\quad MA = \left(\frac{a^{1}+b^{1}}{2}\right)^{\frac{1}{1}},\quad MC = \left(\frac{a^{2}+b^{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

Estas expresiones sugieren sustituir las notaciones *MHC, MH, MH* y *MC* por M_{-2}, M_{-1}, M_{1}, y M_{2}, respectivamente, y utilizar una expresión general para las cuatro medias; i. e.

$$M_p = \left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}},\quad p \in \{-2,-1,1,2\}$$

Si tenemos en cuenta que $\{-2,-1,1,2\} \subset N \subset Z \subset Q \subset R$; entonces no es difícil guiar a los estudiantes para que planteen una primera generalización del concepto de media numérica con una extensión de cuatro objetos a un concepto con una extensión con infinitos objetos.

Definición 1. Se denomina media p-ésima de dos números reales a y b, al número $\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \in R \setminus \{0\}$, y se indica por M_p.

Ejercicio 7. Pruebe que $a \leq M_p \leq b$ y que las igualdades se tienen si, y sólo si, $a = b$.

Abstracciones más profundas conducentes a la determinación de rasgos esenciales

El ejercicio 7 de 4 nos permite asegurar que toda media p-ésima tiene esos dos rasgos comunes. A continuación, utilizando expresiones funcionales, enunciamos esos rasgos en forma de propiedades para las medias p-ésimas; con lo que se ejemplifica como es posible iniciar los procesos que conducen a una segunda generalización.

Dados dos números *a* y *b* cada media cumple:

(i) Es menor o igual que $max\{a, b\}$ y mayor o igual que $min\{a, b\}$; i. e.

$min\{a,b\} \leq M_p(a,b), G(a,b) \leq max\{a,b\}$

(ii) Es igual a $max\{a, b\}$ e igual a $min\{a, b\}$ si, y sólo si, $a = b$; o sea

$min\{a,b\} = M_p(a,b) = G(a,b) = max\{a,b\}$ *si, y sólo si,* $a = b$

A continuación exponemos una idea de cómo proceder para ayudar a los estudiantes a que comprendan que las medias introducidas satisfacen otra propiedad muy importante. Esto puede hacerse por medio del planteamiento del ejercicio siguiente:

Ejercicio 8. Encuentre los valores de M_{-2}, M_{-1}, G, M_1 y M_2 que corresponden a los valores de $a_k = \frac{1}{k}a$ y $b_k = \frac{1}{k}b$ para $a = 10$, $b = 100$ y $k = \overline{1{,}10}$; y para $a = 1$, $b = 2$ y $k = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{10}$.

Posteriormente se puede guiar a los alumnos para que planteen y prueben la hipótesis siguiente: si se sustituyen *a* y *b* por *ta* y *tb*; entonces el valor de M_p correspondiente a los valores *ta* y *tb* es igual al valor $tM_p(a,b)$.

Además, se pueden presentar ejercicios visuales y físicos que ayuden a concluir que la media geométrica y cada media p-ésima de dos números satisfacen la relación:

(iii) Es invariante por cambio de escala, o sea, $M_p(ta, tb) = t\,M_p(a,b)$, $G(ta, tb) = tG(a,b)$.

En el artículo (Nicolai, 1977) se presenta una definición del concepto de media que toma estas tres propiedades como el contenido de este concepto.

Definición 2. Dados dos números reales positivos *a* y *b,* todo número *M(a, b)* que satisface las propiedades (i), (ii) y (iii) recibe el nombre de media numérica de *a* y *b*.

La definición 2 constituye una generalización de las cinco medias introducidas en 3.

Resulta muy importante que el profesor plantee la pregunta: ¿Existen medias numéricas para *a* y *b* que satisfacen la definición 2 y que no son medias p-ésimas?. Esta pregunta puede hacerse con diferentes objetivos: para que los estudiantes determinen si la segunda generalización es más amplia (si la respuesta es positiva) o de igual amplitud (si la respuesta es negativa), lo que favorece la comprensión del concepto: extensión conceptual.

Ejercicio 9. Dados los números reales *a, b,* p_1 y p_2; pruebe que $M_{p_1p_2}(a,b)=\left(\frac{a^{p_1}b^{p_2}+a^{p_2}b^{p_1}}{2}\right)^{\frac{1}{p_1+p_2}}$, satisface la definición 2 si, y sólo si, $p_1p_2 \geq 0 \quad y \quad p_1+p_2 \neq 0.$

Del planteamiento de este ejercicio se concluye que la pregunta anterior tiene una respuesta afirmativa; y que por lo tanto, el concepto de media que corresponde a la definición 2 tiene una extensión más amplia que el de media p-ésima.

Conclusiones: Todo concepto posee dos características lógicas muy importantes, la extensión y el contenido. La extensión es la colección de todos los objetos que corresponden al concepto y el contenido es un conjunto de propiedades que constituyen condiciones necesarias y suficientes para que un objeto pertenezca a su extensión.

En este artículo se han utilizado cadenas de problemas y ejercicios para facilitar un primer proceso de formación, desarrollo y generalización del concepto de media, que ha estado encaminado fundamentalmente a la ampliación sucesiva de la extensión de este concepto. Estamos ahora en condiciones de realizar un estudio más amplio del contenido de dicho concepto; o sea, de determinar propiedades adicionales de las medias numéricas. Por ejemplo, la propiedad (i) del contenido de este concepto refiere que todas las medias de dos números *a* y *b* están entre *a* y *b*; luego, es natural preguntarse si las mismas satisfacen alguna relación de orden.

Referencias Bibliográficas

Davidov, V. (1981). *Tipos de generalización en la enseñanza.* La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

De Guzmán, M. (1993). *Tendencias innovadoras en educación matemática.* Obtenido en mayo 12, 2005, del sitio web de la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura: http://www.oei.es/edumat.htm.

Lauber, M.R. (1977) Commenting on Skidell's. The Harmonic Mean. A Monograph and Some Problems. *Mathematics Teacher 70*, p.389.

Maor, E. (1977). A Mathematicians repertoire of means. *Mathematics Teacher 70*, 20-25.

Nicolai, M.B. (1977). Commenting on Maor's. A Mathematicians repertoire of means. *Mathematics Teacher 70,* p.486.

Vygotski L.S. (1998). *Pensamiento y Lenguaje* (2a. ed.). La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Razones y Proporciones en la Dinámica Cotidiana

Anabelle Castro, Rommel Alvarado, Omar Gätgens y Francisco Rodríguez
Sede Regional San Carlos, Instituto Tecnológico de Costa Rica
Costa Rica
acastro@itcr.ac.cr
Formación de Profesores – Nivel Básico, Medio

Resumen

Este artículo se enmarca en el proyecto de investigación "*Creación de metodologías que permitan la integración de ciencias y matemáticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la educación diversificada costarricense*", que fuera realizado por un equipo interdisciplinario conformado por profesionales en las áreas de matemática, física, química, biología y sociología. Junto a una breve contextualización teórica y metodológica, el presente artículo ofrece algunos ejemplos con prácticas y contenidos que faciliten a los estudiantes aplicar los conceptos de razones y proporciones en el análisis de casos vinculados a la vida cotidiana, y que a su vez permiten la integración con otras disciplinas.

En los últimos años ha sido evidente la descontextualización (económica, social, ambiental) en el sistema educativo costarricense de la enseñanza de los conceptos matemáticos y el creciente fracaso de los estudiantes en los cursos de matemáticas. Por este motivo la preocupación de los autores ha estado centrada en la búsqueda de actividades y contenidos que puedan ubicarse en el entorno vital de los alumnos, de manera que se logre no solo despertar su interés por los temas matemáticos, sino que además estas situaciones se conviertan en experiencias que ellos puedan imaginar y verificar, con el propósito de que obtengan aprendizajes significativos cimentados en teorías propuestas, entre otros, por Ausubel, Novak y Hanesian (1993) y Pozo (1996).

La ciencia y la tecnología han evolucionando y transformando la manera de vivir, la manera de proponer y resolver los problemas teóricos y prácticos; el modo de concebir el progreso material e intelectual; la manera de sentir, pensar y explorar la realidad. Actualmente ambas son claves en la economía y la cultura de los países más desarrollados (Bunge, 1984, 1999; Sagasti, 1981; Torres y Chavarría, 1990). La Ciencia y la Tecnología afectan, igualmente, la manera *como se hace y percibe las matemáticas*. Sin embargo aún cuando se sabe que la tecnología permite modernizar nuestras aulas y convertir el aprendizaje de las matemáticas y de las ciencias en algo más pertinente e interesante para los estudiantes, prevalecen sistemas tradicionales de enseñanza y los cambios se van dando más lentamente de lo debido (Black y Atkin, 1997; Castro y otros, 2004). Más que una excepción, esta es una regla en los sistemas educativos de los países latinoamericanos. Ante esta situación, algunos países, especialmente del mundo desarrollado, han introducido innovadoras metodologías en la enseñanza, tendientes a lograr un mayor interés y una mayor asimilación de los contenidos científicos y tecnológicos de parte de los estudiantes (la trascendencia de la Matemática en estas nuevas metodologías resulta obvia) (Blythe y otros, 1999).

Como las personas deben cambiar de trabajo varias veces en su vida – contrario a lo que sucedía hasta hace poco tiempo, cuando los trabajadores y profesionales tenían empleos fijos y a largo plazo, con funciones bien precisas y determinadas, las cuales experimentaban pocos cambios a lo largo de su vida laboral – la educación hoy en día debe ser más amplia y flexible en los distintos ámbitos de la tecnología para responder a dicha variabilidad laboral. En consecuencia, la promoción de la educación científica, matemática y tecnológica es esencial para enfrentar una época histórica signada por el cambio permanente, cambio en el que la ciencia y la tecnología cumplen un papel decisivo, provocándolo directamente, conformándolo, encauzándolo o respondiendo a él (Black y Atkin, 1997; Bunge, 1984; Sagasti, 1981; Torres y Chavarría, 1990).

El trabajo del educador debe estar orientado al diseño y ejecución de *situaciones de aprendizaje significativas* (Díaz y Hernández, 1999), y la educación matemática debe orientarse a la *generación de capacidades analíticas, creativas y de razonamiento lógico*, tanto como a la concienciación de las responsabilidades que se tienen para con el medio ambiente, las comunidades y el país. Nuestra forma de enseñanza y sus contenidos tienen que experimentar drásticas reformas y lo verdaderamente importante vendrá a ser su preparación para el diálogo inteligente con las herramientas existentes actualmente o en el futuro previsible (Guzmán, 1998).

Muchas de las metodologías de aprendizaje se basan en los descubrimientos de la llamada *Escuela de Santiago*, cuyos principales representantes son Humberto Maturana y Francisco Varela. Las ideas más importantes de estos autores, y sus implicaciones para la teoría del conocimiento y los procesos cognitivos, se encuentran en su libro *El Árbol del Conocimiento* (Maturana y Varela, 2001; empero, la obra seminal del grupo es *Biología de la Cognición*, publicada en 1970 por Maturana). Las ideas de Maturana y Varela también están minuciosamente descritas y analizadas en Capra (1999, 2003). Para Maturana:
"*Los sistemas vivos son sistemas cognitivos y el proceso de vivir es un proceso de cognición. Esta afirmación es válida para los organismos, tengan o no sistema nervioso*" (citado en Capra, 1999: 114).

Puede interpretarse las ideas de Maturana en el sentido de que el fin de la vida es el conocimiento. La estructura nerviosa y cerebral humana se ha venido diseñando en función del conocimiento. *Vivir es conocer* ("*El hecho de vivir – de conservar ininterrumpidamente el acoplamiento estructural como ser vivo – es conocer en el ámbito del existir. Aforísticamente: vivir es conocer*". Maturana y Varela, 2001: 116). El conocimiento constituiría el fin de los procesos vitales. "*Este modo de identificar la cognición* – escribe Capra – *con los procesos vitales es ciertamente una concepción radicalmente nueva*" (Capra, 1999: 114). Si vivir no es independiente del conocer, resulta obvia la importancia de esta idea para los procesos del conocimiento (o de la cognición, en el lenguaje de Maturana y Varela) y de las metodologías que ayuden a construirlo, transmitirlo, asimilarlo y transformarlo. Para los procesos de enseñanza-aprendizaje las formulaciones de la *Escuela de Santiago* son de especial relieve.

Igualmente deben recuperarse las concepciones de Vigotsky de que *los individuos construyen su conocimiento a partir de sus contextos y realidades* (Hernández y Zamora, 2000) y de que la vida está "*programada*", pero los conocimientos de tal "programación" son a la vez una creación individual y colectiva. El aprendizaje y la enseñanza son procesos sociales ejecutados por individuos. Las metodologías nunca deben perder de vista el carácter *fundamentalmente social de la enseñanza y del aprendizaje*. Se aprende *en-conjunto* (es decir, *con otros que son un nos-otros*) conocimientos en los cuales han dejado huella infinidad de individuos y generaciones. El conocimiento siempre se está transformando porque sucesivas generaciones al utilizarlos para resolver sus problemas le agregan nuevos matices, significados, perspectivas y dimensiones.

Estos planteamientos reafirman la metodología introducida en el proyecto "*Creación de metodologías que permitan la integración de ciencias y matemáticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la educación diversificada costarricense*", que estuvo a cargo de los autores. La implementación de las prácticas y materiales elaborados durante la investigación (2000-2004) - aplicados a varios grupos de estudiantes, profesores y asesores de matemática, así como su divulgación en eventos académicos dentro y fuera de Costa Rica - corroboran que tales materiales y contenidos permiten crear *ambientes de aprendizajes más participativos y dinámicos*, que, al mismo tiempo, contribuyen a generar una actitud más crítica por parte de los estudiantes respecto a los contenidos vistos en clase; también exigen mayor razonamiento y facilitan la comprensión y asimilación de la materia, despertando, asimismo, mayor interés hacia el aprendizaje (Castro y otros, 2004).

Ejemplos

Los ejemplos que se presentas a continuación constituyen algunas de las formas posibles de acercarse a los temas tratados; naturalmente se les puede adecuar a las condiciones de los alumnos y de su entorno (y esto es lo recomendable).

I: Distribución de un día de nuestra vida. (Elaborado por el equipo investigador).

Esta actividad se recomienda para introducir el concepto de razón, reforzar hábitos y distribución adecuada del tiempo.

Indicaciones:

Trace una línea vertical y divídala en 24 partes iguales que representarán las 24 horas que contiene un día. Cada división representa una hora.

- Marque el número de horas que utiliza para cada una de las actividades que usted realiza.
- Utilice solo valores enteros para designar el tiempo en horas que usted invierte en las actividades diarias; así podrá describir la distribución de su tiempo durante un día cualquiera.

Puede utilizar como guía las siguientes preguntas:

¿Cuántas horas duermo diariamente? ¿Cuántas horas invierto en ver TV? ¿Cuántas horas invierto para alimentarme? (Incluya en un solo bloque la totalidad invertida en desayuno, almuerzo, cena y refrigerios) ¿Cuántas horas utilizo para ir a clases? ¿Cuántas horas empleo para trasladarme al centro de enseñanza? ¿Cuántas horas le dedico a las actividades recreativas? ¿Cuántas horas dedico a estudiar?

(Observación: Agregue cualquier otra actividad que usted realice y no esté contemplada en este texto).

Una vez que usted haya finalizado con la distribución de sus actividades en la representación de un día cualquiera, analice cuánto tiempo invierte usted en cada rutina.

Puede utilizar como guía las siguientes preguntas:

¿Qué fracción del día duerme usted? _____

¿Cuántas horas utiliza para ir a clases? ______

¿Cuánto tiempo toma para alimentarse?______

¿Cuánto tiempo gasta en traslado de la casa al colegio, escuela o universidad?______

¿Cuánto tiempo dedica a actividades recreativas? (ver TV, escuchar música, ir al cine o donde los amigos)______

¿Cuántas horas diarias utiliza para estudiar?______

¿Cuánto tiempo invierte en su aseo personal? (cepillarse los dientes, bañarse, lavarse las manos, etc.). ____

II. **Nuestro grupo sanguíneo** (Elaborado por el equipo investigador a partir de Barrantes, 1997).

Los objetivos de esta actividad son:

1. Realizar una pequeña investigación sobre la cantidad de personas que conocen los tipos sanguíneos, el Rh y el tipo de sangre que más está presente.
2. Comparar los grupos sanguíneos (tipos y Rh) de la muestra con los del total de la población en Costa Rica.

3. Contribuir a concienciar a un grupo de personas sobre la importancia de conocer estos datos.
4. Aplicar conceptos de estadística descriptiva y de razones y proporciones. (Porcentajes).

Procedimiento
Práctica A

1. Se trabajará en grupos de cuatro estudiantes. Cada estudiante seleccionará una muestra de 5 personas (amigos, parientes, profesores, administrativos). Deben incluirse cada uno de los estudiantes como parte de la muestra, por lo que cada grupo en total tendrá la información de 24 personas (cinco de cada miembro del grupo, más la información de ellos cuatro).
2. Pregunte a cada persona si conocen su grupo sanguíneo. En caso de que lo conozcan, pregúntele el tipo y el factor.
3. En caso de que la persona no conozca estos datos, háblele de la importancia de que lo conozca y sugiérale asistir a un centro médico a solicitar las pruebas para contar con esa información.

Guía de discusión.

1. Con los datos obtenidos realice una tabla de frecuencias.
2. ¿Qué porcentaje de los estudiantes no sabía su grupo sanguíneo?
3. ¿Cuántos tipos de sangre existen?
4. Investigue ¿que son antígenos y anticuerpos?
5. ¿Podría resumir la relación entre los distintos tipos de sangre?
6. ¿Por qué es tan importante conocer esta información?
7. ¿Cuántas personas tienen Rh+? ¿Qué porcentaje representa esta cantidad con respecto a la muestra?
8. ¿Cuántas personas tienen Rh–? ¿Qué porcentaje representa esta cantidad con respecto a la muestra?
9. ¿Por qué es importante conocer nuestro Rh?

Práctica B

En Costa Rica la distribución de las personas con base a su grupo sanguíneo es el siguiente:

Tipo de sangre	Porcentaje (Costa Rica)
A	31,14 %
B	13,23 %
AB	3,09%
O	52,54%

A partir de los resultados obtenidos en la parte A, complete el cuadro de la siguiente manera:

Tipo de sangre	Porcentaje (Costa Rica)	Porcentaje de la muestra

A	31,14 %	
B	13,23 %	
AB	3,09%	
O	52,54%	

Guía de discusión

1. ¿Existe mucha diferencia o similitud de los distintos tipos de sangre de la muestra con respecto al resto del país?
2. Si existen diferencias, ¿Cómo explicarlas? ¿A cuáles motivos atribuirlas?
3. Presente los resultados obtenidos a sus amigos y parientes y analicen las implicaciones.

Comentario:

Ocho de cada 30 personas son rechazadas como donantes tras un breve examen estrictamente confidencial. La anemia y la presión baja son las causas más frecuentes entre las mujeres. La presión alta y las prácticas de alto riesgo –generalmente la convivencia sexual con varias parejas- son las más frecuentes entre los hombres.

Referencias Bibliográficas

Ausubel, D.P., Novak, J.D. y Hanesian, H. (1993). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* México: Editorial Trillas.

Barrantes, U. (1997). *Biología para Décimo Año.* San José, Costa Rica: Ediciones Farben.

Black, P. y Atkin, M. (1997). *Matemática, Ciencia y Tecnología. Innovaciones Educativas*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Blythe, T. y otros (1999). *La Enseñanza para la Comprensión. Guía para el Docente*. Buenos Aires: Paidós.

Bunge, M. (1984). *Ciencia y Desarrollo*. Buenos Aires: Ediciones Siglo Veinte.

Bunge, M. (1999). [Seminario sobre filosofía de la ciencia.] Datos en bruto no publicados.

Capra, F. (1999). *La Trama de la Vida* (2ª. ed.). Barcelona: Editorial Anagrama.

Capra, F. (2003). *Las Conexiones Ocultas*. Barcelona: Editorial Anagrama.

Castro, A., Rodríguez, F., Alvarado, R. y Gätjens, O. (2004). "*Creación de metodologías que permitan la integración de ciencias y matemáticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la educación diversificada costarricense*". Informe Final Proyecto de Investigación. Santa Clara, San Carlos, Escuela de Ciencias y Letras.

Díaz, F. y Hernández, G. (1999). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. México: McGraw-Hill Interamericana Editores, S.A.

Hernández, L. y Zamora, L. (2000). *Vigotsky y el Aprendizaje Escolar*. Mimeografiado. Universidad Católica de Costa Rica, Sede San Carlos, Ciudad Quesada, Costa Rica.

Guzmán, M. (1998). *Tendencias Innovadoras en la Educación Matemática*. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura: Ed. Popular.

Maturana, H. y Varela, F. (2001). *El Árbol del Conocimiento* (10a. ed.). Santiago de Chile: Editorial Universitaria.

Pozo, J (1996). *Teorías Cognitivas del Aprendizaje* (Cuarta Edición). Madrid: Ediciones Morata.

Sagasti, F. (1981). *Ciencia, Tecnología y Desarrollo Latinoamericano*. Méjico: Fondo de Cultura Económica.

Torres, R. y Chavarría, M. (1990). Cultura, Ciencia y Técnica. En: Torres, R y Chavarría M. (Eds.), *La Revolución Científica y Tecnológica* (pp. 11 – 46). San José, Costa Rica: Cátedra de Historia de la Cultura, Escuela de Estudios Generales, Universidad de Costa Rica.

Comparación de la Enseñanza de la Geometría en los Sistemas Escolares Chileno y Francés

Corine Castela e Ismenia Guzmán
Institut Universitaire de Formation des Maîtres de Rouen et Equipe Didirem Paris 7 y
Pontifical Universidad Catolica de Valparaiso
Francia y Chile
Corine.Castela@rouen.iufm.fr, iguzmanr@vtr.net
Pensamiento Geométrico - Básico

Resumen

Este reporte trata de una investigación cooperativa cuyo tema es la comparación de la enseñanza de la geometría en Chile y en Francia (proyecto ECOS-CONYCIT). Después de definir nuestra metodología por zooms sucesivos, presentamos las mayores diferencias que encontramos entre los dos países. Estas diferencias conciernen a los ámbitos siguientes: la concepción de la geometría, los aspectos de la actividad matemática puestos en evidencia, la organización del aprendizaje, la extensión de los programas, la importancia dada a las aplicaciones de matemáticas y a la modelación. Los trabajos de C.Houdement y A.Kuzniak sobre los paradigmas geométricos nos permiten analizar las concepciones de la geometría.

Presentación de la investigación

Se trata de un proyecto[1] de cooperación franco-chileno[2] que reúne investigadores de la PUCV de Valparaíso y por el lado francés, investigadores que en la mayoría pertenecen al equipo Didirem de la Universidad Paris 7. Todos intervienen en la formación de docentes.

El tema general del estudio es la comparación de la enseñanza de las matemáticas en Chile y en Francia con la ambición de alcanzar una comparación de los sistemas de formación de docentes. Nuestra primera opción metodológica fue la siguiente: limitar el campo de investigación a la enseñanza de la geometría, un tema presente en todos los niveles de la enseñanza obligatoria en ambos países, es un ámbito fundamental tanto para el desarrollo de las matemáticas, como para el empleo de las matemáticas en la vida cotidiana y en otras ciencias. Planteamos la hipótesis que las opciones elegidas para la enseñanza de la geometría son representativas de la concepción de las matemáticas y también de la concepción del aprendizaje y de la enseñanza de esta disciplina, vigentes en cada país.

Metodología

Procedimos por zooms sucesivos, centrándonos sobre preguntas cada vez más concisas:

- Primer nivel de estudio de los textos oficiales: *comparación de los contenidos mínimos obligatorios para la totalidad de la escolaridad básica y media.*

---

[1] Nuestro trabajo empezó en Febrero de 2003; presentamos la primera parte de la investigación.
[2] Cf. el anexo al fin de la parte II de este reporte para unas noticias sobre los dos sistemas escolares.

Nos interesamos primero en los conceptos y teoremas enseñados, es decir en el Saber Matemático, luego en los procedimientos de trazado con instrumentos, en los elementos relativos al razonamiento matemático y al final en los saberes culturales e históricos.

- Segundo nivel de estudio de los textos oficiales: *análisis de la concepción de la geometría según los niveles escolares e investigación sobre las funciones atribuidas a la enseñanza de la geometría.*

¿Por qué enseñar geometría? Un estudio muy detallado de los textos franceses permitió identificar varias funciones que se pueden atribuir a la enseñanza de la geometría y que buscamos pues en los textos del Ministerio de Educación Chileno.

- Tercer nivel : *Estudio de los manuales escolares centrado sobre los capítulos que tratan de los triángulos semejantes y conocimientos vinculados* (dibujo a escala, teorema de Tales, homotecia…).

Examinando un manual chileno de 2Medio (A10[3]), nos dimos cuenta que el capítulo sobre los triángulos semejantes trata estos conocimientos de una manera muy diferente de la que encontramos en Francia. Un análisis más preciso de las opciones chilenas nos permitió determinar varios ejes de estudio de los manuales franceses. Por ejemplo: ¿Se puede emplear un dibujo para obtener dados utilizables en una demostración? ¿En qué organización matemática se encuentra en Francia la representación a escala? ¿Cómo se tratan los problemas de determinación de medidas inaccesibles?

Estas preguntas dieron origen a un estudio de los manuales franceses más empleados en todos los niveles de colegio y de liceo. Este estudio confirma los resultados recogidos en los dos niveles más globales de nuestro trabajo. Estos resultados los presentamos de una manera muy sintética a continuación.

- Cuarto nivel : *Estudio de la relación con la geometría de estudiantes futuros docentes, en Chile y en Francia, considerando esta relación como un indicador de los efectos del sistema de enseñanza.*

Desarrollamos este aspecto en la parte II de nuestro reporte.

Interpretación sintética de las informaciones recogidas a través del estudio de los textos oficiales y de los manuales.

Las intenciones generales expresadas en la introducción de los programas en Chile y en Francia son muy cercanas; ellas recomiendan:

- Desarrollar todos los aspectos de la actividad matemática: observar, experimentar, comparar, sistematizar y fundamentar conclusiones.
- Proporcionar diversos problemas, tanto desafíos de la matemática misma como situaciones de modelación y aplicación en varios ámbitos.
- Apoyar el aprendizaje sobre la resolución de problemas que permite la construcción del sentido de los conceptos.

[3] A1 representa el primer año de escolaridad, A5 el quinto, A10 el decimo etc.

Nuestro estudio muestra que hay diferencias importantes en la realización de estas declaraciones de principios; estas diferencias a continuación.

Diferencia en cuanto a la concepción de la geometría

El marco teórico de nuestro análisis se refiere a los trabajos de Catherine Houdement y Alain Kuzniak acerca de la geometría. Estos investigadores, que son miembros del equipo, distinguen tres paradigmas: la geometría natural, la geometría axiomática natural, la geometría axiomática formal:

- **La geometría natural (Geometría I)**

  Los *objetos* de esta geometría son objetos materiales, dibujos trazados con instrumentos para el plano y sólidos para el espacio; estos no son todos los objetos del mundo físico: por ejemplo, un balón de fútbol no es un objeto de la geometría I, sino se puede modelar por diferentes sólidos, por ejemplo, una esfera o uno poliedro.

  Las actividades importantes en este paradigma son la observación, la manipulación y la experimentación apoyadas en instrumentos, también el dibujar con instrumentos y el armar cuerpos geométricos (maquetas). La *validación* de las proposiciones se funda sobre una interacción entre experimentación, verificación con instrumentos (se puede medir) y razonamientos no necesariamente formales.

  Podemos referir este paradigma a la geometría de los matemáticos Arquimides o Clairaut.

- **La geometría axiomática natural (Geometría II)**

  En este caso, los *objetos* son abstracciones que modelan los objetos materiales de la geometría I en el mundo de las ideas. Estos objetos los llamamos figuras, las que distinguimos de los dibujos y sólidos: las figuras son clases determinadas por un conjunto de propiedades a partir de objetos básicos, puntos, rectas, segmentos etc. que son también abstracciones (por ejemplo, un punto de la geometría II no tiene ninguna dimensión).

  En este paradigma, dibujos y sólidos son representaciones materiales de objetos abstractos, ellos constituyen un campo de trabajo, de exploración, fuente de conjeturas e intuiciones pero este campo no permite validación. Sólo las demostraciones pueden fundamentar conclusiones a partir de hipótesis y de teoremas ya conocidos. Por esta razón, establecer propiedades características y formular definiciones minimales es esencial en esta geometría. Ellas pueden llegar a constituir axiomáticas locales. Cabe señalar que este no es el caso de la geometría I.

  Podemos referir este paradigma a la geometría de Euclides.

- **La geometría axiomática formal (Geometría III)**

  Se trata de una geometría cuya axiomática se libera de todo proyecto de modelación del mundo material. No presentaremos más allá este paradigma porque no se encuentra en la enseñanza básica ni media de ambos países. Podemos referirlo a la geometría de Lobatchevski y Riemann.

Chile y Francia se distinguen claramente por su manera de ubicar la enseñanza de la geometría respecto a los paradigmas I y II.

En Francia, la geometría de la escuela (A1-A5) se sitúa en GI. A partir del segundo año del colegio (A7), es cierto que la geometría del plano esta en GII con los primeros aprendizajes de la demostración; el caso del primer año del colegio no es tan claro, mostramos que, desde este nivel, medir y tomar informaciones de los dibujos es muy raro en la clase de matemática.

Los textos oficiales no proponen ninguna reflexión pedagógica para los docentes acerca de las diferencias entre los paradigmas. En estas condiciones, hay poco o nada de esfuerzo para legitimar este enorme cambio entre la escuela y el colegio, en consideración de los alumnos.

En Chile, GI se encuentra por lo menos hasta el 2Medio (A10), dando una gran importancia al dibujo con instrumentos así como a manipular y armar sólidos geométricos. Incursiones en GII empiezan en 8 Básico (A8) y se desarrollan luego en la enseñanza media que introduce el aprendizaje de la demostración. Nos parece que los dos paradigmas viven simultáneamente en una relación pragmática que encontramos en el extracto siguiente del programa de 8 Básico: *« Es importante destacar que cuando el razonamiento permite establecer claramente la relación entre ángulos no es necesario medir »*. Se pueden plantear problemas dentro de la geometría I. Si hay herramientas de la geometría II que son eficaces para resolver estos problemas con demostraciones, entonces ellas son elegidas. Si no, se puede recurrir a las herramientas de la geometría I, como la medida. Esto es exactamente lo que hacen los manuales de 2Medio (A10) para la determinación de medidas inaccesibles (cf nuestro taller).

En resumen, podemos decir que la enseñanza francesa desarrolla muy temprano una concepción axiomática de la geometría mientras que la enseñanza chilena instala progresivamente une geometría mixta que utiliza los recursos de ambos paradigmas.

Diferencia en cuanto a los aspectos de la actividad matemática puestos en evidencia / diferencia en cuanto a la organización del aprendizaje

El aprendizaje de la demostración es una dimensión fundamental de la formación matemática que busca la enseñanza francesa a partir del colegio. Esta es una característica bien conocida. A la inversa de los textos chilenos, los textos que acompañan los programas franceses no intentan ilustrar otros aspectos de la actividad matemática con ejemplos de situaciones. En este contexto, las instrucciones consideran claramente la geometría como el lugar principal del aprendizaje de la demostración. Cabe señalar que la mayoría de los trabajos propuestos a los alumnos esperan que empleen los conceptos y teoremas del programa como herramientas para demostrar propiedades ya enunciadas por el texto del problema.

En cuanto a Chile, dentro del marco de la geometría I y luego de la geometría mixta mencionada anteriormente, las instrucciones proponen una práctica mucho más equilibrada de la actividad matemática. Esto se muestra en los contenidos exigidos y todavía más en las actividades de aprendizaje sugeridas por los textos del Mineduc con tareas como observar, describir, establecer relaciones, registrar ordenadamente sus observaciones, fundamentar (lo que en GI no toma la estructura de una demostración). Como vemos en los ejemplos siguientes, se espera también que los alumnos tomen parte en establecer unos resultados del programa:

Experimentación de diversos procedimientos (gráficos y concretos) para medir el perímetro y el área de circunferencias (A8)

Demostrar el teorema relativo a la potencia de un punto si este esta en el interior de una circunferencia. Lo *aplican* en la resolución de problemas. (A10)

En resumen, en colegio y liceo, el sistema francés insiste en el aspecto demostración de la actividad matemática y en la utilización de los conocimientos enseñados a través de problemas más o menos cerrados. El sistema chileno, a nivel de los textos oficiales, relativiza el aspecto demostración y desarrolla las dimensiones exploratorias de la resolución de problemas.

En las condiciones chilenas, incluso los conceptos y los teoremas enseñados pueden ser objetos de secuencias de trabajo que solicitan la actividad de los alumnos. En Francia, a pesar de las tentativas inspiradas por los trabajos de didáctica, parece que para los colegios y todavía más para los liceos, la enseñanza francesa de la geometría sigue funcionando como si bastare introducir un objeto por su definición, un teorema por su enunciado para crear las condiciones de su empleo. Entonces, lo que aparece como una diferencia en la concepción de la actividad matemática produce de hecho **una diferencia en la organización del aprendizaje.**

Podemos suponer que los docentes franceses de matemáticas, formados en primer lugar como matemáticos, tienden a identificar exposición del saber y aprendizaje y entonces que cambiar esto necesita un esfuerzo de formación más importante de lo que existe. Pero vamos a ver a continuación que el ritmo elegido por los programas franceses tampoco crean las condiciones temporales que necesita una enseñanza diferente.

¿Que pasa en Chile? La opción elegida por las instrucciones vigentes parece tomar en cuenta el proceso de construcción de los conocimientos. ¿En qué medida los docentes desarrollan estas orientaciones en sus cursos, en las condiciones materiales de las aulas chilenas? A esta pregunta, nuestro estudio no nos permite todavía contestar.

Diferencia en cuanto a la extensión de los programas

El estudio de los programas en términos de contenidos enseñados muestra que el conjunto de los conceptos y teoremas de geometría presentes en los programas chilenos de la Básica y Media equivale prácticamente al programa de la escolaridad obligatoria en Francia, que se termina a la edad de 16 años y va hasta el nivel de *Seconde* (A10). **Si consideramos los objetos del Saber Sabio, el tiempo didáctico transcurre mucho más deprisa en Francia que en Chile.** Se puede comprender que, en estas condiciones, el tiempo concedido al aprendizaje de cada noción y el tiempo concedido a la práctica matemática de los alumnos, sean reducidos en Francia respecto a las posibilidades disponibles con el ritmo chileno.

Por otro lado, encontramos que, en la lista de los contenidos exigidos, los procedimientos de dibujo geométrico son más numerosos en Chile que en Francia, eso es coherente con la importancia dada a la geometría I. Por último, elementos precisos relativos a la historia de las matemáticas y a su relación con artes se encuentran en el programa chileno de Media; en Francia, estos aspectos culturales aparecen sólo en las partes optativas de los programas o para los alumnos de *Première* y *Terminale* (A11-12) especializados en literatura o en artes.

El análisis de los contenidos enseñados en los dos últimos años del liceo francés en la especialización científica muestra la orientación universitaria de esta enseñanza. Los alumnos encuentran ejemplos de objetos que la enseñanza universitaria de matemáticas presenta en una forma general (por ejemplo, primer encuentro con espacio vectorial, con un producto escalar, con un espacio afín euclidiano y sus transformaciones, con un grupo no conmutativo. Además, los textos atribuyen explícitamente a la geometría funciones de ayuda a la comprensión y al desarrollo de los otros ámbitos matemáticos (comprensión de los sistemas lineales, desarrollo del análisis).

Es claro que las exigencias de la universidad dirigen los programas de la especialización científica; estos deben responsabilizarse de los conocimientos que los matemáticos de la universidad consideran como mínimo necesario.

Esta orientación hacia la universidad tiene como resultado reducir el tiempo atribuido a la enseñanza de lo que ambos países consideran como la cultura geométrica indispensable para cada persona. Se puede suponer que esta aceleración del ritmo didáctico en Francia contribuye a las diferencias señaladas anteriormente, a nivel de colegio y de liceo: elección de la estrategia de enseñanza más económica en tiempo, centración sobre las matemáticas en detrimento de dimensiones culturales e históricas, en detrimento también de las aplicaciones de las matemáticas, centración sobre el aspecto considerado como esencial en la práctica matemática, es decir, la demostración.

Diferencia en cuanto a la importancia dada a las aplicaciones de matemáticas y a la modelación

Por falta de espacio, no desarrollamos aquí este aspecto de nuestro trabajo. Diremos sólo que el estudio de las instrucciones y el análisis detallado de los manuales franceses, a cerca de las tareas de determinación de medidas inaccesibles muestran que, en Francia, las matemáticas escolares no se interesen en serio a la resolución de problemas concretos ni en la modelación. En las instrucciones y manuales chilenos, encontramos un esfuerzo para hacer devolución a los alumnos de situaciones realistas.

Conclusión

Para concluir, nos referiremos a los niveles de especificación didáctica de Yves Chevallard.
El cuadro siguiente, con los aspectos caricaturales inherentes a toda esquematización, resume las diferencias puestas de manifiesto, interpretándolas como huellas, a nivel de la geometría y de las organizaciones matemáticas más locales, de opciones que competen a los niveles superiores de la clasificación de Chevallard:

- Nivel 1= La Disciplina, cuya influencia se percibe en los puntos 1, 2, 3 del cuadro que conciernen a la concepción de las matemáticas.
- Nivel –1 = La Escuela, en los puntos 3, 4 que refieren a las finalidades de la enseñanza de las matemáticas.
- Nivel 0 = La Pedagogía, que influencia la concepción del aprendizaje (5).

	Chile	**Francia**
1	Matemáticas mixtas	Matemáticas axiomáticas
2	Desarrollo de todos los aspectos de la práctica matemática, exploración y experimentación	Insistencia sobre la demostración.
3	Matemáticas vistas en sus relaciones al mundo y a la cultura	Matemáticas por si mismas
4	Enseñanza obligatoria dirigiendo sus esfuerzos a transmitir una cultura matemática común	Enseñanza secundaria de las matemáticas, incluso Enseñanza obligatoria, dirigido por la Enseñanza superior
5	Construcción y utilización de los conocimientos	Transmisión formal y utilización del saber matemático

Concluiremos insistiendo sobre el inmenso interés que encontramos en este trabajo de comparación: en ambos países, nos abrió los ojos sobre aspectos de nuestro propio sistema de enseñanza que no veíamos, lo que nos permite hacer varias nuevas preguntas de investigación.

Referencias Bibliográficas

Bosch, M., Espinoza, L. y Gascon, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio: análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherche en didactiques des mathématiques 23*(1), 79-136.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 1. Structures et Fonctions. En J-L. Dorier & Al. (Eds.), *Actes de la 11ième Ecole d'été de didactique des mathématiques -Corps- 21-30 Août 2001*. (pp. 2 - 22). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 3. Ecologie et régulation. En J-L.Dorier & Al. (Eds.), *Actes de la 11ième Ecole d'été de didactique des mathématiques -Corps- 21-30 Août 2001* (pp. 41 – 56). Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics 40,* 283-312.

Houdement, C.y Kuzniak, A. (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherche en didactiques des mathématiques 20*(1), 89-116.

Kuzniak, A. y Rauscher, J. C. (2003). Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d´école, in *Actes du XXIX ème colloque de COPIRELEM*. France: IREM des Pays de la Loire.

Relación de Futuros Profesores de Matemáticas con la Geometría y sus Tareas

Corine Castela e Ismenia Guzmán
Institut Universitaire de Formation des Maîtres de Rouen et Equipe Didirem Paris 7 y
Pontifical Universidad Catolica de Valparaiso
Francia y Chile
Corine.Castela@rouen.iufm.fr, iguzmanr@vtr.net
Pensamiento Geométrico - Básico

Resumen

En el Proyecto ECOS entre Chile y Francia, otra vía explorada ha sido el estudio de la relación de los futuros profesores con la geometría y sus tareas, es decir cómo la caracterizan ellos dentro de la matemática y como enfocan sus tareas. El equipo chileno ha encuestado a estudiantes universitarios de las carreras de Pedagogía de los diferentes niveles: Pedagogía Básica General, Pedagogía Básica con mención en Matemáticas y Pedagogía en Matemática de Enseñanza Media. El equipo francés ha encuestado a estudiantes universitarios de IUFM futuros profesores de matemáticas de Colegio y Liceo.

Para la encuesta hemos tomado algunas preguntas de la investigación de Kuzniak y Rauscher de 2003, sobre formación en Geometría para profesores de escuela, y las hemos organizado con dos objetivos, uno sobre la caracterización de la geometría y el otro sobre las tareas exigidas. Sobre la caracterización de la geometría**,** nos planteamos la interrogante ¿cómo caracterizan estos estudiantes la Geometría? He aquí las preguntas que les planteamos:

1. Dar tres adjetivos y tres verbos que caractericen según usted la geometría
2. Entre los adjetivos escoja el que para usted. es más importante. Explique. Y entre los verbos escoja aquél más importante para Ud. Explique.

Estas preguntas las contestaron 73 estudiantes chilenos de los tres niveles mencionados, y 25 estudiantes franceses de nivel de colegio y liceo. Las respuestas dieron una gran dispersión sobre la concepción de la geometría en los dos países.

Debido a esta dispersión, pensamos en definir categorías y trabajando paralelamente, ellas resultaron diferentes. El equipo chileno las ha realizado desde el punto del vista semántico, es decir del significado de las palabras en el lenguaje natural. El equipo francés lo hizo desde el punto de vista de la demanda del contenido. Se definieron 4 categorías en Chile y 5 en Francia a saber:

Categorías chilenas

A.- **Adjetivos Objetivos**

Código 1: **Caracterización de la geometría como ciencia** : abstracta, axiomática, compleja, certera, conceptual, exacta, precisa, objetiva, correcta, perfecta

Código 2: **Respecto a la realidad** : aplicable, práctica, útil, utilizable, tangible, concreta, experimental, medible, palpable, eficaz, Código 3: **Respecto a la representación :** Figurativa, diagramable, gráfica, visible,

B.- **Adjetivos Subjetivos**

Código 4: **Positivo** : accesible, bella, hermosa, interesante, armoniosa, entretenida, fácil, linda, entendible, clara, perfecta, maravillosa,

Código 5: **Negativo** : complicada difícil, enredada,

C.- Adjetivos Educativos

Código 6: **Respecto a los atributos educativos:** activa, creativa, desafiante, dinámica didáctica, educativa, integradora, motivadora, reflexiva, imaginativa, lúdica, facilitadora,

D.- Otros

Código 7: **Otros**: infinita, invariable, misteriosa, necesaria, versátil, confiable, especial, euclidiana, hábil, compatible

Código 8: **Respuesta omitida**

Categorías Francesas

A. Visión del espacio de trabajo

Código 1: Respecto **a juego**: atrayente, lúdico, sorprendente

Código 2: **Respecto a lo estético:** hermoso, estético

Código 3: **Respecto al acceso:** arduo, difícil

B. Categorización de las matemáticas

Código 1: **Interna**: abstracta. Clara, concreta, eficiente

Código 2: **Externa**: útil

Código 3: **Otro**: antigua, rica, vasta

C. Aspectos Intelectuales

Deductiva, Intuitiva, Observable, Engañosa, Visual

D. Mundo Cerrado

Alineada, Cocíclica, Constructible, Coplanaria, Equidistante, Paralela, Perpendicular, plana, secantes, espacial

E. Cualidad del trabajo

Meticulosa, Precisa, Rigurosa, Cuidadosa

Según estas categorías se pueden apreciar diferencias, por ejemplo obtuvimos para la geometría las siguientes categorías de adjetivos:

Geometría	Chile	Francia
Como Ciencia	24	5
Relación con la realidad	15	4
Actitud Positiva	11	2
Actitud negativa	4	2
Aspecto educativo	13	0

Constatamos que la Geometría es considerada como ciencia: abstracta, axiomática, compleja, certera, conceptual, exacta, precisa, objetiva, correcta, perfecta, por un tercio de los estudiantes chilenos encuestados y por la quinta parte de los estudiantes franceses. Una actitud positiva hacia ella, la señala sobre la sexta parte de los estudiantes chilenos y ligeramente sobre la décima parte de los estudiantes franceses. El aspecto educativo es mencionado por más de la sexta parte de los estudiantes chilenos y por ninguno de los franceses.

Para los verbos estamos haciendo el mismo estudio por el momento estamos tratando de encontrar categorías, en Chile hemos considerando las acciones que indican los verbos y se han definido las siguientes 8 categorías. Verbos de:

A. Acciones concretas: calcular, construir, dibujar, manipular, medir, trazar, resolver, formar, tocar, contar,
B. Leer lo concreto: observar, ver, visualizar,
C. Organizar información: clasificar, ordenar, organizar, proyectar, tabular, precisar
D. Manejo de información: aplicar, descubrir, interpretar, relacionar, comparar, vincular, inducir, planificar,
E. Validar: argumentar, corroborar, demostrar, experimentar, explicar, verificar, comprobar, deducir,
F. Actividades intelectuales: concretizar, imaginar, pensar, razonar, reflexionar, comprender, elaborar, crear, analizar, contextualizar, crear,
G. Acciones educativas: enseñar, trabajar, estudiar, entretener,
H. Otras: encontrar, estar, principiar, rotar, ser, trasladar, preguntar, jugar, afirmar, mover, ayudar, hacer, haber

Los verbos que eligieron como importantes los estudiantes se agruparon en las categorías siguientes:

Verbos de	Chile	Francia
Acciones concretas	28	7
Lecturas	4	1
Manejar información	6	13
Actividad intelectual	21	0

Los verbos dejan ver imágenes muy diferentes de la concepción de la geometría en los dos países, sobre la tercera parte estudiantes chilenos la describen según acciones concretas como**:** calcular, construir, dibujar, manipular, medir, trazar, resolver, formar, tocar, contar. Y sobre la quinta parte solamente de los estudiantes franceses señalan este tipo de acciones.

En manejo de la información casi la mitad de los estudiantes franceses encuestados describen la geometría a través de estas acciones: aplicar, descubrir, interpretar, relacionar, comparar, vincular, inducir, planificar. Y solamente un doceavo de los estudiantes chilenos señalaron estas acciones.

Con respecto a las actividades intelectuales: concretizar, imaginar, pensar, razonar, reflexionar, comprender, elaborar, crear, analizar, contextualizar, crear ; los estudiantes franceses no las mencionan, en cambio poco menos de un tercio de los estudiantes chilenos se refieren a ellas.

Conclusiones

Podemos constatar que los estudiantes al elegir los adjetivos importantes, la geometría aparece caracterizada como ciencia interna a las matemáticas y a sus aplicaciones y en relación a la realidad aparece como trabajo, estético, positivo y como un trabajo de difícil acceso. Se señalan además atributos educativos y otros en relación con estrategias intelectuales. Cf. el cuadro que integra las categorías de los dos países. Cuadro 2 en Anexo.

Respecto a los verbos considerados importantes, ellos dejan en evidencia grandes diferencias en relación a las tareas de la geometría en los dos países, para los estudiantes franceses el manejo de la información es muy importante en cambio para los chilenos las acciones concretas y los aspectos intelectuales son importantes. Estos resultados reflejan alguna relación con el análisis realizado sobre la concepción de la geometría en los programas y en la organización de la enseñanza.

Este trabajo continuará con el estudio de las categorías francesas de verbos países con el fin de tener una integración que permita análisis más rigurosos.

Referencias Bibliográficas

Bosch, M., Espinoza, L. y Gascon, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio: análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherche en didactiques des mathématiques 23*(1), 79-136.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 1. Structures et Fonctions. En J-L. Dorier & Al. (Eds.), *Actes de la 11ième Ecole d'été de didactique des mathématiques -Corps- 21-30 Août 2001*. (pp. 2 - 22). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 3. Ecologie et régulation. En J-L.Dorier & Al. (Eds.), *Actes de la 11ième Ecole d'été de didactique des mathématiques -Corps- 21-30 Août 2001* (pp. 41 – 56). Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics 40,* 283-312.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherche en didactiques des mathématiques 20*(1), 89-116.

Kuzniak, A. y Rauscher, J. C. (2003). Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d´école, in *Actes du XXIX ème colloque de COPIRELEM*. France: IREM des Pays de la Loire.

Las Funciones de la Demostración en el Aula de Matemática

Cecilia R. Crespo y Christiane C. Ponteville
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V.González" y Universidad de Buenos Aires
Argentina
ccrespo@sinectis.com.ar, chponteville@velocom.com.ar
Pensamiento Lógico – Nivel Medio

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación que pretende analizar la concepción que tienen los docentes de la noción de demostración dentro de la matemática y la influencia en sus prácticas. En él se plantea la necesidad de diferenciar diversas funciones para la demostración en matemática analizando su presencia en las concepciones de docentes y estudiantes del profesorado de matemática. El papel y la función de la demostración en el aula, o ha sido totalmente ignorada o bien se presta como medio de certeza, y en menor medida de explicación. Estas funciones más priorizadas se pueden vislumbrar a través de las respuestas obtenidas.

Antecedentes

Este trabajo forma parte de una investigación (Crespo Crespo, Ponteville 2001, 2003a, 2003b, Crespo Crespo 2003) cuyo objetivo global es analizar las concepciones de los docentes acerca de las ideas matemáticas y su influencia en la práctica docente.

Se apoya en diversas investigaciones de la matemática educativa que señalan que el docente de matemática enseña esta disciplina de acuerdo con sus ideas acerca de la matemática (Ibañes, Ortega 1997). Estas investigaciones señalan que si un profesor piensa que el carácter deductivo de la matemática es su esencia, en sus clases pondrá un gran peso en las demostraciones. Si, por el contrario piensa que la matemática es un conjunto de fórmulas y algoritmos aplicables a diversas situaciones, entonces el alumno ejercitará para adquirir fluidez en su uso.

En la primera etapa de esta investigación, se indagaron las concepciones de los docentes y estudiantes del último año de la carrera de profesorado de matemática acerca de la matemática, su enseñanza y algunos conceptos claves en la manera de abordar la tarea docente. En la etapa en la que nos encontramos, hemos centrado la investigación en el concepto de demostración, su presentación en el aula como problema y un estudio histórico-epistemológico con la finalidad de conocer la evolución del concepto de demostración y sus implicaciones cognitivas, así como los obstáculos que se presentan a los alumnos para lograr un aprendizaje significativo de este contenido.

Las investigaciones que se realizaron hasta el momento, permitieron concluir que la enseñanza de la demostración como contenido matemático no es siempre una problemática asumida por los docentes en forma sistemática, sino en algunos casos de manera intuitiva, tomando como modelo aquel en el que han sido formados. Los docentes diferencian la idea de hacer demostraciones y la de enseñar a demostrar, siendo esto último algo que pocos llevan a cabo en el aula. La falta de presencia explícita dentro de los planes de estudio de las carreras de profesorado de matemática y dentro de las planificaciones de la enseñanza en los distintos niveles de las demostraciones como contenido, hace necesaria la reflexión y abre una brecha muy importante dentro de la investigación en matemática educativa, pues muestra que la demostración, concepto central de la matemática como ciencia, no lo es en la práctica dentro de su enseñanza. A partir de lo que puede observarse en esta investigación, surge la idea de que el concepto de demostración y su enseñanza deben ser tenidos en cuenta como problemática de suma importancia en la formación docente. De esta forma, la demostración como concepto, central en la matemática como ciencia y cuyo valor formativo no es dudado por docentes y futuros docentes, no sea dejada de lado en la enseñanza en los distintos niveles.

Diferentes conceptos vinculados con la demostración

La palabra demostración es utilizada en distintos contextos con diversos sentidos y se la relaciona también con algunos términos que para algunos autores son sinónimos y para otros poseen diferencias fundamentales entre sí. La demostración no es un concepto que pueda ser enseñado ni transmitido del mismo modo en un aula de clase que en un ambiente científico. En la práctica de la enseñanza de la matemática se utilizan equivalentemente los términos explicación, argumentación, prueba y demostración. Aceptarlos como sinónimos constituye un obstáculo epistemológico para el análisis conceptual que estamos realizando, pues esto conduce a fusionar distintos niveles de actividad de los alumnos, impidiendo entender la conceptualización de sus ideas.

Al abordar el concepto de demostración, es de gran utilidad conocer la significación que le otorga Balacheff. Este autor (Balacheff, 1982) utiliza el término *explicación* como idea primitiva de la cual derivan las de prueba y demostración, pretende hacer inteligible la verdad de una proposición ya conocida. No se reduce a una cadena deductiva, sino que se organiza y construye a partir del lenguaje coloquial. Una *prueba* se compone, por su parte, de explicaciones aceptadas por una comunidad dada en un momento dado, lo que hace que pueda evolucionar en el tiempo o ser aceptada por una comunidad determinada y no por otra. Para que una explicación sea una prueba debe ser reconocida por alguien como razón suficiente en el correspondiente marco discursivo.

Duval distingue entre explicación y argumentación. En la *argumentación* se trata de mostrar el carácter de verdad de una proposición, mientras que en la *explicación* los enunciados tienen una intención descriptiva de un fenómeno, resultado o comportamiento (Duval, 1999).

Tanto Balacheff como Duval utilizan el término *demostración* con significados similares, como una secuencia de enunciados organizados según reglas determinadas. El concepto de demostración también está muy ligado al de verdad. Para Duval el objeto de una demostración es la verdad y, por tanto, obedece a criterios de validez, mientras que la argumentación se propone lograr la convicción del otro o de sí mismo, obedeciendo a criterios de pertinencia. Las demostraciones son pruebas que se han codificado, pero algunos pasos pueden no estar explicitados.

Otros autores (Godino, Recio, 2001) consideran que la idea de explicación de Balacheff puede asimilarse a la noción de *argumentación* de Duval. Utilizan el término *demostración* para referirse de modo genérico al objeto emergente del sistema de *prácticas argumentativas* (o argumentaciones) aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones de validación y decisión, o sea situaciones que requieren justificar o validar el carácter de verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de una acción.

En matemática, desde el punto de vista formalista, una demostración en una teoría es una secuencia de proposiciones, cada una de las cuales o bien es un axioma, o bien una proposición que ha sido derivada de los axiomas iniciales por las reglas de inferencia de la teoría. Desde esta óptica, un teorema es una proposición así derivada por una demostración. Esta concepción de las demostraciones, se basa en aspectos sintácticos, haciendo hincapié en la aplicación de reglas de inferencia precisas y a veces sin hacer uso de la intuición. Desde esta perspectiva, la verdad se reduce a la coherencia dentro de un sistema axiomático.

Las demostraciones ocupan una posición central en la actividad matemática, ya que constituyen el método de prueba de las afirmaciones de esta ciencia, en contraposición, por ejemplo de lo que ocurre en la física o en otras ciencias experimentales o sociales, en las que el método de verificación de las afirmaciones consiste en su contrastación con la realidad.

Las funciones de la demostración

La demostración matemática es básicamente un proceso validativo que siguen los matemáticos para justificar las propiedades de sus teorías. Aunque existen otras opciones, el modelo actual dominante de demostración, dentro de la institución matemática, es la demostración lógico-formal.

Sin embargo, esta no es la única, ni la más importante de las funciones de la demostración en matemática. Algunos autores (de Villiers, 1993), presentan un modelo en el que se evidencian las siguientes funciones:

- *Verificación o convicción*: establece la verdad de una afirmación. Se piensa a las demostraciones como autoridad absoluta para establecer validez de conjeturas y se considera detrás de teoremas la presencia de una secuencia de transformaciones lógicas. Normalmente se busca la demostración después de haber tenido la convicción de validez.
- *Explicación*: exhibe los por qué de la verdad. En resultados evidentes o apoyados en evidencia cuasiempírica, la demostración explica causas.
- *Sistematización*: organiza diversos resultados en un sistema que incluye axiomas, conceptos básicos y teoremas. Esta función ayuda a identificar inconsistencias y razonamientos circulares. Simplifica teorías integrando conceptos y proporcionando una visión global de la estructura subyacente.
- *Descubrimiento o creación*: permite llegar a nuevos resultados. Esta función se apoya en la idea de que no todas las propiedades se descubren por intuición sino que algunas pueden ser el producto de la demostración misma.
- *Comunicación*: transmite el conocimiento matemático. En este punto se considera a las demostraciones como forma de discurso, de intercambio basado en significados compartidos.

Este modelo busca exponer algunas de las funciones de la demostración dentro de la actividad matemática científica pues permite vislumbrar las posibilidades de modificar algunas prácticas vinculadas con la demostración en el aula evitando caer en la función formalista de verificación que se reconoce generalmente en la enseñanza de la matemática en las aulas.

Resultados de la investigación

En el análisis cualitativo realizado a partir de encuestas y entrevistas a 12 docentes de nivel medio y 40 estudiantes del último año de la carrera de profesorado de matemática, surge que para ellos no existen distintos niveles de demostraciones ni de argumentaciones. Por otra parte, se evidencia una concepción de la matemática como única e intemporal, si bien se reconocen distintas maneras de realizar demostraciones para una propiedad dada. Esto se pone de manifiesto pues en ninguno de los casos aparece explícitamente la aceptación de una comunidad para aceptar una demostración, no existiendo ningún reconocimiento de la matemática como una construcción social.

La idea de demostración va unida a la presentación de teoremas en clase y se evidencian algunas de las funciones de la demostración. Por ejemplo, surge la idea de la importancia de las demostraciones en el aula para justificar la validez o convicción de los teoremas:

> *"Las demostraciones son importantes para que los alumnos sepan que las propiedades o teoremas se cumplen no porque el profesor lo dice, sino porque tienen una validez más rigurosa, que se obtiene con la demostración: Además pienso que los alumnos quedan "maravillados" al ver que las cosas no son porque sí".*
> *"Es importante demostrar en la clase de matemática porque es lo que diferencia a la matemática de otras ciencia y le da validez. Por la forma de trabajo que ella implica, ordenada y justificando cada paso a seguir, fomenta una forma de pensar y de realizar la tarea".*

Paralelamente, también surge la idea de la demostración como un modo de explicar los conceptos matemáticos:

> *"La demostración ayuda a los alumnos a la comprensión de los temas y a su vez sirve como repaso de ideas ya vistas en clase. De esta manera se ve que los conceptos matemáticos no son cosas inventadas, sino cosas comprobables".*
> *"Es importante demostrar, a veces sí y a veces no. Si la demostración aclara y ayuda a entender, vale hacerla, pero si dificulta la enseñanza y el aprendizaje, no".*

En algunas respuestas se evidencian ambas maneras de ver las demostraciones: como proceso de validación y de explicación:

> *"Es importante demostrar, ya que muchas veces los alumnos se preguntan de dónde salen las fórmulas o por qué se deben hacer de tal manera los ejercicios".*

Todos los encuestados reconocen la importancia de la demostración tanto en la matemática como en el aula, si bien algunos no manifiestan explícitamente las razones de dicha importancia. Un grupo numeroso apoya su argumentación sobre la importancia de la demostración en argumentos de tipo actitudinal o procedimental:

"Es importante demostrar en el aula porque crea un hábito".
"Ayuda a trabajar en forma ordenada y responsable".

En algunos casos los docentes entrevistados identifican que en el aula los alumnos no asumen la necesidad de demostrar, sino que creen que es suficiente el estudio de algunos casos particulares. En las entrevistas surge la conciencia en la mayoría de los docentes en ejercicio de crear en los estudiantes noción de la necesidad e importancia de las demostraciones para que comprendan la esencia de las demostraciones como procedimientos que otorgan validez a los resultados en la matemática.

A través de estas argumentaciones es posible reconocer dentro de las preguntas que se referían a la importancia de la demostración en matemática y la demostración en el aula de matemática la presencia de algunas de las diferentes funciones atribuidas a la demostración por de Villiers. Algunos de los encuestados reconocen varias de las funciones, otros, ninguna.

Las respuestas obtenidas, pueden ser organizadas de la siguiente manera:

	Función reconocida a la demostración en la matemática		Función reconocida a la demostración en el aula de matemática	
	Estudiantes	Docentes	Estudiantes	Docentes
Verificación	42,5 %	33,33 %	10 %	33,33 %
Explicación	35 %	33,33 %	47,5 %	66,66 %
Sistematización	7,5 %	0 %	10 %	0 %
Descubrimiento	2,5 %	16,66 %	2,5 %	0 %
Comunicación	0 %	0 %	0 %	0 %

Una conclusión interesante que puede extraerse del cuadro anterior es que la función de verificación de las demostraciones es reconocida sobre todo en la matemática, mientras que en el aula la función que se reconoce como predominante es la de explicación.

Comentarios finales

Según los resultados obtenidos en la investigación que estamos realizando, se observa que la demostración en el aula, o ha sido totalmente ignorada o bien se presta como medio de certeza, y en menor medida de explicación. Estas dos funciones se pueden vislumbrar en las respuestas obtenidas. Sin embargo, las de sistematización, descubrimiento y comunicación prácticamente no aparecen. Aunque reconocemos que el rol de sistematización puede dejarse para niveles superiores por su grado de complejidad teórica, el desarrollo de los de descubrimiento y comunicación permiten la formación del concepto de demostración.

En conclusión, teniendo en cuenta que la enseñanza de la matemática debe reflejar la naturaleza de esta ciencia y su ejercicio profesional y que los alumnos requieren, como los matemáticos, de actividades significativas para su desarrollo, se requiere una mirada y un proceso más comprensivo de las funciones y del papel de la demostración que el que se le da en forma tradicional en las aulas.

Referencias Bibliográficas

Balacheff, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques 3*(3), 261-304.

Crespo, C. (2003). *Las demostraciones como contenido matemático*. Documento presentado en la VII Escuela de Invierno y VII Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Chilpancingo, Guerrero, México.

Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2001). *La influencia de las concepciones de los docentes y los estudiantes acerca de la matemática en la enseñanza de esta ciencia*. Documento presentado en la XXIV Reunión de Educación Matemática. Unión Matemática Argentina, San Luis, Argentina.

Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2003a). Las concepciones de los docentes acerca de las demostraciones. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Vol. 17, Tomo 1, pp.39-44). México.

Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2003b). *Las demostraciones como problema.* Documento presentado en la XXV Reunión de Educación matemática. Unión Matemática Argentina, Río Cuarto, Córdoba, Argentina.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon 26*, 15-30.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Godino, J. y Recio, Á. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias 19*(3), 405-414.

Ibañes, M. y Ortega, T. (1997). La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria. *Educación Matemática 9*(2), 65-104.

La Geometría en el Arte: Los Vitrales de las Catedrales Góticas

Cecilia R. Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V.González" y Universidad de Buenos Aires
Argentina
ccrespo@sinectis.com.ar
Pensamiento geométrico – Nivel medio

Resumen

Los conocimientos geométricos aparecen en las distintas culturas desde el principio, quizá unidos con los conceptos de belleza y armonía. En este trabajo se presenta un ejemplo de cómo este abordaje se puede llevar a cabo en la escuela en el nivel medio ligado con su aparición. Es posible encontrar múltiples ejemplos de distintos tipos de aplicaciones en los que los objetos geométricos y sus propiedades se hacen necesarios para estudiar las formas. Las catedrales góticas suministran un bello ejemplo en el que la geometría aparece no sólo en las formas de las construcciones arquitectónicas, sino en particular en las composiciones artísticas de las ventanas. Se propone realizar un análisis de cuáles fueron los conceptos geométricos que manejaron los constructores para lograr estas obras de arte.

Geometría y arte

La geometría, presente en las producciones humanas desde tiempos remotos, fue aplicada y estudiada por casi todos los pueblos. A las formas geométricas que denotan armonía se las cargó ya en civilizaciones antiguas de significados mágicos y misteriosos. No es raro encontrar en los pueblos de diversos orígenes, amuletos y manifestaciones artísticas cuyo estudio puede ser aprovechado en la escuela para acercar a los alumnos a una geometría humanizada, vista como una práctica social. La geometría es un área de la matemática que por décadas ha sido relegada por los docentes y no comprendida por los alumnos, siendo presentada a través de meras aplicaciones de operaciones numéricas y repetición de demostraciones.

La geometría no sólo puede estudiarse a partir de obras humanas, sino también por medio de la observación de la naturaleza, muchas veces copiada en las manifestaciones artísticas, a través de la visión humana del artista. El análisis de los elementos matemáticos presentes en una obra de arte, es una manera de acercarse a la concepción de la matemática como una manifestación cultural, como una práctica social. En el arte se pone de manifiesto no solo la destreza manual sino también la imaginación y el intelecto del artista.

La matemática como manifestación cultural en el aula

La capacidad crítica y la creatividad de los alumnos no suele aparecer en el aula si se presenta a la matemática sólo como una ciencia acabada. Es importante que esta ciencia sea reconocida en estado de continua evolución y desarrollo, en cuyo camino retoma, regenera y reelabora resultados e ideas anteriores, enriqueciéndolos a la luz de una visión distinta, como una ciencia que ofrece en cada momento histórico los conocimientos que posee a otras ciencias y áreas del quehacer humano.

Si se muestra a la matemática como un sistema de verdades sin hacer referencia a sus orígenes, a las ideas que fueron germen de sus conceptos y teorías, se pierde la concepción de ciencia como algo que surge de la necesidad de expresión de una manera de pensar, de una filosofía, de una manera de ver el mundo.

Toda manifestación cultural, y en particular aquellas que denotan conocimientos geométricos, es el reflejo de una situación social, pero por encima de todo, es reflejo de la forma de pensar de quienes la desarrollan. El hombre puede pasar mil veces al lado de la clave de un problema, pero no llegar a descubrirla, hasta que no sea capaz de madurar sus ideas, de llegar a "aprender" a descubrir esa clave. Y este proceso requiere de una manera de pensar y de ver al mundo. Aprender geometría relacionándola con el arte, permite a los alumnos no ser simples observadores pasivos, sino aprender a "mirar geométricamente" a su alrededor. No verán de esta manera a la matemática como una ciencia terminada, sino una ciencia viva en cada manifestación cultural. Relacionar la matemática y el arte da la posibilidad de pararse ante edificios y objetos que vemos cotidianamente de manera distinta: volver a mirarlos desde una óptica matemática puede resultar una experiencia enriquecedora para la curiosidad y la inteligencia, ya que permite desarrollar la capacidad para juzgar y valorar de manera objetiva la presencia material a través de sus aspectos funcionales y simbólicos en los que la matemática cobra indiscutible significatividad.

La geometría proporciona en el aula un rico contexto para el desarrollo del razonamiento matemático en el que pueden combinarse de manera natural formas de razonamiento tanto inductivas como deductivas, a través de la formulación de conjeturas y de la definición y clasificación de objetos geométricos. Los estudiantes de nivel medio deberían acceder al estudio de la geometría con un conocimiento informal sobre los elementos y figuras geométricas tanto bidimensionales como tridimensionales. Los especialistas en enseñanza de la geometría recomiendan actualmente (NCTM, 2000) que los alumnos investiguen relaciones dibujando, midiendo, visualizando, comparando, transformando y clasificando objetos geométricos.

Las catedrales góticas

Las catedrales góticas suministran un bello ejemplo en el que la geometría aparece no sólo en las formas de las construcciones, sino en particular en las composiciones artísticas de las ventanas, en las que nos centramos principalmente en este trabajo. En los vitrales, se combinan armónicamente formas poligonales realizadas a partir de circunferencias y arcos. El arte gótico corresponde a la Baja Edad Media. Con la ayuda tan solo de sencillos dibujos y plantillas, los maestros constructores dirigían la edificación de las grandes catedrales medievales. Los métodos de cálculos, aunque intuitivos y basados en relaciones matemáticas sencillas y en conocimientos prácticos eran celosamente conservados por los maestros y transmitidos de generación en generación. (La Nación, 1997).

Las catedrales son la expresión más alta del arte gótico y fueron construidas en las ciudades importantes de Europa en aquella época. La catedral gótica poseen ciertas características distintivas, entre ellas: su verticalidad, altura y esbeltez. La luminosidad de las construcciones góticas reemplazó la oscuridad que predominaba en las iglesias románicas. El arte románico refleja un mundo alejado del mundo humano, contrastando con el arte gótico que quiere unir el mundo espiritual con el mundo humano. Se caracteriza por la verticalidad y la luz, que es el reflejo de la divinidad.

Todos los elementos resaltan el carácter ascensional de la iglesia. Las torres-campanarios, generalmente se terminan en agujas que flanquean la fachada principal. La aguja corona el crucero en la parte exterior y el arco ojival se hace presente en las ventanas, los arcos interiores y los claustros. En el interior del templo, se utiliza la planta basilical o de cruz latina de 3 ó 5 naves, siendo la central mucho más elevada que las laterales. Las vidrieras cubren tanto los ventanales laterales y del crucero como el rosetón en el paño central de la fachada. Los grandes ventanales permiten la entrada de luz y el uso de las vidrieras permiten tamizar esa luz para crear una determinada atmósfera. Los pilares fasciculados o columnas se estiran hasta alcanzar una altura considerable.

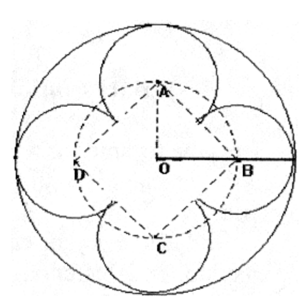
Vidrieras y rosetones

En los siglos XII y XIII, la luz era la fuente y la esencia de toda belleza visual. Según las ideas de la metafísica platónica en boga en la Edad Media la luz es el más noble de los fenómenos naturales, el menos material, el que se acerca más a la forma pura. La luz es, además, el principio creativo de todas las cosas y es especialmente activa en las esferas celestiales... Para los pensadores medievales la luz es el verdadero principio del orden y del valor.

Existen en las construcciones góticas dos formas principales de vidrieras: los rosetones y las lancetas acabadas en semi-círculo o en ojiva. Los rosetones son ventanas circulares caladas con adornos y tracerías que por su plenitud y su conclusión, unifican, sintetizan, recapitulan; mientras que las lancetas son más dinámicas, dramáticas, y en una cierta manera exteriorizan un mensaje. Estos mensajes, muchas veces corresponden a escenas bíblicas que eran de esta manera, transmitidos a quienes muchas veces no sabían leer; mediante la observación y concentración en estas escenas, la doctrina era aprendida por los fieles. Vemos claramente el carácter didáctico y comunicacional de estas manifestaciones artísticas.

Una formación típica presente en los rosetones góticos es el rosetón de cuatro pétalos.

Tratemos de describir la geometría presente en este diseño. Si se unen los centros de las circunferencias adyacentes con segmentos de recta, el resultado es un cuadrado. Es posible trazar una circunferencia con centro en el punto de intersección de las diagonales de ese cuadrado, que pase por los centro de las circunferencias que forman los pétalos del rosetón. La figura así obtenida sería el siguiente:



Es posible realizar los cálculos correspondientes a la construcción del trazado del rosetón anterior. Estos cálculos son bastante elementales y se encuentran, como veremos a continuación al alcance de alumnos de 13 o 15 años.

Queremos determinar la ubicación de los puntos A, B, C y D, siendo el dato inicial el radio OX = R de la circunferencia dentro de la cual se construirá el rosetón.

Las rectas OA y OB son perpendiculares, por contener las diagonales del cuadrado ABCD. Sabemos entonces que debe verificarse:

$$OA = OB = OC = OD = r$$

Además, por ser el ABCD un cuadrado, se tiene que:

$$2\,r^2 = AB^2$$

Pero como las circunferencias que forman los pétalos son tangentes dos a dos y los respectivos puntos de tangencia se encuentran en el punto medio de los lados del cuadrado que estamos utilizando:

$$AB = 2\,(R - r)$$

y entonces, realizando los cálculos correspondientes obtenemos:

$$r^2 - 4\,R\,r + 2\,R^2 = 0$$

Resolviendo esta ecuación en r:

$$r = (2 \pm \sqrt{2}\,)\,R$$

La raíz $r = (2 + \sqrt{2}\,)\,R$ queda descartada, pues el radio r debe ser menor que R.
Queda por lo tanto:

$$r = (2 - \sqrt{2}\,)\,R$$

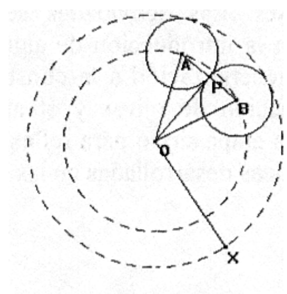
Obtenido este valor y con las consideraciones que hemos ido realizando, el dibujo del rosetón se realiza fácilmente. El trazado de un segmento de longitud $\sqrt{2}$, se realiza por medio de la aplicación del Teorema de Pitágoras, luego se obtiene $2 - \sqrt{2}$ como resta de segmentos y finalmente aplicando el Teorema de Thales para obtener el producto de este valor y R.

Una construcción que tiene gran sencillez por los cálculos necesarios es la del rosetón de seis pétalos. El caso de tres pétalos, aunque no tan simple como el de seis, involucra los elementos del triángulo equilátero y permite que se vea significatividad a los cálculos que se presentan de manera abstracta en tantos libros de texto. Ambos casos brindan la posibilidad de realizar planteos y cálculos que sin duda pueden realizar los alumnos de nivel medio como una actividad de validación de los conocimientos trabajados en la construcción anterior.

Generalizando a rosetones de distinta cantidad de pétalos

Es posible generalizar el resultado anterior y aplicarlo a la construcción de rosetones de distinta cantidad de pétalos mediante la utilización de propiedades provenientes de la geometría y la trigonometría. Estos rosetones son muy utilizados en diseños de los vitrales de las ventanas de las catedrales góticas. Por ejemplo, en la catedral de Amiens, se encuentran rosetones de tres, cuatro y ocho pétalos.

El diagrama general sería aproximadamente el siguiente:



Con el ángulo central AOB para el rosetón de n pétalos, será:

$$AOB = \frac{360º}{n}$$

por ser el ángulo central de un polígono de n lados.

En el triángulo AOB, que es isósceles, puede considerarse la bisectriz del ángulo AOB y en el triángulo rectángulo así determinado, se tiene:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) = \frac{PB}{OB}$$

o sea:

$$r = \frac{R}{1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)}$$

Con el resultado que se acaba de hallar, es posible realizar los cálculos correspondientes a las ubicaciones de los pétalos de rosetones de distintas cantidades de pétalos (n) que se encuentran en las catedrales góticas. La tabla que de obtiene es la siguiente:

n	α_n	r	r (aproximado)
3	120º	$\frac{2}{2+\sqrt{3}}R$	0,54 R
4	90º	$\frac{2}{2+\sqrt{2}}R$	0,59 R
5	72º	$\frac{4}{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}R$	0,63 R
6	60º	$\frac{2}{3}R$	0,67 R
8	45º	$\frac{2}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}R$	0,72 R
12	30º	$\frac{2}{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}R$	0,79 R

La construcción de estos rosetones requiere, como en el caso anterior, únicamente el uso de regla y compás mediante la aplicación de los teoremas de Pitágoras y Thales y ya que las operaciones requeridas son raíces cuadradas, sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Estas operaciones son las que corresponden a la obtención de segmentos construíbles con regla y compás.

Para cantidades de pétalos que superen los doce, los radios r, tal como puede observarse en las aproximaciones que figuran en la tabla anterior, se hacen cada vez más próximos al radio R de la circunferencia en la que se inscribe el rosetón por lo que su construcción se hace impracticable.

Una secuencia didáctica para trabajar con docentes y alumnos de nivel medio

Las ideas desarrolladas en este trabajo, fueron algunas de las presentadas durante un curso corto que se llevó a cabo durante el desarrollo de la Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme 18), en Tuxtla Gutiérrez (Chiapas, México) en julio de 2004. Se interesaron en este curso más de treinta participantes provenientes de distintos países. Las actividades se dividieron en cinco etapas que corresponden respectivamente a la introducción de algunas construcciones preliminares, la construcción de rosetones, la generalización a la construcción de rosetones con cualquier número de pétalos, la construcción de ojivas y el análisis de las secuencias didácticas trabajadas en el curso. La última etapa sirvió para reflexionar acerca de las etapas anteriores y la aplicabilidad al aula de las ideas desarrolladas en las etapas anteriores.

Comentarios finales

El abordaje de los conceptos geométricos desde diferentes contextos, en los que se encuentra el arte y la historia permiten amenizar las clases y lograr mostrar a los alumnos una visión más amplia de la matemática, en la que se la ve no sólo desde el cálculo abstracto, sino como una verdadera manifestación cultural. En este artículo se ha intentado presentar un ejemplo de cómo este abordaje se puede llevar a cabo en la escuela. Es posible encontrar múltiples ejemplos de distintos tipos de aplicaciones en los que los conceptos geométricos y sus propiedades se hacen necesarios para estudiar las formas.

Quienes estamos en el ámbito de la enseñanza de la matemática, sabemos que es difícil a veces captar la atención de los alumnos. Programar situaciones donde los estudiantes aprendan a descubrir y aplicar los conocimientos matemáticos es un desafío, por la riqueza que pueden llegar a tener diferentes problemas y por la gran sorpresa de los alumnos en cuanto a que ponen de manifiesto sus propias capacidades para ir descubriendo relaciones y propiedades matemáticas en la observación de todo cuanto hay a su alrededor.

Referencias Bibliográficas

Castelnuovo, E. (1981). La *Geometría*. Barcelona, España: Ketres Editora.

Crespo, C. (1999). La historia de la geometría como elemento motivador y ejemplificador en la enseñanza. Documento presentado en la I Conferencia Argentina de Educación Matemática, Buenos Aires, Argentina.

Euclides (1991). *Elementos. Libros I-IV*. Madrid: Gredos.

González, P.M. (1991). Historia de la matemática: integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. Enseñanza de las ciencias 9(3), 281-289.

Heilbron, J. L. (1998). *Geometry Civilized.* Oxford, E.U.A: Claredon Press.

Jantzen, H. (1970). *La arquitectura gótica*. Buenos Aires, Argentina: Nueva Visión.

La Nación. (1997). *Guía Visual de pintura y arquitectura*. Santiago de Chile.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Ramos, C.M. (2004, 6 de junio). Félix Bunge: El Señor de los vitrales. Revista de La Nación, pp. 67-70.

Geometría para Armar

Cristina Ferraris
Centro Regional Universitario Bariloche Universidad Nacional del Comahue
Argentina
cferrari@crub.uncoma.edu.ar
Capacitación para el trabajo, Formación de profesores, Pensamiento geométrico – Nivel Básico, Medio y Superior

Resumen

Taller destinado a docentes en ejercicio y en formación de los distintos niveles de escolaridad, en el que las actividades están dirigidas a trabajar particularmente los contenidos procedimentales. Las unidades, *Mirar para ver*, *Papel*, *Mover los cuerpos*, *entrar a la cancha y utilizar espejos*, *Cubo*, *Sólo con regla y compás*, están diseñadas sobre la base de los recursos a utilizar, lo que las hace muy diversas en cuanto a los contenidos conceptuales que se abordan, permitiendo que éstos actúen como disparadores de otras actividades y exploraciones, trascendiendo el recurso propuesto. Se propone así fomentar la exploración por parte de los participantes y la utilización de sus propias estrategias, potenciando la posibilidad de discutir y compartir el modo de tratamiento de los temas según el nivel de escolaridad en el que se desee trabajar en el aula.

Introducción

En el proceso de construir el conocimiento matemático, los problemas son un buen vehículo para que el que aprende explore en lo procedimental.
Para el tratamiento de distintos temas de geometría, se presentaron actividades en forma de guía de problemas con el propósito de crear espacios para dar lugar a una actualización de los conocimientos y recursos en general y proveer sugerencias para el trabajo en el aula.

De este modo, a los modelos de problemas para trabajar algunos conceptos geométricos, se agrega una modalidad para realizar la tarea que induce a lo procedimental en el sentido amplio, como observar, describir, organizar, y también en lo que se refiere a los procedimientos de la matemática misma: conjeturar, demostrar, clasificar, etc.

La propuesta estuvo dirigida a docentes en formación o en ejercicio, de los distintos ciclos de escolaridad, con recursos de fácil obtención de modo que la reflexión sobre lo trabajado hiciera posible su posterior puesta en aula.

Los problemas o situaciones problemáticas tenían como objetivo permitir no sólo pasar de lo simple a lo más complejo, sino también que cada participante pueda desarrollarlo con la profundidad que sus propios recursos le permitieran, o sea, según cómo estuviera equipado para la tarea.

Las direcciones temáticas propuestas abordan distintos contenidos conceptuales, donde la secuencia no queda determinada por los mismos, si no por los recursos que se utilizan.

Creemos que el trabajar los temas de la matemática del modo en que lo haría un especialista, esto es, poniendo en juego los contenidos procedimentales propios de la ciencia, permite a los participantes una incursión en los conceptos específicos con un aprovechamiento mayor de los recursos cotidianos, tanto de los propuestos en el taller como de los aportados por los participantes durante su desarrollo.

Se pretende brindar la posibilidad de reconocer ciertas propiedades geométricas como parte de lo cotidiano, utilizando los temas de la Geometría escolar como medio de iniciación en actividades matemáticas tales como sistematizar, conjeturar, clasificar, estimar, observar propiedades, argumentar afirmaciones, justificar, etc.,

Metodología

Sin duda la geometría, sobre todo la del espacio, debe *hacerse*, en lo posible ayudado con las manos y mirando con los ojos bien abiertos: de otra manera, es muy fácil caer en lo que podríamos llamar mitos que sólo podrán ser desmentidos con la investigación, el manipular y el ver, junto a la utilización de procedimientos matemáticos.

En el ámbito de un taller se dan las condiciones de promover la inquietud de investigar, hacer y dar apertura a la creatividad.

La metodología desplegada en este taller propone experimentar en uno mismo, como docente, aquello que queremos llevar a los estudiantes. Por ejemplo, la realización de los cuerpos regulares y de la pelota merece una reflexión acerca de lo que se suele pedir a los niños en el aula, ya que no siempre se tiene tanta habilidad manual para obtener un cuerpo que se vea realmente regular....

Para el desarrollo de las actividades se tuvo en cuenta que cada participante pudiera seguir profundizándolas hasta donde sus conocimientos y la interrelación con el grupo lo permitan.

Se considera muy importante propiciar el trabajo grupal a fin de lograr un ámbito de cooperación y comunicación, de modo que el desarrollo de las actividades permitiera la incorporación de los distintos aportes, estimulando el desarrollo de los pertinentes, y se enriquezca con la discusión en cuanto al problema propuesto y a su posible puesta en aula.

Teniendo en cuenta que la propuesta apunta a llevar a la escuela los recursos trabajados y atendiendo a que los participantes suelen venir equipados con recursos muy variados, se tiende a incorporar el lenguaje y los elementos (concretos o conceptuales) que utilizan los distintos participantes en su ámbito cotidiano.

La manera de abordar los problemas se dejó abierta, tanto en el orden de los mismos como en la profundidad de su tratamiento, de modo de permitir regular los tiempos de cada participante y realizar un trabajo grupal con el mayor aprovechamiento en cuanto al trabajo de las distintas actividades.

Desarrollo

Las unidades, *Mirar para ver*, *Papel*, *Mover los cuerpos*, *entrar a la cancha y utilizar espejos*, *Cubo*, *Sólo con regla y compás*, están diseñadas sobre la base de los recursos a utilizar, lo que las hace muy diversas en cuanto a los contenidos conceptuales que se abordan, en la creencia de que esta organización permite a dichos contenidos actuar como disparadores de otras actividades y exploraciones, trascendiendo el recurso propuesto.

La unidad *Mirar para ver*, se propone trabajar con estimaciones; construcción de poliedros; conteo de caras, aristas y vértices. En otras palabras, varias propiedades geométricas que tienen mucho que ver con observar de manera directa o a través de la construcción de los objetos geométricos.

La unidad que hemos llamado *Papel,* consiste en utilizar éste elemento para investigar acerca de distintas propiedades como la duplicación del cuadrado, la construcción de distintos tetraedros, la notable propiedad de la cinta de Möebius, relación entre volúmenes, el infaltable teorema de Pitágoras y las plantillas pertinentes para la construcción del cubo.

Mover los cuerpos, entrar a la cancha y utilizar espejos es la unidad que atiende a los movimientos o isometrías tanto del plano como del espacio: se proponen actividades dirigidas para ver las rotaciones posibles de un prisma (envases de leche), otras que trabajan las simetrías que proveen los espejos, se plantean preguntas acerca de la orientación. Esta unidad se cierra con un baile en parejas con la propuesta de imitar los movimientos del compañero, a fin de que sea tomado como posible motivación para el estudio de las simetrías, especialmente la de espejo.

La unidad *Cubo* aprovecha la familiaridad con este cuerpo platónico y se ocupa de una serie de actividades que permiten observar, discutir y anotar varias de las muchísimas propiedades de este cuerpo geométrico que son de fácil comprobación, planteando también la temática de orientación en el espacio, por ejemplo al observar las dos formas de "fabricar" dados.

La unidad *Construcciones con regla y compás* permite discutir de algún modo la problemática planteada por los griegos antiguos, haciendo referencia a puntos obtenidos por intersección de rectas con rectas, rectas con circunferencias y circunferencias con circunferencias. El tema merece un comentario particular, tanto por su significado histórico como por su atractivo al momento de realizar diseños armónicos y de fácil construcción. Hay una mención especial al número de oro y las construcciones relacionadas con él y su utilización en distintas actividades humanas.

Algunos ejemplos de cómo se presentaron las actividades que conforman las distintas unidades de la guía del taller

Ejemplo I - Construir en cartulina los cinco poliedros regulares, contar en cada uno el número total de caras, de aristas, de vértices y de caras o aristas por vértices.
a) Completar un cuadro con los siguientes datos: Número de caras, número de aristas, número de vértices y número de Euler para cada uno de los cuerpos. Se sugiere numerar las caras, tener en cuenta que cada arista es compartida por dos caras, que para cada cuerpo el número de aristas que concurren a un vértice se repite en todos los otros vértices, similar para caras por vértice.

Fórmula para calcular el número de Euler:

$$\varepsilon = c + v - a$$

(¿Qué pasó con la última columna?)

b) Discutir los resultados del cuadro en cuanto a
i) comparación del número de caras y de vértices de cubo con octaedro y dodecaedro con icosaedro
ii) observación de la última columna. ¿Será así para cualquier poliedro?. Calcular el número de Euler para otros poliedros que se presentarán en la oportunidad. Rescatar datos históricos sobre estos temas (Euler y cuerpos platónicos).

Ejemplo II - a) i) Tomar un envase de leche de tipo 1 (corte cuadrado), dibujar el contorno de su base de apoyo en un papel que dejaremos fijo y considerar un lugar como frente de observación. Describir todos los movimientos, incluidos los que cambian la base de apoyo, que muestren las distintas "vistas" de manera tal que la base elegida coincida al apoyarla en el cuadrado dibujado y asignar un nombre a cada movimiento. Identificar los movimientos que, realizados dos veces, dejan el envase en la posición inicial.

IMPORTANTE: para poder reconocer que estamos realizando todos los movimientos posibles, conviene partir siempre de la misma posición, por ejemplo, el envase "al derecho" y con la leyenda principal hacia delante (si hay dos iguales, pintar o marcar una).
A cada uno de los movimientos vistos se los llama rotaciones o giros, y en particular, a los considerados en último lugar, simetrías axiales.
ii) Organizar en una tabla las composiciones de las rotaciones, esto es, el resultado de realizar un movimiento a continuación de otro.
b) i) Tomar un envase de leche de tipo 2 (corte rectangular) y realizar algo similar a lo visto para el otro.
ii) Idem a lo visto en a) ii) para el caso envase de tipo 1.
c) sobre la base de lo realizado en los ítems anteriores, podemos observar que en cada movimiento se realizó un giro alrededor de un eje. Colocar los palitos de brochette para concretar dichos ejes y agrupar los giros que corresponden a cada uno de ellos. Notar que acá ya podemos despegarnos del apoyo sobre la mesa y realizar los movimientos guiados por los ejes. ¿Cuántos ejes de rotación hay en cada caso (tipo 1 y tipo 2)?

Ejemplo III – Cuando Asmodeo sonríe, se le forma un hoyuelo en la mejilla derecha. Sin embargo, su imagen en el espejo le dice que tal simpático rasgo está a la izquierda. Asmodeo puso entonces un segundo espejo para ver en él la imagen de su imagen y sonrió.
¿En cuál mejilla estará el hoyuelo de la imagen de la imagen?
Si se ponen más espejos, digamos 3, 4, 5, etc. de manera de poder ver las distintas imágenes, siempre con Asmodeo sonriendo ¿en cuáles de ellos el hoyuelo estará en la mejilla derecha?
Si Asmodeo se saca una foto sonriendo ¿en qué mejilla (de la foto) estará el hoyuelo?
Con un espejo que te permita mirar tu rostro y una foto tuya de frente (por ejemplo de un documento personal), ver si hay diferencias.

Ejemplo IV – El problema de duplicar el cubo que plantearon los griegos en su época de oro, se refería a duplicarlo en cuanto a su volumen. Veamos aproximaciones a su resolución.
a) Si se corta un cubo por los puntos medios de todos los pares de aristas opuestas, se obtienen cubos más pequeños de volumen igual a un octavo del volumen del original. ¿Cuál es el mínimo de estos cubos pequeños que se deben agregar al cubo grande de modo de obtener otro cubo (un poco más grande, claro)? ¿Qué relación existe entre el volumen del nuevo cubo y el original?

diversas en cuanto a los contenidos conceptuales que se abordan, en la creencia de que esta organización permite a dichos contenidos actuar como disparadores de otras actividades y exploraciones, trascendiendo el recurso propuesto.

La unidad *Mirar para ver*, se propone trabajar con estimaciones; construcción de poliedros; conteo de caras, aristas y vértices. En otras palabras, varias propiedades geométricas que tienen mucho que ver con observar de manera directa o a través de la construcción de los objetos geométricos.

La unidad que hemos llamado *Papel,* consiste en utilizar éste elemento para investigar acerca de distintas propiedades como la duplicación del cuadrado, la construcción de distintos tetraedros, la notable propiedad de la cinta de Möebius, relación entre volúmenes, el infaltable teorema de Pitágoras y las plantillas pertinentes para la construcción del cubo.

Mover los cuerpos, entrar a la cancha y utilizar espejos es la unidad que atiende a los movimientos o isometrías tanto del plano como del espacio: se proponen actividades dirigidas para ver las rotaciones posibles de un prisma (envases de leche), otras que trabajan las simetrías que proveen los espejos, se plantean preguntas acerca de la orientación. Esta unidad se cierra con un baile en parejas con la propuesta de imitar los movimientos del compañero, a fin de que sea tomado como posible motivación para el estudio de las simetrías, especialmente la de espejo.

La unidad *Cubo* aprovecha la familiaridad con este cuerpo platónico y se ocupa de una serie de actividades que permiten observar, discutir y anotar varias de las muchísimas propiedades de este cuerpo geométrico que son de fácil comprobación, planteando también la temática de orientación en el espacio, por ejemplo al observar las dos formas de "fabricar" dados.

La unidad *Construcciones con regla y compás* permite discutir de algún modo la problemática planteada por los griegos antiguos, haciendo referencia a puntos obtenidos por intersección de rectas con rectas, rectas con circunferencias y circunferencias con circunferencias. El tema merece un comentario particular, tanto por su significado histórico como por su atractivo al momento de realizar diseños armónicos y de fácil construcción. Hay una mención especial al número de oro y las construcciones relacionadas con él y su utilización en distintas actividades humanas.

Algunos ejemplos de cómo se presentaron las actividades que conforman las distintas unidades de la guía del taller

Ejemplo I - Construir en cartulina los cinco poliedros regulares, contar en cada uno el número total de caras, de aristas, de vértices y de caras o aristas por vértices.
a) Completar un cuadro con los siguientes datos: Número de caras, número de aristas, número de vértices y número de Euler para cada uno de los cuerpos. Se sugiere numerar las caras, tener en cuenta que cada arista es compartida por dos caras, que para cada cuerpo el número de aristas que concurren a un vértice se repite en todos los otros vértices, similar para caras por vértice.

Fórmula para calcular el número de Euler:

$$\varepsilon = c + v - a$$

(¿Qué pasó con la última columna?)

Por último, creemos que el taller nos permitió a todos los participantes disfrutar de la geometría siendo más que espectadores, ya que también se trabajó con profundidad y compromiso.

Referencias Bibliográficas

Beppo Levi: (1947). *Leyendo a Euclides*. Argentina: Editorial Rosario S. A.

Fernández, A. (s. f.). *Geometría teórico-práctica para niños*. (10a. ed.). En F. Crespillo (Ed.). Buenos Aires, Argentina.

Ferraris, C. (1991). *Espacio - Geometría Métrica.* (1a ed.). Río Negro, San Carlos de Bariloche, Chile: Centro Regional Universitario Bariloche – Universidad Nacional del Comahue..

Ferraris, C. (1995). *Construcciones con regla y compás*. Cuaderno Universitario N° 23. Centro Regional Universitario Bariloche – Universidad Nacional del Comahue. San Carlos de Bariloche.

Ferraris, C.: (1997). *Una definición geométrica de ángulo-Ordenamiento-Suma-Aplicaciones*. Cuaderno Universitario N° 27. Centro Regional Universitario Bariloche – Universidad Nacional del Comahue. San Carlos de Bariloche.

Ferraris, C. y Ferrero, M.: (2003). *Geometría para armar*. Cuaderno Universitario N° 47. Centro Regional Universitario Bariloche – Universidad Nacional del Comahue. San Carlos de Bariloche.

García Ardura, M.: (1968). *Problemas gráficos y numéricos de Geometría.* (15a ed.). Madrid, España.

Gentile, E.: (1987). Construcciones con regla y compás. *Revista de Educación Matemática 3*(2),15-23.

Hilbert, D. (1971). *Fundation of Geometry*. (2a ed.) La Salle. Illinois. (Trabajo original publicado en 1897).

Ghyka, Matilsa C. (1953). *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Poseidón.

Ghyka, Matilsa C. (1978). *El número de oro –I los ritos – II los ritmos*. Barcelona, España: Editorial Poseidón.

Pogorelov, A. V. (1974). *Geometría Elemental*. Moscú, URSS: Editorial MIR.

Poincarè, H. – Einstein, A. (1948). *Fundamentos de Geometría.* (J. R. Pastor, Trad.). Argentina: Editorial Ibero América.

Puig, A. (1980). *Curso de Geometría Métrica.* (10a ed.). Madrid, España: Gómez Puig Ediciones.

Tirao, J. (1979). *El Plano*. (1a ed.). Buenos Aires, Argentina: Editorial Docencia.

Geometría Dinámica en las Clases de Matemáticas

Claudia Flores y Betsabé Adalia Contreras
CECyT 5, CICATA-IPN [1], CECyT 11
México
cfloreses@ipn.mx, becontreras@ipn.mx
Formación de Profesores - Nivel medio

Resumen

En este trabajo se presenta una visión sobre el diseño de actividades de aprendizaje en este tema y sobre el papel del profesor. Esta visión está incluida en los Paquetes Didácticos de la Academia Institucional de Matemáticas y toma como referencia un marco para la elección de problemas y el conocimiento didáctico sobre cada uno de los contenidos del currículo de matemáticas. El propósito de este escrito es describir los resultados de un taller para profesores en el marco de la XVIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Las actividades realizadas permiten construir los conocimientos geométricos a través de la argumentación, y la demostración mediante la realización de construcciones, conjeturas y problemas. El producto de esta aplicación fue la realización de plan puntual para el desarrollo de clases con actividades de geometría dinámica en el aula de cómputo.

Introducción

La Geometría Dinámica permite representar y manipular objetos matemáticos y sus relaciones. La manipulación de estos objetos, que se pueden ver en la pantalla, se realiza mediante la operación de arrastrar el ratón de tal forma que se pueden identificar las relaciones que permanecen invariantes cuando cambian las propiedades de los objetos. La forma de estudiar Geometría Dinámica se caracteriza por la formulación de conjeturas y la realización de exploraciones que representen los casos posibles. Hanna (2002), por ejemplo, nos menciona que una conjetura en Matemáticas está siempre considerada no más que una conjetura hasta que no sea demostrada. Las actividades en Geometría Dinámica son de tipo inductivo y pueden dar lugar a preguntas que exijan una demostración, como resultado de sus exploraciones. Villiers (1996) utiliza un modelo para las funciones de demostración donde: la verificación es referida a la "verdad" de un enunciado, la explicación proporciona un discernimiento de "por qué" es verdadero. En el estudio de las Matemáticas brinda a los profesores y a los estudiantes recursos que exigen una reflexión sobre las relaciones complejas entre el conocimiento geométrico, la argumentación y la demostración.

Particularmente 'El Geometra' (Geometer's sketchpad 3) permite la modelación en geometría en dos enfoques los dibujos (drawings) y los guiones (scripts). En los dibujos se crean y se manipulan las construcciones geométricas, además se pueden guardar las construcciones realizadas. Los guiones son programas que pueden ejecutarse con un dispositivo de tipo grabadora, de tal manera que, dados los objetos iniciales, se puede hacer la construcción "grabada" paso a paso o, directamente, la construcción final; se realizan construcciones euclidianas con el uso de herramientas y comandos. El docente debe contar con una base en

[1] Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada

educación matemática, manejo de herramientas tecnológicas y ser capaz de crear los ambientes de aprendizajes y diseñar las estrategias para el mejoramiento de la educación. A continuación presentamos los proyectos que sirven de base para el diseño de materiales útiles para profesores y estudiantes que toma de referencia para el diseño de actividades de aprendizaje'Un Marco para la elección de Problemas' (Alarcón, 1996) y el reconocimiento del conocimiento didáctico sobre cada uno de los contenidos del currículo de matemáticas (Rico, 1998).

Proyectos de referencia para las actividades de aprendizaje y el papel del profesor

La elaboración de materiales de calidad para profesores y estudiantes que les permitan trabajar conjuntamente para lograr los objetivos institucionales en el área de matemáticas en el nivel medio superior, conforma un proyecto desarrollado por la Academia Institucional de Matemáticas del Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional (AIM-NMS-IPN). Este proyecto lleva por nombre 'Paquetes Didácticos' (AIM-NMS-IPN, 2001b) y forma del Plan de Trabajo de esta Academia (AIM-NMS_IPN, 2001a).

Dentro de este Plan de Trabajo se considera que los profesores conformen y desarrollen Comunidades de Aprendizaje (CA) para preparar la comprensión y el uso auténtico en las aulas de los nuevos modelos educativos, en particular del Instituto Politécnico Nacional (IPN), en México. Algunas de las características de los profesores en estas CA son:

- Una actitud abierta para el análisis de su práctica docente y la de sus compañeros.
- Un interés continúo para el desarrollo de las actividades específicas del Taller.
- La lectura y el análisis de los materiales de estudio.
- La participación activa en las actividades y discusiones, y
- Una dialéctica de las perspectivas discente y docente.
- El uso de las TIC que constituye una valiosa herramienta para la creación de material didáctico nuevo.

Retomamos estas características para diseñar un taller en el marco de la XVIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. En los siguientes apartados describimos este taller, los materiales usados, las actividades propuestas y los resultados obtenidos.

Taller de Geometría Dinámica en las clases de Matemáticas

El diseño del Taller tomó como referencia los contenidos del programa de Geometría y Trigonometría del IPN, los libros del estudiante (AIM-IPN, 2003a) y del profesor (AIM-NMS-IPN, 2003b) y la documentación del Taller 'Uso del Paquete Didáctico del curso de Geometría y Trigonometría'.

Se brinda al profesor la oportunidad de planear sus actividades en el aula de cómputo. Estos planes permitirán trabajar sistemáticamente con los estudiantes los objetivos del programa y los objetivos institucionales del área de Matemáticas.

El programa propuesto para este breve taller (3 horas) es el siguiente:

Construcciones	Investigaciones guiadas
Problemas	Modelos geométricos
Conjeturas	Exploraciones abiertas
Lecturas	Exploraciones de final abierto

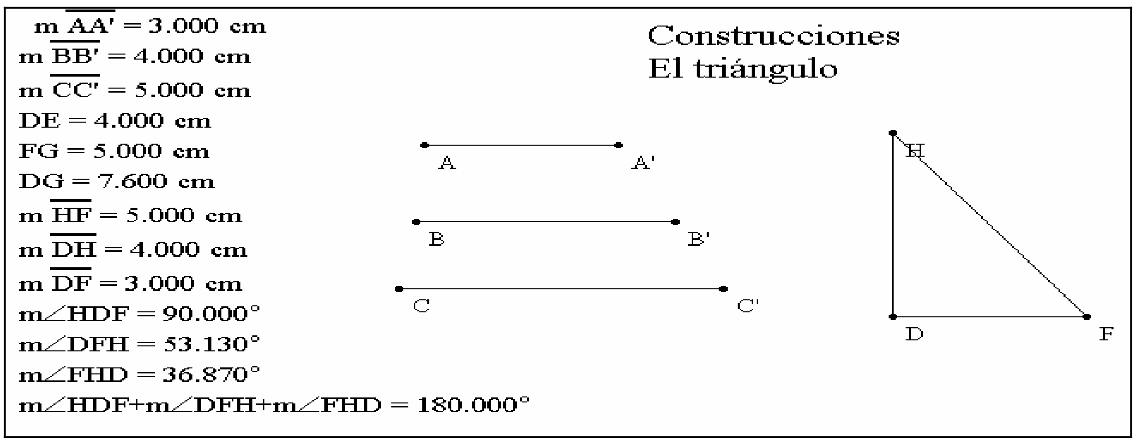
Se adjunta un disco compacto con los materiales que se utilizarán en el curso, cuyo contenido se enlista a continuación:

I. Documentos		
1. Documentación	1.1. Actividades curso GD Cuadros con instrucciones (MSWord y MSPP) 1.2. Descripción del curso GD (MSWord y MSPP) 1.3. Directorio formato (MSWord) 1.4. Productos (descripción)	
2. Sesiones	2.1. S01 Construcciones, segmentos, operaciones básicas y lectura	2.1.1Triángulo 2.1.2 Construye segmento que tenga doble, triple y quíntuple longitud 2.1.3 Napoleón 2.1.4 Cuadrados 2.1.4.1 Construye un cuadrado cuya área sea el doble de la del cuadrado dado. 2.1.4.2 Construye un cuadrado cuya área sea el triple de la del cuadrado dado. 2.1.5 Lectura: Enseñar la demostración en geometría
	2.2. S02 Problemas y Lectura	2.2.1 El Granjero 2.2.2 Las escaleras 2.2.3 Equilátero y resbaloso 2.2.4 Lectura: Problemas, Técnicas, Tecnologías y Teorías.
3. Lecturas	3.1 Enseñar la demostración en geometría. 3.2 El valor permanente de la demostración. 3.3 Técnicas, tecnologías y teorías matemáticas. 3.4 ¿Porqué demostrar la geometría dinámica	

En las actividades realizadas en las sesiones, los participantes trabajan en equipo y discuten grupalmente (véase Suárez, 2000), primero como discentes y, posteriormente, los profesores realizaron un análisis y una discusión del diseño de las actividades.

Actividades de Familiarización

En la primera sesión del Taller se realizaron una serie de construcciones con el propósito al que los profesores se familiarizarán con las principales funciones del geómetra y con la modalidad de trabajo. Los Profesores realizaron algunas construcciones usando las funciones básicas del geómetra, las construcciones con regla y compás euclidianos y la comparación por razón de las medidas de los segmentos. A continuación se muestra el trabajo de un equipo.

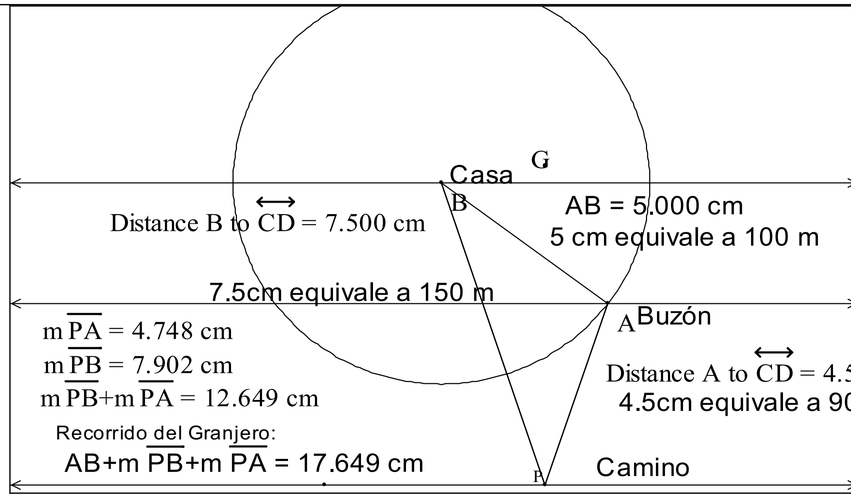


La modelación de un problema

En los problemas elegidos para el taller se ponen en juego conocimientos y estrategias complejos sin embargo en este trabajo nos concentramos en el proceso de modelación, que va de las características de las situaciones descritas de los enunciados de los problemas a los objetos geométricos y sus relaciones. En la lectura "Problemas, Técnicas, Tecnologías y Teorías" (Véase en Chevallard, et al, 1998) se habla de la técnica de los lugares geométricos, considerando que una técnica puede ser utilizada de manera normalizada, comprensible, correcta y justificada.

El proceso de modelación de uno de los problemas 'El Granjero' se describe en la siguiente resolución de referencia.

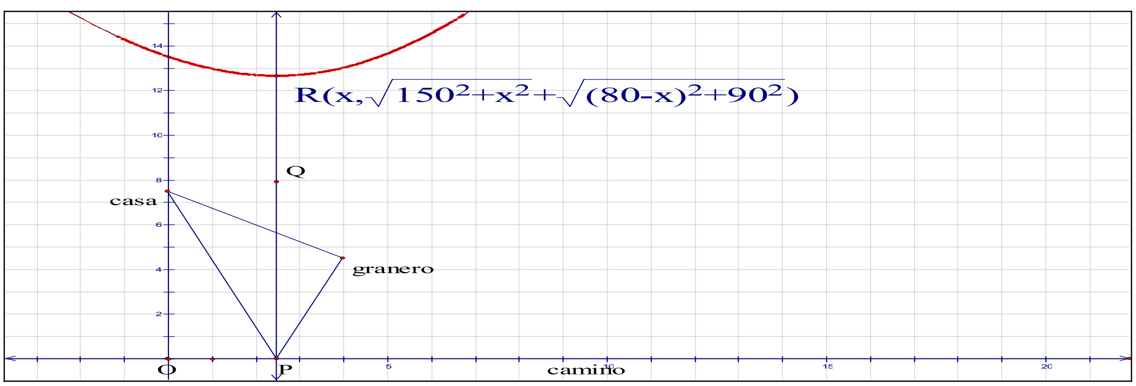
La casa de un granjero está a 150 m de un camino recto. Su buzón está sujeto al granero, a 100 m de la casa y a 90 m del camino. Cada lunes deja la basura a la orilla del camino y después pasa a recoger el correo. ¿Qué punto del camino hace que su recorrido sea el más corto?

En términos generales los profesores pudieron identificar los objetos matemáticos (puntos, segmentos, rectas y círculos) y traducir las condiciones de la situación del Granjero en condiciones geométricas en el modelo que construyeron.	

En particular la técnica de los dos lugares geométricos sirvió para que los participantes identificaran o localizaran el granero (Buzón) como los puntos que satisfacían las dos condiciones estar a 90 m del camino (los puntos constituían el lugar geométrico de una recta paralela al camino) y estar a 100m de la casa (los puntos constituían el lugar geométrico de un círculo de radio 100 y centro en la casa).

El recorrido mínimo del granjero es de aproximadamente 252.98 m (12.649*20) cuando deja la basura. A éste recorrido de 252.98 m se le considera los 100 m que hay entre el granero y la casa por lo que el recorrido total mínimo es de 352.98 m (17.649*20).

Otra forma de obtener el recorrido total mínimo es a partir de la ecuación que incluye un sistema de referencia. El origen es el punto O, PQ y QR son las hipotenusas de dos triángulos rectángulos cuyos catetos, respectivamente, son 150 y x, y (80-x) y 90.



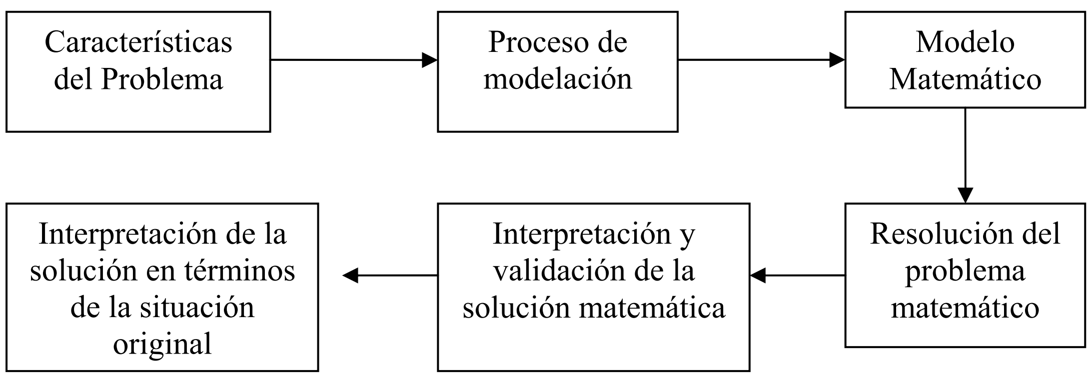
En la exposición de las actividades se eligieron dos equipos que presentaron sus soluciones y posteriormente los profesores discutieron la pertinencia del problema como medio de aprendizaje. Los profesores en general usaron la técnica de los dos lugares geométricos para identificar la posición del granero. Un aspecto destacable fue la discusión que se dio para ubicar en el camino en el punto que se depositaba la basura (un punto cualquiera del camino). En el modelo la posibilidad que ofrece la geometría dinámica de desplazar el punto sobre la recta que presenta el camino permitió que la trayectoria variable del Granjero se pudiera explorar mediante la suma de las medidas de los segmentos que representaron esta trayectoria.

Los productos del taller que se obtuvieron fueron un plan puntual para el desarrollo de las clases en el aula de cómputo y un portafolio con las actividades realizadas en el taller.

El desarrollo de las actividades planeadas debe estar enfocado al hecho de que los estudiantes alcancen a desarrollar las competencias matemáticas necesarias para comprender, utilizar, aplicar y comunicar conceptos y procedimientos matemáticos y, así, descubran que las matemáticas están relacionadas con la vida y con las situaciones que los rodean, más allá de la escuela.

Conclusión

En el proceso de modelación del Granjero pudimos identificar las etapas siguientes:



Una vez construido el modelo geométrico el potencial de las funciones de la geometría dinámica permitió obtener una solución aproximada en la solución posterior, ya desde la perspectiva docente, se esbozo en una solución analítica con la trayectoria considerada como la suma de las hipotenusas de triángulos rectángulos y otra usando reflexiones y semejanzas.

Una característica del taller que resulto particularmente provechosa, según los comentarios de los participantes, fue la alternancia de los puntos de vista o de las perspectivas discentes y docente ya que la experiencia de resolver los problemas y posteriormente discutir su potencial como medio de aprendizaje les permitió dar los primeros pasos en la elaboración de la historia de la actividad.

Referencias Bibliográficas

AIM-NMS-IPN (2003a). *Geometría y Trigonometría*. Libro para el Estudiante. IPN.
AIM-NMS-IPN (2003b). *Geometría y Trigonometría*. Libro para el Profesor. IPN.
AIM-NMS-IPN (2001a). *Plan de trabajo de la Academia Institucional de Matemáticas del Nivel Medio Superior del IPN*. Documento interno de trabajo. México D.F., México:IPN

AIM-NMS-IPN (2001b). *Proyecto 'Paquetes Didácticos para los Cursos de Matemáticas'*. Documento interno de trabajo. D. F. México: IPN

Alarcón, J. (1995). [Precálculo y Resolución de Problemas] Datos en bruto no publicados.

Chevallard, Y., Bosch, M y Gascón, J. (1998). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. D. F. México: SEP.

Hanna. (2002). El valor permanente de la demostración. *Revista virtual Xixim, 2*

Rico L. (1998). Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1,* (1), 22-39.

Suárez, L. (2000). El trabajo en equipo y la elaboración de reportes en un ambiente de resolución de problemas. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN

Villiers (1996). *Why Proof in Dynamic Geometry?* Forum in Mathematics in College, Instructional Resource Center, CUNY. 40-41.

Prácticas Ostensivas en la Enseñanza de la Matemática

Dilma Fregona
Universidad Nacional de Córdoba
Argentina
dilma@arnet.com.ar
Formación de Profesores – Nivel Básico

Resumen

Desde el año 1977, en el marco de la *teoría de las situaciones didácticas*, diferentes investigaciones en didáctica de la matemática mostraron que existe una práctica de enseñanza llamada *ostensión* o *presentación ostensiva* de las nociones que identifica a todo un conjunto de procedimientos didácticos que caracteriza cierta forma de introducir las nociones a través de "definiciones". Esas prácticas constituyen un conocimiento de los docentes, y un objeto de estudio en el dominio de la didáctica de la matemática. Estudiar la ostensión como un conocimiento de los profesores, en el marco de la teoría de las situaciones, implica considerar ese conocimiento como la respuesta óptima -para el usuario- a una situación dada.

Introducción

Harrisson Ratsimba-Rajohn (1977) fue el primero en identificar con el nombre de *introducción ostensiva* a todo un conjunto de procedimientos didácticos que se utilizan para introducir nociones donde las decisiones que toma el docente,

- suponen que el objeto es "conocido" por los alumnos, y entonces presenta un dibujo con la descripción de algunos elementos y su vocabulario específico,

- pasan por presentar varios ejemplos, seguidos de una designación, y si es posible una fórmula o simbolización que dé generalidad al enunciado.

¿Cuál es el status epistemológico de los objetos así presentados al alumno? ¿Puede tener el status de una definición[1]?

Algunos presupuestos de las prácticas ostensivas

Para poner de manifiesto los supuestos implícitos de los actos didácticos caracterizados como ostensivos, proponemos el análisis de dos ejemplos: el reconocimiento y la designación del color verde, y el reconocimiento de objetos geométricos tales como el triángulo y el cuadrado.

[1] La respuesta no es inmediata, aún en filosofía, procedimientos semejantes han sido objeto de discusión. ¨¿Se debe llamar definición a toda proposición cuyo atributo corresponde *uni definito et toti*? [Al único definido y a todo lo definido]. Por ejemplo: "El hombre es un bípedo sin plumas; el reloj es el objeto que está en la pared entre las dos ventanas, etc." No se pudo llegar a un acuerdo sobre este punto, porque varios miembros de la Sociedad veían allí precisamente ejemplos de *definiciones nominales*." Cf. Observaciones sobre la palabra "definición", vocabulario técnico y crítico de la filosofía, André Llande, PUF, 1972.

Primer ejemplo: en una clase, el entorno natural del alumno ofrece objetos que tienen la propiedad de "ser verde". Llegado el caso, para reforzar el acto didáctico, el docente modifica el entorno aportando objetos -para hacer una clasificación- que verifiquen o no la propiedad a enseñar. El *medio*[2] estará entonces constituido por plantas, lápices, afiches, vestimentas de niños, etc. donde el conocimiento "esté presente" y concretizado.

Cuando el docente prepara la clase, ¿cuáles son las acciones que prevé para sus alumnos? Observar, comparar diferentes objetos, colorear, etc. es decir toda una serie de interacciones con el mundo comunes a un sujeto en la mayoría de las culturas. Hay una propiedad -entre otras que pueden ser "vistas" por los alumnos- que es verdadera en ese *medio* que el docente organizó, y aún si no la enuncia, sabe que esta propiedad está allí. Como él, con sus propios conocimientos, constata esta propiedad, supone que el conocimiento a enseñar (en este caso reconocer el color verde) está al alcance del alumno. Ante una respuesta inadecuada de un alumno, es otro alumno o el maestro quien va a reaccionar.

¿Esta introducción para obtener el aprendizaje del reconocimiento y nombre del color verde es suficiente? En general sí, y salvo en el caso de prácticas muy particulares (un científico, un artista, etc.), este conocimiento del color verde es suficiente a lo largo de la vida de un individuo.

Para mostrar las consecuencias de este tipo de relación, supongamos que entre los alumnos hay uno que es daltónico. ¿Cómo va a distinguir el verde del rojo? Si debe elegir un objeto verde o colorear de este color, y no los distingue, no será su interacción con el *medio* quien va a darle los elementos para hacer una buena elección, sino la sanción de un compañero o del docente. Si ese alumno debe leer un semáforo para cruzar una calle, debe tomar una decisión adecuada. Necesita reconocer esos colores, y lo hará con ayuda de otros modos de control, por ejemplo la posición: arriba está el rojo, abajo el verde.

Este ejemplo muestra, en una situación muy común pero en un caso singular, cómo en esa circunstancia el conocimiento está en la situación pero no es un modo de control del sujeto, y de qué modo es necesario al sujeto para tomar una decisión. Se ve la diferencia que hay entre una propiedad concretizada y una propiedad necesaria a la acción del sujeto. Además, en este caso singular, se evidencia también que el aprendizaje del sujeto se produce por otras condiciones, no previstas en el *medio* organizado por el docente.

Segundo ejemplo: muy pronto, en la escuela elemental, el triángulo y el cuadrado son objetos de enseñanza. Forman parte también de la cultura cotidiana de los niños -al menos en nuestra sociedad- y entonces los niños muy rápidamente pueden reconocerlos y designarlos por su nombre. Esas figuras forman parte del entorno del alumno, en condiciones muy precisas: están en el micro espacio, los triángulos son equiláteros o isósceles, y tanto el cuadrado como el triángulo tienen un lado paralelo al borde superior de la hoja. En un cierto rango de variaciones, los niños pueden reconocerlos y si las figuras no son "típicas[3]" las describen como "torcidas" o "no normales".

[2] En el sentido de Brousseau (1986).
[3] La noción de "prototipos" fue estudiada entre otros por Presmeg (1992).

Un "triángulo torcido" conserva su condición de triángulo, sin embargo un "cuadrado inclinado" se convierte en un rombo. El reconocer algunos polígonos de tres lados como un triángulo es un conocimiento valioso, pero insuficiente en ciertas tareas. Fregona (1994) estudió una situación de comunicación sobre figuras planas, y encontró que niños de 10 y 11 años piensan que un triángulo queda bien determinado dando la longitud de dos de sus lados, como si el ángulo comprendido estuviese necesariamente fijado. Piaget (1981) estudió la construcción de triángulos en un marco más amplio, y plantea que al descubrir que ese ángulo puede variar, se abre un universo a todos los triángulos posibles (si tienen tres lados y tres ángulos, pueden tener los tres lados congruentes, o de a dos, o ninguno, y lo mismo para los ángulos) y entonces para el sujeto el triángulo ya deja de ser el triángulo equilátero que él conoce en su realidad cotidiana.

Las rupturas de contrato en una práctica ostensiva

Estos ejemplos muestran el carácter ilusorio de ciertos presupuestos que subyacen a la presentación ostensiva de las nociones: aunque el *medio* "concretice" un conocimiento a enseñar, la relación del alumno con ese *medio* puede ser completamente diferente de la relación del profesor -que se supone tiene una relación sabia con el objeto de enseñanza.

En la relación didáctica, a menudo esta diferencia en los modos de relación con los objetos de saber se manifiesta como una ruptura de contrato didáctico: el alumno no puede, con esquemas generales -"observar", "repetir", "mirar con atención"- identificar el conocimiento que el profesor quiere presentarle porque los conocimientos disponibles en el profesor son fundamentales para reconocer -en el problema- lo que quiere enseñar. El alumno, para aprender ese saber que está en la mira, necesitaría tomar decisiones específicas. La ostensión fracasa en el aprendizaje, o hay un éxito ilusorio: el alumno dice "sí" pero interactuaba con otra cosa: el conocimiento aprendido es diferente al conocimiento enseñado.

Cuando el alumno no logra "entrar" al objeto "concretizado" por el *medio*, organizado por el profesor, el docente interviene sobre un alumno genérico como si el sujeto hubiera actuado y reflexionado sobre la acción. Allí se producen las rupturas de contrato, que develan las ficciones creadas en torno a las responsabilidades de cada sujeto.

La ilusión de la evidencia: "mostrar" y "hacer ver"

El docente asume el hecho de que al "mostrar" el objeto que realiza el conocimiento que se quiere enseñar, el alumno debe "ver". El docente exige del alumno la comprensión de lo que hasta ese momento es parte de su responsabilidad como docente.

A menudo, los profesores dicen que los alumnos solamente ven los trazados sobre la hoja, y que "(...) son incapaces de re-interpretar esos trazados, de ver por ejemplo una recta allí donde ellos trazaron solamente un lado de un triángulo" (Berthelot y Salin, 1992).

Cuando el profesor muestra, tiene la ilusión de que el alumno ve la misma cosa que él, entonces no trata de hacerle ver algo. Por el contrario, cuando trata de hacer ver es porque reconoce que el alumno no ve, que hay un fracaso en su acto didáctico, que hay una diferencia entre sus interacciones y las del alumno. Entonces, se puede distinguir dos relaciones diferentes cuya caricatura sería:

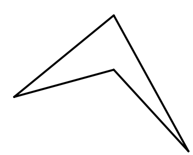
Profesor: Pero yo les hice ver sobre el triángulo...

Alumno: No señor, Ud. nos mostró un triángulo, no nos hizo ver la recta.

El profesor está obligado a actuar de otro modo, en ruptura con el contrato inicial "si yo muestro, se ve". Debe enseñar a "leer" una figura y encuentra, en los manuales, en instrucciones oficiales o en ciertas investigaciones, consejos para enseñar a "ver mejor". La ficción adopta entonces otros matices, pero con esas prácticas no se modifica en profundidad la relación del alumno con el conocimiento.

La ilusión de un repertorio común

¿"Punta" equivale a "vértice"? En una clase de segundo grado, el docente sustituía -con naturalidad- por "vértice" la palabra "punta" utilizada por los alumnos. Los alumnos lo advierten, y vinculan la nueva palabra con "el vértice de una montaña". Esta novedad funcionó bien para designar y reconocer los vértices de polígonos convexos, pero un cuadrilátero no convexo como el de la figura, ¿cuántos vértices tiene?



La mayoría de los alumnos encuentran tres, que son las puntas. Un alumno al recorrer con su dedo los lados de la figura recortada, contó cuatro lados y pudo entonces mostrar los vértices como los lugares donde cambia la dirección. Con ello salvó a la clase, el profesor tomó apoyo en esa observación para "mostrar" que efectivamente el cuadrilátero tiene cuatro vértices. ¿Habrá que partir mostrando los lados? Es posible que en un contexto similar, es decir donde no se inviertan conocimientos específicos, la confusión se dé entre "borde" y "lado".

La ilusión de continuidad entre conocimiento cotidiano - saber científico

El conocimiento cotidiano y el saber científico son formas de relación de un sujeto con un objeto. En las prácticas ostensivas se propone al sujeto una relación con un entorno que le es familiar, cercano a sus preocupaciones y a sus interacciones cotidianas. El docente parece pensar que la relación establecida por esta familiaridad es de la misma naturaleza que el saber sabio, porque el objeto es el mismo.

¿Por qué siente la necesidad de actualizar una relación sabia sobre una relación familiar? ¿Para dar sentido al objeto de conocimiento nuevo? ¿Cómo distinguir los dos tipos de relaciones con el objeto? La situación fundamental va a distinguirlos: solamente el objeto sabio debe poder dar una respuesta adecuada a la situación. No está simplemente presente en el *medio*, sino que está en las decisiones del sujeto.

A modo de conclusión

Las prácticas ostensivas están muy difundidas en la enseñanza, y a pesar de que los mismos docentes reconocen en muchos casos problemas en los aprendizajes y que en resultados de investigación se reconoce su limitado éxito, no pierden vigencia. Hay diferentes hipótesis acerca de posiciones epistemológicas [4] de los docentes para explicar el origen de esas prácticas, pero en ellas no se busca justificar por qué los docentes comparten esa ideología.

Tomando resultados de investigación en torno a estos temas, en el marco de la teoría de las situaciones didácticas, afirmamos que la presentación ostensiva de las nociones matemáticas es un conocimiento disponible en los docentes y que les permite, con ciertos límites, el control de la relación didáctica de una manera estable, pragmáticamente eficaz. Desde esa teoría, un conocimiento está definido para el usuario como la respuesta óptima a una situación dada. Es decir, ante un campo de elecciones posibles, el usuario -en este caso el docente- toma decisiones que ponen de manifiesto este conocimiento -la ostensión- que le da la información necesaria para restringir la incertidumbre que le genera la responsabilidad de llevar a cabo su tarea como enseñante.

Estudios posteriores, siempre en el marco de la teoría de las situaciones didácticas, muestran que los profesores buscan un equilibrio entre prácticas ostensivas y prácticas que exijan la implicación efectiva de los alumnos. (Brousseau, 1995).

En su trayectoria como docentes, los profesores debieron responder a diferentes rupturas de contrato didáctico y saben, por experiencia, que ciertos problemas no van a desaparecer solos y entonces hay que -o hubiera sido necesario en cursos precedentes- hacer algo para superarlos. Intentan entonces superar esas dificultades con acciones que les parecen “naturales” -a menudo ostensivas- sin modificar las condiciones profundas de la relación didáctica. A veces lo logran, otras veces solamente postergan las dificultades para después y otras parecen creer que "así irá mejor". ¿Tienen los docentes herramientas para tratar estas dificultades de un modo más profundo? Creemos que los problemas de difusión de un saber –en este caso, la matemática y los resultados de investigación en educación matemática- es un problema social, y como tal debería ser tratado. Las vinculaciones entre investigación en educación y prácticas de enseñanza son complejas, tal como recientemente lo señalaran Burkhardt y Schoenfeld (2003). Los resultados de la investigación –en la cual los autores no se refieren específicamente a la educación matemática- no parecen incidir de un modo amplio y profundo ni sobre quienes deciden las políticas educativas ni sobre los propios docentes.

[4] Concepciones empiristas del aprendizaje, donde si el conocimiento “está” en el medio finalmente estará disponible para el alumno; o en el mismo sentido suponer que las nociones son exteriores al sujeto y a través de imágenes (coloreadas) se “imprimen” en los niños, acompañadas de expresiones verbales o simbólicas que se repiten un cierto número de veces creyendo que a la larga “va a quedar”; o según Berthelot y Salin (1992), supuestos epistemológicos que llaman “inductivistas”, reforzados por los condicionamientos que pesan sobre la relación didáctica.

Referencias Bibliográficas

Berthelot, R. y Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Disertación doctoral no publicada, Université Bordeaux I, Francia.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des mathématiques 7*(2), 33 – 115.

Brousseau, G. (1990). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? Primera parte. *Enseñanza de las Ciencias 8*(3), 259 – 276.

Brousseau, G. (1991). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? Segunda parte. *Enseñanza de las Ciencias 9*(1), 10 – 21.

Brousseau, G. (1995): L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. En R. Noirfalise y M.J. Perrin-Glorian (Eds.), *Actes de la VIII° Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3 – 46). IREM de Clermont-Ferrand, Francia

Burkhardt, H. y Schoenfeld, A. (2003): Improving Educational Research: Toward a More Useful, More Influential, and Better-Funded Enterprise. *Educational Researcher 32*(9), 3 – 14.

Candela, A., Rockwell, E., Quiroz, R., Mercado, R. y Paradise, R. (s.f.). *La construcción social del conocimiento en el aula: un enfoque etnográfico*. México: DIE-CINVESTAV-IPN

Fregona, D. (1995). *Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie: interactions, contrats et transpositions didactiques*. Disertación doctoral no publicada, Université Bordeaux I, Francia.

Margolinas, C. (1999) Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse des situations d´enseignement. En R. Noirfalise (Ed.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques. Actes de l'université d'été de La Rochelle*. IREM de Clermont Ferrand, Francia.

Mercado, R. (2002). *Los saberes docentes como construcción social. La enseñanza centrada en los niños*. México: Fondo de Cultura Económica.

Piaget, J. (1981). *Le possible et le nécessaire. 1. L'évolution des possibles chez l'enfant*. Francia: Presses Universitaires de France.

Presmeg, N. (1992). Prototypes, Metaphors, Metonymies and Imaginative Rationality in High School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics 23*, 595-610.

Rockwell, E. (1989). *Reflexiones sobre el proceso etnográfico (1982-1985)*. México: DIE-Cinvestav.

Ratsimba-Rajohn, H. (1977). *Etude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques*. Mémoire de D.E.A., IREM de Bordeaux, Francia

Desarrollos Matemáticos en Arquitectura

María Dolores García y José Armando Albert
ITESM, Campus Monterrey y CICATA [1] del IPN
México
mdgarcia@itesm.mx
Epistemología - Nivel Superior

Resumen

Al igual que en otras disciplinas, la formación de Arquitectos se encuentra con el problema del aprendizaje de las matemáticas. Este problema es transferido a los profesores de matemáticas reconociendo que, como docentes de las mismas, podrán saber qué matemáticas requieren los estudiantes y cómo enseñarlas. Se han hecho diversas propuestas didácticas, pero el problema continúa pues no se han tomado en cuenta todos los aspectos que éste involucra: desde las diversas necesidades de matemáticas de estos profesionales, hasta la manera en que ellos se cuestionan el uso de la misma. Este trabajo presenta los avances de un estudio sistémico que se está realizando para abordar el problema. En particular, se presenta la problemática y se analizan algunos desarrollos matemáticos fundamentales en el contexto de la evolución de la Arquitectura.

Antecedentes

En la actualidad hay un fuerte reclamo de las áreas de Arquitectura y el Diseño Industrial por una revisión del currículo de matemáticas que se ofrece a los estudiantes de estas áreas en el Nivel Universitario. Se oyen voces al respecto tanto de los profesionales de Arquitectura como de los profesores y alumnos, incluyendo los mismos profesores de matemáticas. Se pudo constatar que esto ocurre no sólo en nuestra localidad y en nuestro país sino también a nivel Internacional.

Estos reclamos han producido cambios en los programas curriculares, los que, en muchas escuelas, concluyen con la eliminación de los cursos de cálculo diferencial e integral, como ocurrió en la Universidad Jorge Tadeo Lozano en Bogotá, Colombia, (Cubillos, 2004)[2]. En esta universidad se han oficializado los cursos de Geometría Descriptiva I y II dentro del área de ciencias básicas de su Universidad y han decidido que esta geometría sea la matemática que requieren los estudiantes de Arquitectura y Diseño Industrial. En la Facultad de Arquitectura de París[3] hubo graves dificultades con los alumnos quienes no lograban el aprendizaje de las matemáticas del nivel superior - como el cálculo diferencial e integral, entre otros -. Por tal motivo se demandó al Ministerio de Educación eliminar las matemáticas de los programas. Lo único que sobrevive, al igual que la Universidad colombiana antes mencionada, es la Geometría descriptiva (March, 2004)[4].

---

[1] Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada
[2] Cubillos, S. "Modelación geométrica en el espacio bi y tridimensional de un dodecaedro." Conferencia. Segundo Congreso Internacional Iberocabri 2004. Saltillo. 2 de junio de 2004.
[3] École d'architecture, Paris Val de Seine, http://www.paris-valdeseine.archi.fr/
[4] March, R. "Geometría y arquitectura: modelación de las formas constructivistas con Cabri." Conferencia. Segundo Congreso Internacional Iberocabri 2004. Saltillo. 4 de junio de 2004.

En México, la problemática del aprendizaje de las matemáticas en la Arquitectura está también viva. Desde hace varios años, maestros de diversas instituciones han intentado ubicarla y abordarla. Por ejemplo, en la Escuela de Ingeniería y Arquitectura del IPN, que aunque los alumnos debieran estar manejando conceptos del Cálculo Diferencial e Integral, de hecho los están evadiendo, entre otras causas, por sus grandes dificultades en temas básicos de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría.

Muchas Escuelas de Arquitectura han reducido el cálculo a tablas y fórmulas con las que se apoyan para manejar los temas básicos, incluso en el área de estructuras. Se observa la tendencia a depositar la matemática en tablas, de las cuales hacen uso frecuente, pero sin saber cómo modificar éstas o porqué surgen, lo cual los lleva al uso permanente de reglas por mera algoritmia con poco margen para saber adaptar y ser creativos en este aspecto.

Monrroy (2000) publicó un texto: *Matemáticas para el Diseño. Introducción a la Teoría de la simetría*, donde se perfila que hay un problema que no es sencillo de resolver. Aboga más por el uso de la tecnología como una herramienta útil en el Diseño y, se desarrolla principalmente alrededor de la Teoría de Grupos. El autor nos describe el problema de la siguiente manera:

> *"Un problema central en la enseñanza universitaria del diseño ha sido el definir la Matemática adecuada que el estudiante y futuro profesional del Diseño debe tener en su currículo. Esta discusión está lejos de resolverse. Me atrevo a afirmar que en la mayoría de las Escuelas de Diseño y Arquitectura, aún no se ha detectado cabalmente dicha problemática".* (Monrroy, 2000).

Se ve mencionada una situación por demás real, pues, como se ha observado arriba, las fuertes dificultades que se tienen en el aprendizaje del cálculo están llevando a eliminarlo de los programas curriculares. Sin embargo, se está sustituyendo por diversos elementos más bien geométricos, de acuerdo a la perspectiva de cada autor.

Existen actualmente cursos innovadores de la enseñanza y aprendizaje de matemáticas superiores, pero suelen estar dirigidos hacia ingeniería. Los estudiantes de Arquitectura y Diseño han participado, pero no ha resultado exitoso para ellos, aunque sí pueda serlo para ingeniería. Tal es el caso de cursos de cálculo diferencial e integral en algunos Campus del Tecnológico de Monterrey basados en análisis epistemológicos previos y en el contexto de la física, por ser ésta quien da origen a gran parte de las ideas esenciales del cálculo. Sin embargo, los estudiantes de Arquitectura demandan continuamente un contexto más cercano a la Arquitectura y Diseño. En el año 2001, se inicia esta investigación que pretende hacer una reforma del curso de matemáticas para Arquitectura y Diseño con base a un mayor énfasis a los aspectos de visualización que le son más propios y con los que está más familiarizado el estudiante de Arquitectura para construir ideas fundamentales de la matemática, entre otros elementos.

La Problemática

Los estudiantes de arquitectura no están teniendo éxito en los cursos de matemáticas para ingeniería no sólo por sus deficiencias en sus matemáticas previamente estudiadas sino, entre otras cosas, por su gran necesidad de motivación permanente manifiesta no sólo de sentir éxito en las matemáticas, sino que éstas estén fuertemente vinculadas a sus prácticas y usos profesionales en Arquitectura. En la actual oferta de cursos de matemáticas, éstos no están desarrollados en el contexto de la Arquitectura y Diseño.

La problemática se ve agudizada por una fuerte tendencia a excluir las matemáticas del currículo: un porcentaje considerable de profesores de Arquitectura y de profesionales de la misma mencionan no utilizar la matemática (aunque de hecho sí lo hagan en mayor o menor grado) en sus trabajos. Contraria a esta tendencia, también hay grupos conformados por profesores de Arquitectura y profesionales de la misma y aquellos grupos de investigadores en Arquitectura (p. ej. los grupos Nexos [5], Maydi [6]), que demandan el uso de la matemática como un elemento necesario tanto en la formación de los estudiantes de Arquitectura, como para el pleno desarrollo profesional de su disciplina. De acuerdo a los trabajos que presentan en congresos sobre el tema de Matemáticas para Arquitectura, esos elementos matemáticos van desde la aritmética básica hasta elementos de matemáticas avanzadas como la Topología, así que el determinar qué es lo que se requiere en los niveles universitarios nos plantea un amplio estudio.

Problema de investigación

En el marco de la problemática antes expuesta, esta investigación pretende aportar en un aspecto de la misma: ahondar en las ideas fundamentales de las matemáticas que están muy vinculadas con el desarrollo histórico de la Arquitectura con el propósito de aportar al problema de *qué matemática enseñar* en carrera de Arquitectura. Se pretende también elegir una de las ideas matemáticas fundamentales para la Arquitectura que un estudio posterior pueda dársele seguimiento y aportar al *cómo enseñar* a través de darle seguimiento desde su transposición hasta cómo se construye y desarrolla en el aula.

Antecedentes teóricos

Se aborda la investigación principalmente desde la perspectiva de la Ingeniería Didáctica (Peltier, 1993; Artigue, 1995) entendida como una metodología organizadora de elementos de varias teorías tales como la Transposición Didáctica (Chevallard, 1991), Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997), Campos conceptuales (Vergnaud, 1990) y también otras aportaciones teóricas como la del Enfoque Socioepistemológico (Cantoral, 2004) que permitan considerar las prácticas sociales de la Arquitectura involucradas con ideas matemáticas como otra fuente de aportaciones para la comprensión del aprendizaje y el diseño de situaciones para el aula.

Metodología

En el marco metodológico de la Ingeniería Didáctica, entendida como se describe en el apartado anterior, esta investigación profundiza en el desarrollo de conceptos matemáticos a través de la relación histórica Matemáticas-Arquitectura como parte de la componente epistemológica del Análisis preliminar.

[5] Que publican sus resultados en: http://www.nexusjournal.com

[6] The mathematics & design association en: http://www.maydi.org.ar/

Análisis epistemológico

En el estudio del desarrollo histórico de las Matemáticas en la Arquitectura, identificamos cuatro ideas fundamentales, entendidas como categorías de análisis, las cuales se observan a través de las prácticas matemáticas en la Arquitectura y en su evolución histórica: Medida, Proporción, Espacio geométrico y Optimización de espacios y recursos.

Continuamente la Historia de la matemática sugiere que las necesidades de sobrevivencia así como los rituales del ser humano son las que hacen surgir y desarrollarse a la matemática. Boyer (1968) nos habla del origen de la matemática como un desarrollo de los conceptos de número, magnitud y forma. No es extraño que en Arquitectura estos elementos se encuentren como fuertes elementos base desde sus orígenes hasta nuestros días.

Medida

La idea de *medida* se sitúa como parte fundamental en la Arquitectura. Es el elemento que, de inicio, permite al hombre delimitar el espacio, tomando una magnitud una cantidad de éste para darle forma a su espacio.

> *El hombre primitivo ha detenido su carro, decide que este será su suelo. Elige un claro, abate los árboles demasiado cercanos, allana el terreno de los alrededores. . . Planta las estacas que han de sostener su tienda. . . Los hombres de la tribu han decidido albergar a su Dios. Lo colocan en un lugar de espacio bien ordenado. . . Hay medidas. Para construir bien, para repartir bien los esfuerzos, para lograr la solidez y la utilidad de la obra, las medidas condicionan todo.* (Le Corbusier, 1978)

Encontramos en este texto de Le Corbusier una idea de la primaria necesidad de medida, que ha regido y rige en toda construcción realizada o proyecto por realizarse, para organizar su entorno.

La medida, con sus diversas unidades surge en la Arquitectura como un elemento necesario para la toma de espacios en la naturaleza. Se encontró que a lo largo de la historia ha habido diversas unidades de medida. De acuerdo a la Arquitectura, que busca armonizar al hombre con la naturaleza, las primeras medidas tomaban sus unidades de la longitud de partes de los cuerpos humanos, como son brazos, piernas, pie, que podemos encontrar en escritos y diseños actuales.

Estas magnitudes cambian a lo largo de la historia, de los sitios donde son ocupados, de la astronomía local, etc. Podemos observar así, que en la gran pirámide – la pirámide de Keops- se utilizó como unidad, el codo sagrado o metro piramidal, el cual se obtiene con la siguiente razón:

$$\frac{2a}{365.242} = \frac{232.805}{365.242} = 0.6373991,$$

donde $2a$ representa la longitud del cuadrado de la base de la pirámide y 365.242 el número de días del año (Ghyka, 1953).

Con respecto a la introducción del metro, como unidad de medida, Le Corbusier menciona:

> *La Revolución Francesa destronó los pies y las pulgadas y sus lentos y complicados cálculos; pero era necesario encontrar otro modelo. Los sabios de la convención adoptaron otra medida concreta tan despersonalizada y tan desapasionada que se convertía en una abstracción, en una entidad simbólica: el metro, la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre. El metro fue adoptado por una sociedad empapada de novedades.*

Se puede observar que la idea de unidad de medida ha sido relacionada con otras magnitudes, ya no sólo hay medidas relativas al cuerpo, las unidades de medida ahora se refieren al entorno, se fijan en referencia a él. Este dato es muy importante en la Arquitectura pues de ahora en adelante se observa que tomará sus medidas, bajo diversas unidades, pero restringiéndose o tomando como referencia a otras.

Se encontró que en Arquitectura la idea de medida propia es algo tan fuerte que para tener las unidades precisas de acuerdo al diseño, continuamente los Arquitectos reclaman la necesidad de la misma, así vemos a Le Corbusier, construyendo su modulor, sistema de medidas que, en su diseño, demandó el uso de la sección áurea. Bishpam (2004) menciona que tradicionalmente grupos diversos en Inglaterra construyen su modulor– bloques de madera con diversos cortes a modo de escalas- el cual en unión con una regla no graduada utilizan para elaborar sus diseños.

El desarrollo de la idea de medida permitió el surgimiento de otra de las grandes ideas matemáticas vinculadas con la Arquitectura: la idea de proporción.

Proporción

Otra idea fundamental es la de *proporción*. Ésta se encuentra a lo largo de la historia de la Arquitectura, desde la idea básica que busca belleza, mediante el uso de la sección áurea, hasta para el cambio de unidades en la medición con diversas escalas, asimismo, podemos verla en el manejo de las pendientes en las construcciones, actuales y antiguas: Un problema esencial en la construcción de las pirámides era el de mantener la misma pendiente en los cuatro lados de la pirámide y la misma en todos. Boyer (1968) menciona que puede ser este el problema que dio pié a la construcción de un concepto equivalente al de la cotangente de un ángulo. Tomaban algo llamado *seqt* que calculaba la razón entre el avance y la subida, el recíproco de la actual pendiente, que significaba la separación horizontal de una recta oblicua del eje vertical por una unidad de variación en la altura. Esto es equivalente al desplome que, en la actualidad, usan los arquitectos para medir la pendiente hacia el interior de un muro.

Una de las proporciones más manejadas a lo largo de la historia de la arquitectura y que tiene que ver con la armonía y belleza captada por el ojo humano es la que se presenta con la sección áurea, se encuentra en las construcciones de las pirámides, en los edificios de la antigua Grecia, en grandes edificios neoyorquinos, etc.

La división de un segmento de línea recta AB en un punto C entre A y B de tal forma que se cumpla que: el segmento completo sea al mayor como el mayor es al menor, llevó a los antiguos griegos al reconocimiento de un número que da armonía y belleza a los objetos, este es el número de oro, sección áurea o divina proporción como la nombra Luca Pacioli ya en el renacimiento.

La sección áurea tiene diversas construcciones geométricas que los diseñadores manejan con regla y compás, además, tiene la característica de desarrollar sus potencias como una serie tanto geométrica como aritmética pues, si representamos al número de oro con la letra griega phi, como: $\phi = 1.618$, veremos que cumple con: $\phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}$.

Espacio geométrico

Vera Spinadel[7], menciona a la *geometría* como un elemento indispensable para la organización del espacio y el conocimiento de las formas espaciales ya que estas son elementos necesarios para expresar mensajes arquitectónicos de mejor calidad. Un caso en la Arquitectura moderna se encuentra en la obra de Gaudí quien, de acuerdo a Crippa, M. (2003), atribuía gran importancia a la geometría como instrumento de conocimiento y proyección. Tomaba los elementos de la naturaleza y manejaba sus formas geométricas, volumen, superficie, etc. para hacer una arquitectura que califica su trabajo, de acuerdo a los expertos, de obra maestra.

Optimización de espacios y recursos

En el proceso de construcción de toda obra producto del ser humano entra el manejo de los recursos, pues como menciona Salazar (1995) tanto la técnica con que se realizará la obra como el tiempo que tomará la realización de la misma están supeditados al costo de la obra, por lo que es necesario un análisis que lleve a un balance entre el *qué* el *cuánto* y el *cómo* se manejarán los recursos. Entra en juego aquí la optimización matemática de los mismos.

Conclusiones

Se han construido diversos cursos de matemáticas para Arquitectura desde los contenidos tradicionales para ingeniería. Sin embargo, han aportado poco a resolver la problemática del aprendizaje de matemáticas en la formación de arquitectos y diseñadores, e incluso la han complicado o la han limitado, como aquellos que sólo manejan la geometría descriptiva. Por eso se hace urgente abordar este problema desde la actividad interna de la Arquitectura para responder al *qué y al cómo enseñar matemáticas* a los futuros arquitectos. Pero, por su complejidad, esto no puede basarse sólo en buena voluntad sino en investigación científica que le dé sustento. Este proyecto intenta incursionar en ello y como se puede ver en sus avances del análisis epistemológico, hay una multitud de conocimientos que pueden ser muy valiosos para los arquitectos y que, como están vinculados desde el quehacer mismo de la arquitectura, pueden resultar mucho más atractivos para los estudiantes. Y de entre estos conocimientos, nos parece de especial interés uno: la proporción, para hacer un mejor acercamiento y profundización dado que es una de las ideas matemáticas más fecundas en Arquitectura.

[7] En el foro ubicado en: http://www.nexusjournal.com/Query04-WhyVsHow.html, en el cual se aborda la pregunta: Why is mathematics used in architecture?

Referencias Bibliográficas

Artigue, M (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gomez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bispham, M. (2004). The rod Method: Traditional Numberless Design and Layout. En K. Williams y F. Delgado (Eds.), *Nexus V Architecture and Mathematics*. Florence, Italy: Kim Williams Books. 43 – 55.

Boyer, C. (1968). *Historia de la Matemática.* (M. Martínez, Trad.). Madrid, España: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Melbourne, Australia: Kluwer Academic Publishers.

Cantoral, R. & Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. Cd. de México, México: Thomson.

Corbusier, L. (1964). *Hacia una Arquitectura.* Buenos Aires, Argentina: Editorial Poseidón.

Crippa, M. A. (2003). *Gaudí. De la naturaleza a la Arquitectura*. Bonn, Alemania: Taschen.

Chevalard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* (C. Gilman, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor.

Ghyka, M. (1953). *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Poseidón.

Monroy, F. (2000). *Matemáticas para el Diseño. Introducción a la Teoría de la Simetría*. Cd. de México, México: Limusa, Noriega Editores.

Salazar, S. (1995). *Costo y tiempo en edificación*. Cd. de México, México: Editorial Limusa.

Vergnaud, G. (1990). La Théorie des champs conceptuals. *Recherches en Didactique des Mathématiques 10* (2/3), 133 – 170.

Conflictos Epistémicos en un Proceso de Estudio de la Noción de Función. Implicaciones para la Formación de Profesores

Juan D. Godino, Miguel R. Wilhelmi y Delisa Bencomo
Universidad de Granada, Universidad Pública de Navarra y Universidad Nacional Experimental de Guayana
España y Venezuela
jgodino@ugr.es
Gráficas y funciones – Nivel Superior

Resumen

La intención última de la investigación en didáctica de las matemáticas (DM) es encontrar dispositivos "idóneos" para la enseñanza y el aprendizaje de nociones, procesos y significados de objetos matemáticos. De esta manera, un objetivo para la DM debe ser la descripción y la valoración de la pertinencia de un proceso de instrucción matemática efectivo; asimismo, es necesario determinar pautas para la mejora del diseño y la implementación de procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. Estas implicaciones para la docencia no tienen carácter normativo o técnico (obtención de un listado de prescripciones "a ejecutar"), sino explicativo. En este trabajo analizamos la idoneidad de la dimensión epistémica de un proceso de instrucción sobre la noción de función con estudiantes universitarios.

Criterios de idoneidad de un proceso de instrucción matemática

La intención última de la investigación didáctica es encontrar dispositivos "óptimos" para la enseñanza y el aprendizaje de nociones, procesos y significados de objetos matemáticos, teniendo en cuenta las restricciones institucionales de las dimensiones cognitiva, epistémica e instruccional. La *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989) articula el papel de las producciones de los investigadores con las necesidades de acción en los procesos de enseñanza, permitiendo la evolución de una didáctica explicativa hacia una didáctica normativa o técnica (apoyada en una teoría y contrastada experimentalmente). Esta evolución es compleja y costosa, por supuesto. Pero además, la aplicación de los productos técnicos está mediatizada por la formación matemática y didáctica de los profesores, que son quienes en última instancia deben poner en marcha dichos recursos. Por ello, es necesario poder valorar la práctica docente de los profesores y, a partir de esta valoración, determinar pautas para la mejora del diseño y de la implementación de procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos.

El objetivo en este trabajo es, pues, en cierta forma, inverso al de la ingeniería didáctica: partiendo de realizaciones efectivas[1], evaluar la idoneidad y pertinencia de un proceso de instrucción matemática. Apoyándonos en la propuesta elaborada por Godino (2003) proponemos evaluar la idoneidad de los procesos de instrucción matemática según tres criterios:

---

[1] Por realizaciones efectivas nos referimos tanto a la actividad matemática desarrollada por los estudiantes como a las acciones reguladoras, normativas o de institucionalización realizadas por el profesor en un proceso de estudio que ya ha tenido lugar.

1. *Idoneidad epistémica*: adaptación entre los significados institucionales implementado y de referencia, que, en particular, supondría la elaboración de una transposición didáctica *viable* (capaz de adaptar el significado implementado al pretendido) y *pertinente* (capaz de adaptar el significado pretendido al de referencia).

2. *Idoneidad cognitiva*: el "material de aprendizaje" está en la *zona de desarrollo potencial* (Vygotski, 1934) de los alumnos; con otras palabras, que el desfase entre los significados institucionales implementados y los significados personales iniciales sea el máximo abordable teniendo en cuenta las restricciones cognitivas de los alumnos y los recursos humanos, materiales y temporales disponibles[2].

3. *Idoneidad instruccional*: las configuraciones y trayectorias didácticas posibilitan que el profesor o los alumnos identifiquen conflictos semióticos *potenciales* (*a priori*), *efectivos* (durante el proceso de instrucción) y *residuales* (*a posteriori*), para resolver dichos conflictos mediante la *negociación de significados* (utilizando los recursos disponibles, que determinan restricciones institucionales de carácter matemático y didáctico).

Vamos a aplicar y desarrollar estas nociones al análisis de la idoneidad de un proceso de instrucción sobre la noción de función para un grupo de estudiantes universitarios de primer curso de ingeniería. La pertinencia del análisis de este caso se fundamenta en su representatividad de un tipo de comportamiento instruccional más general implementado según un enfoque "constructivista ingenuo".

Para cumplir los objetivos esbozados, en la sección 2 describimos el proceso instruccional observado; en la sección 3, introducimos la noción de conflicto epistémico; en la sección 4 discutimos la idoneidad de la dimensión epistémica del proceso instruccional; y, por último, en la sección 5, hacemos una breve síntesis del estudio realizado y resaltamos algunas implicaciones del mismo.

Descripción del proceso instruccional observado

El objetivo de la enseñanza observada consiste en que los estudiantes recuerden, interpreten y formalicen las definiciones de correspondencia, función, rango, dominio y tipos de funciones, aplicándolas en una situación que pone en juego conocimientos de la física: el lanzamiento vertical hacia arriba de una pelota con una velocidad inicial (tabla 1). Se supone que los alumnos han estudiado previamente las definiciones de dichas nociones y se acepta que la tarea matemática es un "ejercicio de aplicación". Implícitamente, el profesor presupone que los estudiantes son capaces de interpretar estas definiciones, de realizar una *generalización disyuntiva* (Tall, 1991, p.12) y, de esta forma, identificar los componentes esenciales de la función parabólica que modeliza la situación física y utilizar el significado aprendido como instrumento para la realización de la tarea propuesta.

[2] En el análisis de la dimensión cognitiva es preciso tener en cuenta los procesos sociales de construcción y comunicación de los objetos matemáticos. Las restricciones institucionales (de personal, materiales y de tiempo) determinan un marco para el análisis y la determinación de la dimensión cognitiva: "lo cognitivo" no es sinónimo de "proceso mental".

Se arroja una pelota directamente hacia arriba con una velocidad v_0 por lo que su altura t segundos después, es $y(t) = v_0 \cdot t - g \cdot t^2 / 2$ metros, donde g es la aceleración de la gravedad. Si se lanza la pelota con una velocidad de 32 m / s y $g = 10\ m / s^2$ (aprox.):

1. Determinen la altura máxima que alcanza la pelota, construyendo la gráfica de $y(t)$.
2. ¿Es $y(t)$ una relación o una función? Si es una función, ¿cuál es su dominio, codominio y rango?
3. ¿Es $y(t)$ una función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva?
4. Si $w(t) = 10 - 2t$ es la velocidad de desintegración de la pelota, ¿a qué altura llegará, ahora, al cabo de tres (3) segundos? Calcule la función compuesta $(y \lceil w)(3)$.
5. Al cabo de cuanto tiempo regresará la pelota al lanzarla con una velocidad de 32 m / s?
6. ¿Qué velocidad hay que dar a la pelota para que alcance una altura máxima de 100 m.
7. ¿Qué altura alcanzará la pelota y qué velocidad hay que imprimirle para que regrese a los seis segundos?

Tabla 1: Cuestiones propuestas a los estudiantes

Para trabajar las cuestiones propuestas se dedicaron cuatro clases de 45 minutos. El profesor organizó el proceso de estudio dividiendo la clase en equipos de cuatro alumnos, asignando a cada uno de ellos una parte de la tarea. Un alumno de cada grupo explicó al resto de la clase la solución encontrada en el seno del grupo. El profesor completaba o corregía la explicación del alumno. La *trayectoria didáctica implementada*, es decir, la secuencia de modos de gestión de los significados implementados a propósito de un objeto matemático específico (modelización de una situación física mediante una función), incluye, por tanto, configuraciones de tipo *cooperativo*, *dialógico* y *magistral* (Godino, 2003, pp.202–204).

Conflictos epistémicos en un proceso de instrucción matemática

Para valorar la idoneidad y pertinencia de un proceso de estudio matemático tenemos en cuenta tres dimensiones: *epistémica* (relativa a los significados institucionales), *cognitiva* (relativa a los significados personales) e *instruccional* (relativa a las intervenciones del director de estudio y a la disponibilidad y utilización de recursos materiales y de tiempo).

Un proceso de instrucción es idóneo desde el punto de vista epistémico si el significado implementado es fiel al significado pretendido y éste, a su vez, lo es al de referencia. En muchas ocasiones, en un proceso de estudio matemático, es posible identificar algún desajuste fundamental entre los significados institucionales de referencia y pretendido con el implementado, que no han sido previstas *a priori* como constituyentes del proceso instruccional y que representan decisiones didácticas desafortunadas[3]. Llamamos *conflictos epistémicos* a todos estos desajustes, los cuales condicionan el proceso de estudio y los aprendizajes de los estudiantes[4].

[3] Estas decisiones son de tres tipos según el agente gestor del significado: el *director de estudio* (en la implementación del significado institucional), la *institución* (en la determinación del significado pretendido a partir del de referencia), la *noosfera* (en la identificación del significado de referencia a partir del significado cultural asociado al objeto matemático —noción, propiedad, argumento, etc.).

[4] De manera similar, teniendo en cuenta la definición de idoneidad de cada una de las dimensiones, se define “conflictos *cognitivo*” y “conflicto *instruccional*”.

La valoración de la idoneidad de un proceso de instrucción matemática requiere disponer de información detallada de los hechos que ocurren y elementos de referencia que autoricen a emitir los juicios de adaptación, pertinencia o eficacia correspondientes a la dimensión evaluada. Uno de los objetivos de la modelización mediante procesos estocásticos y sus correspondientes estados que propone Godino (2003) es ayudar a identificar conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales, que son origen de desajustes entre el diseño del proceso instruccional y su puesta en escena. La identificación de estos conflictos y su descripción permite emitir un juicio de valor sobre la idoneidad de un proceso de instrucción matemática.

La valoración de la idoneidad de un proceso instruccional requiere registrar un complejo de informaciones sobre el estado y evolución de los distintos componentes y dimensiones que lo definen. Es necesario, por tanto, usar diversos métodos y técnicas de observación, registro y medida de datos (cuestionarios, entrevistas, grabaciones audio-visuales, etc.) y determinar los estados cognitivos de los estudiantes en diferentes momentos del proceso instruccional.

Los datos de que disponemos para el análisis del proceso instruccional que usamos como ejemplo ilustrativo son: por un lado, el programa general de la asignatura y libros de texto recomendados (*significado institucional de referencia local*); por otro lado, la guía de tareas a realizar (*significado institucional pretendido*); y, por último, la grabación audio-visual del desarrollo de las cuatro clases (*significado institucional implementado*). Basándonos en este material, y utilizando la metodología descrita en Godino (2003), analizamos la idoneidad epistémica del proceso instruccional observado.

Idoneidad epistémica

Tipos de conflictos epistémicos

Según la especificidad del conflicto epistémico con relación al sistema de prácticas operativas y discursivas relativas al objeto matemático que se desea introducir o desarrollar, los conflictos los clasificamos en generales y específicos. Se tiene un *conflicto epistémico general* cuando se refiere a un proceso matemático (definición, demostración, interpretación, etc.) no específico de la clase de problemas de la que emerge el objeto. En caso contrario, llamamos *específico* al conflicto epistémico.

La identificación de un conflicto, general o específico, supone la observación de un desajuste fundamental entre dos *entidades praxémicas* (problemas o acciones), entre dos *entidades discursivas* (conceptos, propiedades o argumentos) o entre dos *juegos de lenguaje* que se introducen o desarrollan en dos marcos institucionales relacionados. Estos desajustes se identifican en la utilización (*acción*), la construcción (*acciones-argumentaciones*) y la comunicación (*lenguaje-argumentación*) de nociones, proposiciones y problemas. De hecho, los problemas, acciones, lenguaje, nociones, proposiciones y argumentos (como entidades constituyentes de los significados institucionales y personales) son los *observables* que permiten hacer operativos los criterios de idoneidad y, por lo tanto, valorar un proceso instruccional. Además, estos desajustes se pueden describir en términos de las cinco *facetas cognitivas duales*: personal -

institucional, ejemplar - tipo, ostensivo - no ostensivo, elemental - sistémico, expresión - contenido [5]

En la trayectoria epistémica se distinguen secuencias en las cuales existen conflictos epistémicos, que no obedecen a intervenciones establecidas a priori por el profesor y cuyo objetivo podría ser que los estudiantes superaran un *obstáculo cognitivo* o *epistemológico*. A modo de ejemplo, identificaremos dos conflictos en la experiencia observada.

Dos ejemplos de conflictos epistémicos

Conflicto 1: pretendido-implementado, específico, problema y ejemplar-tipo

El principal conflicto epistémico es la relación que se establece entre la elección y formulación de la tarea matemática propuesta a los alumnos para el estudio de la noción de función y el uso que se hace de la misma (dentro del proceso de estudio): se plantea una problemática de naturaleza formal-discursiva que es ajena al problema de modelización.

Teniendo en cuenta la clasificación de los conflictos introducida, este conflicto queda identificado por los cuatro descriptores siguientes: *pretendido-implementado* (puesto que se produce en este momento del proceso adaptativo de los significados institucionales), *específico* (porque es consustancial a la tarea solicitada), *problema* (la principal entidad primaria involucrada es la situación propuesta) y *ejemplar-tipo* (la función cuadrática es representativa de la noción genérica de función; el profesor acepta, implícitamente, que la transferencia del caso particular a la noción formal de función es transparente).

Conflicto 2: de referencia-pretendido, general, propiedades y ejemplar-tipo

P: " Una correspondencia. No puede ser función. Esto es una correspondencia".

Toda función es una correspondencia; de la misma forma que todo cuadrado es un rectángulo o que toda sucesión es una función. La práctica matemática tiende a identificar con el nombre la característica que discrimina al objeto dentro de una clase más amplia. De esta forma, se fuerza en el lenguaje la exclusión de familias de objetos contenidos en clases más extensas: "es una función, no una correspondencia", "es un cuadrado, no un rectángulo", "es una sucesión, no una función", etc.

De manera más propia debiera decirse: "es una función, un tipo particular de correspondencia", "es un cuadrado, un tipo particular de rectángulo", "es una sucesión, un tipo particular de función", etc.

El conflicto queda identificado con los descriptores siguientes: *de referencia-pretendido* (el significado pretendido establece la siguiente afirmación categórica: el conjunto de las funciones y el de las correspondencias son disjuntos), *general* (se excluye a una clase de objetos identificada —funciones— del resto de objetos del universo de referencia —correspondencias), *propiedad* (para identificar una clase de objetos —funciones— dentro de una clase más amplia —correspondencias— se utiliza una única característica necesaria —si

[5] De esta forma, los conflictos se pueden clasificar, al menos de forma teórica, en 120 tipos diferentes (no disjuntos entre ellos).

$f(a) = b$ y $f(a) = b'$, entonces $b = b'$ — que no es suficiente) y *ejemplar-tipo* (la función es un ejemplar de una clase más amplia denominada correspondencia).

Reflexiones e implicaciones

Desde el punto de vista educativo, no es suficiente un conocimiento formal del objeto función, centrado en el componente discursivo; el diseño de las tareas instruccionales y la implementación de una *trayectoria didáctica* idónea requiere del profesor un conocimiento profundo de los diversos significados de los objetos matemáticos.

El análisis de la dimensión epistémica que hemos realizado del proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción de función ha mostrado la utilidad y pertinencia de las herramientas teóricas aplicadas. La noción de idoneidad didáctica, y sus tres dimensiones principales —epistémica, cognitiva e instruccional (Godino, 2003; Wilhelmi, Bencomo y Godino, 2004)— permite centrar la atención del análisis didáctico en las interacciones entre los significados institucionales y personales, en el contexto de un proyecto educativo. La comparación entre el significado de referencia de la noción de función y algunos elementos del significado implementado en el proceso instruccional nos ha permitido identificar las concordancias y desajustes (conflictos epistémicos) entre ambos significados, y por tanto, valorar el grado de idoneidad epistémica.

Teniendo en cuenta los conflictos epistémicos identificados podemos valorar la idoneidad epistémica del proceso de estudio observado como "mejorable". El desarrollo del proceso de estudio ha tenido numerosos puntos críticos cuando se ha abordado la discriminación del modelo formal de función (correspondencia entre conjuntos) y las relaciones entre este modelo con los modelos tabular, gráfico y expresión analítica. No obstante, nos parece adecuado comenzar con cuestiones de predicción, como motivación primaria de la función, usando el lenguaje gráfico ("*Determinar la altura máxima que alcanza la pelota, construyendo la gráfica de* $y(t)$").

El análisis epistemológico de los objetos matemáticos, realizado con un enfoque y herramientas conceptuales apropiadas, debe ser un objetivo esencial en la formación del profesor de matemática. Las descripciones y las interpretaciones que hemos realizado de los mismos, usando algunas nociones de la Teoría de las Funciones Semióticas (Godino, 2003), tienen consecuencias para la formación de profesores. Es necesario que los profesores planifiquen la enseñanza teniendo en cuenta los significados institucionales que se pretenden estudiar, adoptando para los mismos una visión amplia, no reducida a los aspectos discursivos (idoneidad epistémica). Asimismo, es necesario diseñar e implementar una trayectoria didáctica que tenga en cuenta los conocimientos iniciales de los estudiantes (idoneidad cognitiva), identificar y resolver los conflictos semióticos que aparecen en todo proceso de estudio, empleando los recursos materiales y temporales necesarios (idoneidad instruccional). Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de pertinencia (adecuación al proyecto de enseñanza) de un proceso de instrucción, cuyo indicador empírico puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos.

Reconocimiento

Este trabajo se ha realizado en el marco de los proyectos: MCYT-BSO2002-02452, Resolución nº1.109/2003 de 13-octubre de la UPNA y MCYT-HA2002-0069.

Referencias Bibliográficas

Artigue, M. (1989). Ingenierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 9*(3), 281–308.

Godino, J.D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Obtenido en mayo 15, 2005, del sitio web de la Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática: http://www.ugr.es/local/jgodino

Tall, D. (Ed.) (1991). *Avanced mathematical thinking*. Dordrech, Holanda: Kluwer.

Vygotski, L.S. (1989). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores* (2a. ed.). Barcelona, España: Crítica-Grijalbo. (Trabajo original publicado en 1934).

Wilhelmi, M.R., Bencomo, D. y Godino, J.D. (2004). *Criterios de idoneidad de un proceso de instrucción matemática*. Documento presentado en el XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza de la Matemática. Universitat Jaume I y RSME, Castellón, España.

Significados Institucionales y Personales de las Fracciones en Educación Básica

Juviry González y Mario Arrieche
Universidad Pedagógica Experimental Libertador-Maracay
Venezuela
marrieche@ipmar.upel.edu.ve
Formación de profesores – Nivel Medio

Resumen

Este trabajo está centrado en la caracterización de los significados institucionales y personales de las fracciones en el contexto de la Educación Básica, tomando como marco el modelo teórico semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de la matemática propuesto por Godino y Batanero (1994), el cual tiene como clave la noción de significado y que busca relacionar y articular las facetas epistemológicas, cognitivas e instruccionales puestas en juego en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en cualquiera de los niveles educativos existentes.

Introducción

Uno de los contenidos matemáticos en el cual se ve reflejada la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, es el tema de las fracciones y muy especialmente en el contexto de la Educación Básica. Es por ello que ha surgido la inquietud y la necesidad de realizar una investigación que proporcione una ayuda en mejora de esta problemática, donde el objetivo general se orienta hacia la caracterización de los significados institucionales y personales de las fracciones en el contexto de la Educación Básica. Por cuestiones de espacio describimos en forma breve la génesis del problema, los objetivos, el marco teórico y la metodología de la investigación.

Génesis del Problema

El tema de investigación que se propone abordar en este estudio surgió de dos intereses complementarios, por una parte las diversas situaciones vividas por la autora en su experiencia en la enseñanza de las fracciones en el contexto de la Educación Básica, y por el otro el interés del tutor de poner en funcionamiento algunas nociones del modelo teórico para la investigación en didáctica de la matemática, denominado Semiótico-antropológico, propuesto por Godino y Batanero (1994) y usado por Arrieche (2002), Font (2000), entre otros.
Específicamente sobre el tema de las fracciones, Dávila (1992) indica que la problemática acerca de la enseñanza y el aprendizaje de este contenido, ha sido una constante que se ha observado en todos los niveles de la educación. Una evidencia de esto lo muestra el hecho de que cuando el niño es enfrentado por primera vez a esta noción a nivel simbólico, en los primeros grados de educación primaria, demuestra no estar preparado; ya que no posee los elementos indispensables para abordar ese conocimiento.

La enseñanza de las nociones en referencia se ha convertido en una labor complicada para los maestros, en relación a esto se pueden citar por ejemplo, la comprensión de la expresión a/b es uno de los mayores problemas que presentan los estudiantes, pues la misma está asociada, como lo indica Mancera (1.992), a "diversos significados" (p.32).

La experiencia de la investigadora como profesora de matemática en Educación Básica, especialmente en el 7mo grado, le ha permitido observar en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones algunos de los siguientes fenómenos.

1.- Para establecer el orden entre fracciones, frecuentemente se usa la misma idea como para indicar el orden entre los números naturales y se piensa, por ejemplo, que 1/2 es menor que 1/3.
2.-Asumir que una fracción puede tener diferentes representaciones, es poco digerible.
3.-En las operaciones de adición y sustracción, se observa mayor dificultad cuando éstas poseen distintos denominadores.
4.- En las operaciones de multiplicación y división, tienden a confundir la aplicación del procedimiento de resolución.

Otra de las razones por la cual podría considerarse importante el estudio de este contenido matemático, reside básicamente en las exigencias de resolver situaciones de la vida cotidiana que requieren otra idea de representación distinta a la usual, es decir, al uso de los números naturales para representar estas situaciones.

Por tal motivo, es inminente el planteamiento de la siguiente interrogante: ¿Por qué los alumnos no adquieren las destrezas necesarias para consolidar ese aprendizaje? Al respecto, De León y Fuenlabrada (1996) indican que la concepción sobre este tema en el ámbito escolar se ha manejado pobremente, basada prácticamente en el fraccionamiento de la unidad y en la aplicación de las propiedades, dejando atrás la variedad de situaciones que emergen del resto de los diferentes significados que pueden atribuírsele a las fracciones de acuerdo al contexto donde se estudien.

En base al análisis realizado, la información que se recabará en esta investigación nos permitirá responder sistemáticamente las siguientes interrogantes, clasificadas en tres dimensiones, según lo establece Arrieche (2002).

Problemática epistemológica:
1.-¿Qué son las fracciones?
2.-¿Cuál es el desarrollo de este conocimiento en los distintos períodos y circunstancias?
3.-¿Qué papel desempeñan las en la matemática?

Problemática Cognitiva:
1.-¿Cómo aprenden el tema los estudiantes de Educación Básica?
2.-¿Qué dificultades de comprensión tienen para los estudiantes los distintos aspectos que conforman las fracciones?
3.-¿Cuáles son los errores más comunes cometidos por los alumnos en el estudio de este contenido?

Problemática Instruccional:
1.-¿Cómo se enseñan las fracciones en el nivel y contexto institucional fijado?

2.-¿ El diseño de los programas de matemática en Educación Básica, específicamente el contenido sobre fracciones, está elaborado tomando en cuenta las necesidades que genera el contexto donde se desarrolla el proceso educativo?

Objetivos de la Investigación

Objetivo General

Determinar los significados institucionales y personales puestos en juego en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones en la Educación Básica. *Objetivos Específicos.*

1.- Con el fin de evaluar la problemática planteada se realizará un estudio sobre los fundamentos teóricos que conforman las fracciones.

2.-Caracterizar los significados elementales o sistémicos sobre las fracciones puestos en juego en un libro de texto de matemática de Educación Básica, usado en el proceso de estudio del tema en estudiantes de 7mo grado.

3.- Caracterizar las praxeologías matemáticas implementadas en el desarrollo de las clases impartidas en la asignatura de matemática, correspondiente al 7mo grado de Educación Básica sobre el tema de las fracciones.

4.- Caracterizar los significados personales construidos por los estudiantes sobre fracciones en 7mo grado de Educación Básica, tras un proceso de estudio.

Marco Teórico

1.- Antecedentes de la Investigación

Planchart (1984), en un estudio experimental e interpretativo sobre la enseñanza de las fracciones (Estudio realizado con niños de primer año de segundaria), enfoca sus conclusiones sugiriendo la búsqueda de "los errores por los errores" para una mejor enseñanza de las fracciones y en general de las matemáticas. Es decir, este autor considera que deben determinarse los errores y aprovecharse los mismos como herramienta didáctica para la enseñanza de las fracciones.

Por su parte Dávila (1992) en un trabajo de investigación sobre la introducción de la noción de fracción a partir de problemas de reparto para niños de primer y segundo grado de primaria, también se inclina por la determinación de obstáculos. Entre sus conclusiones se expone que una de las limitaciones identificadas es la prematura inclusión del nivel simbólico en estos primeros grados de la educación primaria.

Mancera (1992) expone, en un artículo titulado significados y significantes relativos a las fracciones, la problemática en torno a la enseñanza de las fracciones a partir de las dificultades asociadas a los diferentes tipos de significados y al contexto donde se pongan en práctica. En este trabajo se mencionan algunos estudios realizados sobre el aprendizaje de las fracciones atendiendo a los diferentes significados que se le atribuyen a las mismas. Algunos de los autores que señala Mancera son: Dienes, Streefland, Kieren, Hart entre otros.

En este sentido De León y Fuenlabrada (1996) en un artículo llamado Procedimientos de solución de niños de primaria en problemas de reparto, consideran y apoyan su estudio sobre la clasificación que hace Kieren, ya que opinan que es el que ofrece mayor profundidad y riqueza sobre los diversos significados de las fracciones. Así mismo, al igual que los autores mencionados anteriormente De León y Fuenlabrada sostienen que al realizar el análisis que comprometen el significado de las fracciones esto permitirá "identificar los aciertos y errores de los alumnos" para facilitar la enseñanza y aprendizaje de las fracciones.

Magallanes (1999) señala en un artículo titulado Obstáculos epistemológicos que presentan los alumnos de Educación Básica en relación al concepto formal de fracción y de las operaciones que con este se realizan, basado en la indagación a este respecto por medio de un interrogatorio a los alumnos seleccionados en la Unidad Educativa Nacional "Sucre", como resultado, que la omisión de los errores cuando se manipula el concepto de fracción es una de las principales causas del bajo rendimiento en este tema.

2.- Bases Teóricas
En este trabajo se ha adoptado el modelo teórico semiótico-antropológico para la investigación en Didáctica de la Matemática, propuesto por Godino y Batanero (1994), el cual considera la noción de significado como clave para analizar la actividad matemática y los procesos de difusión del conocimiento matemático.

Entre las nociones que usaremos, presentamos las de "Significado institucional y personal de un objeto matemático" (Godino y Batanero, 1994). Tales significados se concibe como el sistema de prácticas (operativas o discursivas) realizadas por una persona (o en el seno de una institución) para resolver un campo de problemas matemáticos.

En Godino (2003) se complementa la información sobre los significados institucionales y personales con una clasificación de los mismos. Para los significados institucionales se mencionan cuatro tipos: "Significados de referencia, pretendido, implementado y evaluado". Los significados personales son clasificados en: "global, declarado y Logrado" (Godino, 2003, p.11).

También se estima pertinente incluir la noción denominada por Chevallard, Bosch y Gascón (1997) como praxeología matemática, la cual es asimilada en nuestro modelo teórico con la noción de significado institucional.
Otra noción necesaria de resaltar es la de objeto matemático la cual Godino (2001) la definen como "todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo que se puede hacerse referencia, cuando hacemos, comunicamos o aprendemos matemática"(p.6).

Marco Metodológico

1.- Tipo de Investigación.
La investigación que desarrollaremos en este estudio es de tipo mixto, es decir se hará una combinación entre métodos cualitativos y cuantitativos.

Para el desarrollo de la faceta epistemológica se realizará un estudio documental y cualitativo, que será combinado con diversas técnicas y enfoques en la parte instruccional y cognitiva de la investigación

La faceta instruccional será abordada mediante un estudio de casos bajo la técnica de la observación, de acuerdo a un plan de experiencias de enseñanza diseñadas que tengan como base los criterios suministrados por el estudio epistemológico y cognitivo.

Para la caracterización de los significados personales construidos por los estudiantes en el proceso de estudio sobre las fracciones, se utilizarán los enfoques cuantitativo experimental y cualitativo interpretativo.

2.- Técnicas de Recogidas de Datos.
En la faceta cognitiva, en lo que se refiere a la caracterización de los significados personales construidos por los alumnos en un proceso de estudio sobre fracciones se implementará como técnica de recogida de datos un cuestionario. A través de las respuestas suministradas por los estudiantes, se obtendrán las tendencias de la población, las cuales serán sometidas a interpretación con el fin de determinar las variables individuales y el por qué de las mismas.

En la caracterización de las praxeologías matemáticas construidas por el profesor en la enseñanza de las fracciones en una clase de matemática de 7mo grado de Educación Básica, se implementará la observación no participante. Dicha observación se realizará por parte del docente investigador en la parte de atrás del aula de clase donde su presencia no sea un elemento distractor.

3.- Población y Muestra
La población objeto de este estudio son estudiantes de Educación Básica del sistema educativo venezolano. La muestra es un curso de 7mo grado de 34 alumnos en el contexto de las clases de matemática en la de la Unidad Educativa Nacional "El Béisbol" de las Tejerías Edo. Aragua.-Venezuela

4.- El Análisis Semiótico como Técnica para interpretar Significados
En cuanto al análisis de un libro de texto usado en el proceso de estudio referido, se implementará como herramienta la técnica para interpretar significados designada por Godino y Arrieche (2001) como "análisis semiótico". El análisis semiótico se caracteriza por el uso sistemático de la noción de función semiótica y de ontología matemática.
Esta técnica es usada en el análisis de libros de textos y consiste en dividir el texto en unidades de análisis tomando en cuenta la estructura del mismo y luego en identificar las entidades y las funciones semióticas que se presentan entre las mismas.

5. Caracterización de los significados institucionales y personales de las fracciones en Educación Básica.
En este estudio usaremos la clasificación que Godino (2003) realiza de los significados institucionales y personales, respectivamente. Específicamente, en la parte institucional nos referiremos a los significados de referencia (la información obtenida del libro de texto y fuentes de filosofía e historia de la matemática) y a los significados implementados (conocimientos transmitidos por el profesor en el aula); y a los significados declarados (los conocimientos mostrados por los estudiantes en las respuestas a un examen o de cualquier evaluación) en el aspecto personal.

A manera de ejemplo, en nuestra investigación caracterizamos los significados de referencia de las fracciones mediante un análisis epistemológico y curricular que consistió en un estudio documental de fuentes relacionadas con el tema, tales como tesis de maestría y de doctorado, revistas especializadas, textos de historia y filosofía de la matemática. En relación a los significados implementados se hizo un registro de tipo periodístico, mediante la observación no participante, a la clase de matemática de un profesor enseñando fracciones a un grupo de estudiantes de 7° grado de Educación, realizándose un análisis semiótico-didáctico (Arrieche, 2002) al texto recabado. Después del proceso de estudio se aplicará un examen cuyos resultados nos permitirán caracterizar los significados declarados por los estudiantes, realizando para ello una tabla de frecuencias de respuestas correctas, regulares e incorrectas. Cabe destacar que a través de las respuestas incorrectas se hará una clasificación de errores de tipo conceptual, de interpretación de las fracciones, aplicación de propiedades y de realización de operaciones.

Referencias Bibliográficas

Arrieche, M. (2.002). *La Teoría de Conjuntos en la formación de Maestros: Facetas y Factores Condicionantes en el Estudio de una Teoría Matemática*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Didáctica de la Matemáticas, Universidad de Granada, España.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemática: el eslabón perdido entre la enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, España: Hisori e ICE de la Universidad de Barcelona..

Dávila, M. (1992). El Reparto y las Fracciones. *Enseñanza de la Matemática 4*(1), 32-45.

De León, H. y Fuenlabrada, I. (1996). Procedimientos de solución de niños de primaria en problemas de reparto. *Revista Mexicana de Investigación Educativa 1*(2), 268-282.

Font, V. (2000). *Procediments per obtenir expressions simbóliques a partir de grafiques. Aplicacions a les derivadas*. Tesis doctoral no publicada, Departament de Didáctica de les Ciencies Experimentals i de la Matemática, Universitat de Barcelona, España.

Godino, J. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas en Didáctica de la Matemática*. Obtenido en junio de 2005, del sitio web del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. y Arrieche, M. (2001). El Análisis Semiótico como Técnica para interpretar Significados. V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, España.

Godino, J. y Batanero C. (1994). Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques 14*(3), 325-355.

Magallanes J. (1999). Obstáculos epistemológicos que presentan los alumnos de Educación Básica en relación con el concepto formal de fracción y las operaciones que con este se realizan. *Trazos en Matemática 9*, 6-7.

Mancera, E. (1992). Significados y significantes relativos a las fracciones. *Educación Matemática 4*(2), 30-54.

Planchart, O. (1.984). *Estudio Experimental e Interactivo sobre la Enseñanza de las Fracciones*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

Análisis del Desarrollo de la Puesta en Escena de una Situación Didáctica "La Función Exponencial 2^x" con Estudiantes de Bachillerato

Jorge López y Javier Lezama
Escuela Normal Superior del Estado de México y CICATA del IPN
México
joselo26@correo.unam.mx, jlezama@ipn.mx
Pensamiento Matemático Avanzado – Nivel Medio

Resumen

La investigación "Análisis del desarrollo de la puesta en escena de una situación didáctica", cuyos propósitos están encaminados a identificar los efectos didácticos que se producen en el escenario cuando los estudiantes de bachillerato emplean criterios geométricos para construir segmentos y localizar algunos puntos de la función exponencial 2^x; tiene como Marco Teórico la Teoría de Situaciones de (Brousseau, 1993) y la Teoría de la Transposición Didáctica de (Chevallar, 1991). Como metodología de investigación la Ingeniería Didáctica que se caracteriza por tener un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase. Los estudiantes mostraron una gran variedad de acciones al resolver la actividad matemática que se les propuso, siendo en ocasiones contrastante.

Introducción

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación en Didáctica de la Matemática, donde una de las finalidades que se persiguen con la experiencia de reproducir la situación didáctica, es el de identificar los efectos didácticos que se producen en los distintos escenarios, a que fueron creados (Lezama, 1999).

El concepto de función, es una de las principales nociones en la matemática actual, puesto que se encuentra en todo plan de estudios del nivel medio superior y superior. Existen varias investigaciones que muestran como la enseñanza de los principios de cálculo (entre los que destaca el de función) es problemática. Asimismo, la enseñanza tradicional, aún teniendo otras ambiciones, tiende a centrarse en la práctica algorítmica y algebraica del cálculo, siendo necesaria una propuesta de cambio en su modelo de enseñanza y aprendizaje con la finalidad de mejorar este proceso.

Usualmente en la bibliografía, para abordar la función logarítmica lo hacen a través de la función exponencial, pues se define la una, como la inversa de la otra, relegando así a la función exponencial a un papel intermediario; como los enfoques aritmético y funcional para las funciones a las que se hace referencia, se muestran ajenos, se requiere el establecimiento de un puente entre un concepto y otro, previo a ello es necesario construir alguna de las dos como funciones y es justamente ahí en donde incide la importancia del presente trabajo. Se hace una construcción para el caso particular de la función exponencial 2^x vía una secuencia didáctica.

El propósito está encaminado a que el estudiante aprenda la noción de función exponencial, invitándolo a que él realice las acciones, las cuales desarrollará paso a paso a partir de criterios geométricos, localizando puntos en el plano cartesiano, observando las dificultades para obtenerlos, llenando tablas, identificando regularidades que propicien la generalización. Confrontar la idea espontánea de que 2^x es evaluable solo cuando x es un número entero.

Formulación del problema

A partir de mi experiencia de haber resuelto la secuencia de actividades de la ingeniería "Un estudio didáctico de la función exponencial 2^x" para conocerla, discutirla y analizarla; con el propósito de reproducirla con estudiantes de bachillerato, me propongo responder las siguientes preguntas:

¿Cómo afecta la estructura de la situación didáctica, en la actividad matemática de los estudiantes, al trabajarla en equipo, incluyendo la interacción de un profesor-monitor?

¿Qué tipo de obstáculos matemáticos enfrentan los estudiantes y la forma en que logran superarlos cuando se apropian del saber en juego?

¿De qué forma los estudiantes, solicitan la ayuda del profesor-monitor para aclarar sus dudas, desbloquear o validar sus procedimientos y resultados?

Marco teórico conceptual

Para el análisis de la información vertida por los estudiantes, respecto a la solución de la actividad matemática, se hace uso de las categorías de la Teoría de situaciones Didácticas (acción, formulación, validación, contrato didáctico, devolución de situaciones adidácticas); ésta adopta un enfoque sistémico, ya que considera a la didáctica de las matemáticas como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos con el objeto de optimizar los modos de apropiación de ese saber por el sujeto (Brosseeau, 1993).

Alrededor de un saber se forma un contrato didáctico, que ese saber como objeto de un proyecto compartido de enseñaza y aprendizaje y que une en un mismo sitio a profesores y estudiantes. Y por un estrato que (Chevallard, 1991), denomina la noosfera del sistema didáctico.

Un contenido de saber que ha sido designado como saber enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adoptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. "El trabajo que transforma de un objeto de saber a enseñar, en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica" (Chevallard, 1991).

Con base al diagnóstico que se realiza a los estudiantes que resuelven la situación, se tienen las siguientes predicciones:

- En la construcción de segmentos, los pueden proponer en el plano cartesiano (es lo recomendable), o decidir hacerlo en hojas blancas que se les proporciona, pero se corre el riesgo que modifiquen la unidad a realizar cada trazo requerido.
- En la construcción de segmentos de longitud $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ puede ser posible que empleen distintos segmentos como la unidad.
- Puede ser posible que no hagan uso adecuado del algoritmo de la semejanza de triángulos para obtener los productos ($\sqrt{2}$) ($\sqrt{3}$) y ($\sqrt{3}$) ($\sqrt{5}$).

- Los alumnos pueden tener dificultades en el manejo adecuado de las propiedades de los exponentes, al transformar de una expresión en forma de radical a la forma exponencial, al descomponer un exponente fraccionario en factores, al no factorizar de forma correcta al momento del llenado de las tablas y como consecuencia no observar el comportamiento creciente de la función exponencial al analizar el llenado de las tablas.

La metodología que se emplea en la investigación, teniendo como referencia que ya ha sido validada al ponerla en escena en otros ambientes escolares del nivel medio superior y superior, es la que propone la Ingeniería didáctica; ésta considera tres etapas para su realización que son:

a) Etapa preliminar (análisis a priori).
b) Etapa experimental.
c) Etapa de información (análisis a posteriori).

Análisis de resultados

La actividad propuesta a los estudiantes consta de tres etapas, la 1ª se trabaja para explorar los antecedentes matemáticos que se necesitan para resolver las otras dos; la 2ª y 3ª etapa que se reportan en la investigación, se desglosa en 14 órbitas, elementos distinguibles que integran el eje conceptual de la situación; con el propósito de diferenciar la actividad matemática a la que se introduce a los estudiantes; disponiendo de 1 hora por etapa para su solución; en la Tabla No.1, se resume lo siguiente:

1) Se muestra la forma en como avanzaron los 3 equipos que participaron en la experiencia, y se exhibe si fue resultado de las acciones exclusivas de los estudiantes y si hubo intervención o no del profesor-monitor.

2) El símbolo ε significa que desde nuestro punto de vista el equipo de estudiantes cumplió con las instrucciones, interpretando más o menos de forma correcta, realizando completa la actividad propuesta, se tienen las evidencias para su análisis e interpretación.

3) El par de símbolos $\varepsilon\rho$ significa que el desarrollo de dicha actividad estuvo influenciada por la intervención de profesor-monitor.

4) El símbolo ρ significa que el observador asumió el rol del estudiante, se puso a realizar las construcciones y contestar la actividad correspondiente.

En los cuadro que se reportan vacíos, no existen evidencias escritas sobre la solución de la actividad propuesta; aunque en sus discusiones grupales y exposición de sus resultados, muestran que las estuvieron explorando.

Núm.	órbitas o actividades													
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}
Equipo 1	ε	ε	ε	ε	ερ		ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε
Equipo 2	ε	ε	ε	ερ	ρ					ε	ε	ε	ε	
Equipo 3	ε	ε	ε	ε	ε	ερ				ε	ε	ε	ε	

Tabla 1. En esta se muestra el avance de los tres equipos en la solución de las catorce actividades, correspondientes a la 2ª y 3ª etapa de la situación didáctica.

Los tres equipos tuvieron un gran avance en la solución de las actividades propuestas, aunque no mostraron un dominio total de los algoritmos geométricos; con unas cuantas sugerencias que les proporcionaba el monitor, eran capaces de recuperarlos y seguir avanzando en la solución de las actividades, al finalizar cada etapa con su respectiva exposición, comentaban que con un poco de más tiempo, tal vez hubieran logrado resolver toda la situación.

Cada equipo afrontó y se responsabilizó de la solución de la actividad matemática, haciendo uso de sus propios recursos, aprovechando la orientación del monitor quien en ocasiones validaba sus planteamientos.

Como se puede observar en la Tabla No. 1; los tres equipos avanzaron en la dirección que les marcaba la situación, si bien, la interpretación de las instrucciones que se indicaban en la hoja de trabajo, no todos le dieron el mismo sentido, los equipos terminaron interpretando las actividades de forma correcta. El manejo de los exponentes fraccionarios suscitó conflictos que en parte fueron superados, fue el momento en que algunos equipos emplearon más tiempo, pero fue el periodo en que generaron las acciones más interesantes al interior del equipo. En este lapso estaban los equipos inmersos en el problema al que la situación los quería llevar.

Los estudiantes al no tener a la mano respuestas concretas a los cuestionamientos, optaron por resolver la situación tratando de dar sentido al conflicto de elevar potencias fraccionarias y realizar las construcciones geométricas de algunos segmentos requeridos; como fue el caso del equipo No.1; donde uno de los estudiantes que se mostró como líder, junto con sus compañeros, al estar resolviendo las actividades de la segunda etapa; emplearon sus propias estrategias geométricas, al estar explorando la forma de construir algunos de los segmentos, les permitió interpretar gráficamente los demás segmentos y avanzar en forma significativa, respondiendo de forma correcta lo que se les pedía en cada actividad, como se muestra en el análisis comparativo de la Tabla No.1.

Como se mencionó en el párrafo anterior, este equipo tuvo un desempeño extraordinario desde el punto de vista de las discusiones que se generaron a su interior, lo más excepcional de esta experiencia fue la dinámica y que describimos de forma resumida a continuación:

Al iniciar la 2ª etapa de la secuencia, después de localizar en el plano cartesiano los puntos $(0, 2^0)$, $(1, 2^1)$ y $(2, 2^2)$, se les pidió que localizaran en el mismo plano los puntos $(1/2, 2^{1/2})$, $(1/4, 2^{1/4})$, $(3/4, 2^{3/4})$ y $(5/4, 2^{5/4})$; siguiendo este orden, empleando los procedimientos geométricos que se trabajaron en la etapa de preparación; los estudiantes observaron las coordenadas de los puntos señalados y de acuerdo al orden creciente de las abscisas, a su criterio, plantearon que iba primero el punto $(1/4, 2^{1/4})$, seguido por el punto $(1/2, 2^{1/2})$ y deciden obtener primero las coordenadas del punto $(1/4, 2^{1/4})$, pero no recuerdan el algoritmo geométrico para obtener el segmento de la ordenada requerida. En este momento se encuentran con el primer bloqueo y en su exploración les hace resolver toda la situación, ya que encuentran todas las demás potencias requeridas; descubren que a través del Teorema de Pitágoras pueden encontrar $2^{1/2}$, esto los motiva para buscar $2^{1/4}$ siguiendo el mismo procedimiento geométrico, pero en ese momento no lo logran. Sin tanta dificultad se dan cuenta que $2^{3/4} = (2^{1/2})(2^{1/4})$; $2^{5/4} = (2^1)(2^{1/4})$; $2^{3/2} = (2^1)(2^{1/2})$; $2^{7/4} = (2^1)(2^{3/4})$; en ese momento expresaron, si se conociera $2^{1/4}$ todo estaría resuelto; siguieron insistiendo con el teorema de Pitágoras porque sabían que $2^{1/4} = (2^{1/2})^{1/2}$, deciden explorar el algoritmo geométrico y logran recuperarlo con facilidad, en su desarrollo se dan cuenta que los dos algoritmos se basan en la semejanza de triángulos, e inician el planteamiento para obtener $(2^{1/410})$ que tanto deseaban. Este equipo guiado por su líder, muestra un ejemplo muy interesante de devolución al resolver la situación didáctica, ya que su estrategia de trabajo y de exploración, les permite resolver la mayoría de las actividades propuestas.

Conclusiones

Los estudiantes afrontaron la situación con sus propios recursos. El proceso requirió que el profesor monitor orientara y en ocasiones que validara las afirmaciones que formulaban; en algunos casos los estudiantes realizaron la validación, pero en otros este proceso se logró con la orientación del profesor.

Con respecto a la experiencia, hubo tareas que propiciaron discusiones entre los equipos, debido a las características de la secuencia, pero la forma de responder, el tiempo dedicado a la discusión y las características de las respuestas fueron determinadas tanto por la dinámica de la discusión adoptada por el equipo, como por las intervenciones del profesor.

Esta secuencia de aprendizaje constituye una sucesión de actividades que, a su vez, da origen a otras tareas. No provoca grandes desviaciones, permite que todos los estudiantes pasen por los mismos problemas y ofrece la oportunidad de explorar tanto distintas formas para afrontarlos como argumentaciones para justificar los resultados.

Al término de la solución de la secuencia por los equipos de trabajo y la exposición de sus resultados, con la integración de los profesores como coordinadores en las discusiones, se pudo constatar el logro de las intenciones didácticas propuestas y la cualidad del objeto matemático propuesto, siendo esto justificado en la confrontación entre el análisis a priori y el a posteriori.

Durante el desarrollo de la secuencia, la mayoría de los estudiantes pasaron satisfactoriamente por las fases de acción, formulación, llegando inclusive a la validación que propone ***Brousseau*** para el proceso de aprendizaje.

El objetivo de este trabajo fue la reproducción de la situación didáctica ya validada, se logró desarrollar en los estudiantes, comportamientos matemáticos y cognitivos que no solo le sirvieron para que asimilaran estos objetos, sino también descubrió que existe otra forma de abordar los conocimientos escolares.

La estructura del diseño permite el intercambio de ideas entre los estudiantes al interactuar en la solución; su flexibilidad provoca que el interesado explore e imagine el comportamiento creciente de la función; aunque tenga deficiencias en el manejo de algunos antecedentes requeridos por la situación; la manera ingeniosa y original que presentaron los estudiantes para vencer los obstáculos matemáticos, aportan elementos para la discusión y análisis, logrando interesar a los demás participantes.

Referencias Bibliográficas

Apóstol, T. (1995). *Calculus*. España: Editorial Reverté. (Trabajo original publicado en 1967)

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). Mexico: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1993). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Lecturas en didáctica de las matemáticas, Escuela francesa* (pp. 33-115) México: DME, Cinvestav-IPN.

Cantoral, R. (1995). Matemática, matemática escolar, matemática educativa. *Serie Artículos*. México: Programa Editorial AES, DME, Cinvestav-IPN.

Cantoral, R. y Farfán, R.M. (1998). Investigación en didáctica de las matemáticas y profesionalización docente: Retos de la educación superior. *Serie Antologías*. México: Programa Editorial AES, DME, Cinvestav-IPN.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Editorial Aique.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1995). *Estudiar matemáticas, El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. España: ICE-Horsori.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de maestría no publicada, DME, Cinvestav-IPN. México.

La Educación Matemática: Una Aproximación a su Comprensión desde una Visión Interdisciplinar

Andrés Moya
Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Miranda
Venezuela
moyaromer@yahoo.com
Epistemología – Nivel Superior

Resumen

En esta investigación documental se presentan un conjunto de elementos que permitan un proceso de aproximación a lo que significa Educación Matemática hoy en día y como la comprensión de consideraciones teóricas, epistemológicas y metodológicas pueden conducir al tránsito de una vía interdisciplinar. Se considera un marco referencial para la comprensión de su complejidad, la manera en que se han venido generando las actividades que conforman el campo, cuáles son algunas de las concepciones que se manejan y cómo esas concepciones han determinado diversas áreas de investigación. El análisis se adentra en la discusión de la Educación Matemática como disciplina científica y a su conformación como campo de estudio que a pesar de poder configurarlo bajo una especificidad propia, tiene importantes espacios de intersección con otras disciplinas.

¿Qué es la Educación Matemática?

La primera dificultad que conlleva responder la pregunta inicial está asociada a la complejidad del hecho mismo de los dos miembros que conforman ese binomio: Educación y Matemática. Aunada a dicha característica, se tiene que la misma es un campo del conocimiento que está, prácticamente, en desarrollo o en sus inicios en comparación con otras disciplinas constituidas como la matemática o la biología, pero todavía es incipiente si la comparamos con disciplinas más recientes como la sociología o la psicología. "A causa de esta juventud, el sistema de objetivos, metodologías y criterios para validar el conocimiento de la Educación Matemática, presenta todavía excesiva variabilidad y poco consenso" (Waldegg, 1999).

Por otra parte la Educación Matemática, a pesar de ser un campo de estudio, que puede ser configurado bajo una especificidad propia, tiene importantes espacios de intersección con otras disciplinas y sus métodos. Ello conduce, necesariamente, a desentrañar su carácter interdisciplinar. En función de lo expuesto anteriormente en lo que se refiere a comprender la naturaleza de la Educación Matemática y el proceso de su gestación como campo de conocimiento, a los efectos del presente trabajo se plantearon las siguientes interrogantes: ¿Qué se entiende, hoy en día, por Educación Matemática; ¿Se puede asumir una conceptualización única de la Educación Matemática?; ¿Cuáles son las actividades fundamentales que están vinculadas con la Educación Matemática?; ¿Es la Educación Matemática una disciplina científica o debe ser asumida como un campo interdisciplinar?; ¿Puede constituirse la Educación Matemática en un campo estratégico de la sociedad?

Para dar respuestas a estas interrogantes profundizaremos en las condiciones teóricas, epistemológicas y metodológicas que se han ido presentando en el surgimiento de la Educación Matemática. El análisis e interpretación de la información obtenida conducirá a la formulación de una propuesta de un modelo para la Educación Matemática, que permita por una parte ser una herramienta para comprender la complejidad de la misma y, por otra, servir de base como principio innovador de organización en el ámbito educativo.

Las actividades de la Educación Matemática

Dando por sentado esa característica de extrema complejidad que implica la Educación Matemática, trataremos de hacer una primera aproximación por la vía de indagar cuáles son las actividades que están vinculadas con ella. Esas actividades pueden ser asociadas a tres acepciones (Villarreal, 2002), como: actividad de práctica relacionada con el propio acto de aprender y enseñar matemática; actividad de desarrollo vinculada a la producción de materiales didácticos o textos, elaboración de propuestas curriculares, realización de experiencias innovadoras o alternativas y como área de investigación. Haciendo un análisis de esa tres acepciones podríamos afirmar que en una primera etapa las raíces matemáticas de la Educación Matemática, en el área de investigación, tratan principalmente con investigaciones acerca de **qué** contenido matemático es enseñado y aprendido mientras que las raíces psicológicas han tratado acerca del **cómo** la matemática es enseñada y aprendida. Sin duda que las dos disciplinas básicas que han tenido una influencia inicial sobre la investigación en Educación Matemática han sido la propia Matemática y la Psicología, acompañadas de la Didáctica.

La Educación Matemática como disciplina científica

Desde el punto de vista conceptual, vemos que de acuerdo a las posiciones de diferentes autores se habla de Educación Matemática como una "ciencia" (Brousseau, 2000), de un "proceso", de un "campo de investigación emergente" (Díaz Godino, 2002) , de un "cuerpo interdisciplinar" (Mora, 2001), o de un "campo de investigación, desarrollo y práctica" (Schoenfeld, 2000; ICME, 2003). Por otra parte, una disciplina desarrolla sus métodos con dos propósitos fundamentales: primero, para tratar de aprehender los fenómenos que conciernen a su campo de estudio; segundo, para transformar esos fenómenos en datos que sean más específicos para el problema que se esté investigando. Pero, debido a las intersecciones que tienen lugar entre los campos de estudio de diversas disciplinas, los métodos no se convierten en patente exclusiva de una disciplina, sino que, frecuentemente, los métodos empleados por una disciplina proporcionan información que tiene un importante valor indicativo para el campo de estudio de otra disciplina.

Por ello es necesaria una comprensión cabal de cómo se desarrollan, y cómo se asumen, los procesos interdisciplinarios que se dan en la conformación de la Educación Matemática para poder lograr una conceptualización de la misma como disciplina científica.

Carácter interdisciplinar de la Educación Matemática

La Matemática y la Psicología, acompañadas por la propia Didáctica, son las disciplinas que han tenido una mayor influencia inicial sobre la investigación en Educación Matemática. Sin embargo ese conjunto inicial ha ido creciendo y, al respecto, Villarreal (2002) señala que "posteriormente el campo se vuelve interdisciplinar, incorporando el aporte de la Sociología, Filosofía, Historia de la Matemática, etc". Mora (2001) concibe a la didáctica de la matemática como "un cuerpo interdisciplinar que requiere el trabajo conjunto con otras disciplinas tales como la matemática, la sociología, la psicología, la didáctica general, la pedagogía, la historia de la matemática,…..,la antropología..” (p.22). Se tienen autores que amplían aún más la perspectiva cuando plantean una Educación Matemática que permita a los ciudadanos ser parte activa de una sociedad democrática y nos hablan de una “Educación Matemática Crítica” (Skovmose, 1999). Steiner (1985), da un paso más allá de la **interdisciplinariedad** y afirma que la Didáctica de la Matemática debe tender hacia la **transdisciplinariedad**, la cual cubriría no sólo las interacciones o reciprocidades entre proyectos de investigación especializados, sino que situaría estas relaciones dentro de un sistema total sin límites fijos entre disciplinas. La “caída de los paradigmas”, ha abierto paso a la interdisciplinariedad en la producción del conocimiento y la Educación Matemática no ha sido ajena a ese conjunto de transformaciones globales. Es en ese contexto de cambio paradigmático, de nuevas perspectivas conceptuales y metodológicas, del desarrollo de una nueva visión interdisciplinaria y globalizadora de los problemas y sus soluciones, es que podemos aproximarnos a las actividades vinculadas con la Educación Matemática, hoy en día y en su constitución como campo de conocimiento.

Aproximación a las problemáticas de la interdisciplinariedad

En lo que podríamos considerar la acepción más general y abstracta, la interdisciplinariedad en el campo de la ciencia, consiste en una cierta razón de unidad, de relaciones y de interacciones, de interconexiones entre diversas ramas del conocimiento llamadas disciplinas científicas. Los obstáculos a los cuales se enfrenta la interdisciplinariedad en la Educación Matemática deben ser estudiados dentro de un contexto estructural más amplio, donde se tome en cuenta, entre otros aspectos: el conocimiento matemático ligado a los nuevos procesos de producción científica, el uso del cocimiento matemático, los modelos de trabajo y de formación del docente, el conocimiento matemático y su pertinencia en la sociedad. Todo ello supone el surgimiento de espacios novedosos.

Bajo esa panorámica, las posibilidades de comprender la Educación Matemática como un sistema interdisciplinar deben pasar no solamente por la reflexión acerca de la forma en que se ha venido desarrollando el conocimiento matemático sino también por la forma en que ese conocimiento se relaciona con la solución de los problemas que la sociedad. Es dentro de ese contexto educación-matemática-sociedad donde la interdisciplinariedad cobra una fuerza vital.

En ese camino progresivo, en una primera instancia la interdisciplinariedad significa **cooperación** entre diferentes disciplinas. En una segunda instancia, significa **interacción** entre diversas disciplinas que confrontan y complementan campos de objeto y metodologías diferentes y la tercera, en donde la interdisciplinariedad es sinónimo de lo que podríamos llamar **enciclopedismo,** no en el sentido simple de agregados de disciplinas, unas a otras, sino en el sentido de la constitución de un nuevo campo del conocimiento.

Modelos interdisciplinares en Educación Matemática

Existen autores que han presentado modelos que pretenden dar cuenta de las relaciones de la Educación Matemática con otras disciplinas. Uno de ellos es Higginson (1980), quien considera a la Matemática, Psicología, Sociología y Filosofía como las cuatro disciplinas fundacionales de la Educación Matemática. Visualiza a ésta en términos de las interacciones entre los distintos elementos del tetraedro cuyas caras son esas cuatro disciplinas. Esas cuatro dimensiones de la Educación Matemática, consideradas en el modelo tetraédicro de Higginson, plantean cuatro preguntas fundamentales para la conformación del campo interdisciplinar: qué enseñar (Matemática), por qué enseñar (Filosofía), a quién y dónde enseñar (Sociología), cuándo y cómo enseñar (Psicología)

Otro modelo en la vía interdisciplinar, y dentro de la concepción sistémica, es el del creador del Grupo TME, Steiner (1990) citado en Díaz Godino (2002), para quien la Educación Matemática admite una interpretación global dialéctica como "disciplina científica" y como "sistema social interactivo" que comprende teoría, desarrollo y práctica.

Ideas para un modelo interdisciplinario en la educación matemática

El análisis que hemos realizado nos permite afirmar que la conformación de un modelo auténticamente interdisciplinario en la Educación Matemática es una opción viable pero que confronta dificultades reales y tangibles. Esas dificultades están en relación directa con la concepción de la interdisciplinariedad en sí misma y con la propia complejidad del binomio que está presente en la Educación Matemática.

El conjunto de todo lo anterior, desde el punto de vista del autor, significa que más allá de una clarificación terminológica de la que pueda significar la Educación Matemática, ésta debe ser entendida como un sistema complejo y global y que la constitución de un modelo interdisciplinario para la misma debe poner en evidencia la relación de una tríada fundamental: **Educación-Matemática-Sociedad**.

Es en ese sentido que nos permitimos plantear algunas ideas para el fortalecimiento de un modelo interdisciplinar en la Educación Matemática que permita incluir lo siguiente: a) los diversos niveles y significados de la interdisciplinariedad; b) sus aspectos ontológicos, epistemológicos y sociológicos; c) la generación de lo que se puede considerar conocimiento en Educación Matemática y d) la forma en que se relaciona el conocimiento con la solución de los problemas de la sociedad.

Perfil de la propuesta

Para llevar adelante un modelo interdisciplinario en la Educación Matemática es necesario definir **nuevos métodos de operación y nuevos operadores.** Es decir, que introducir la interdisciplinariedad implica una profunda transformación de los modelos mentales que están presentes en muchos educadores, y en la propia sociedad, y de los modelos de aprendizaje-enseñanza de la matemática, que hasta ahora han regido al interior de la propia práctica.

Es en ese contexto donde consideramos que la generación de nuevos modelos mentales, principios pedagógicos y modelos de enseñanza deben involucrar: **aprendizajes colectivos** que tengan en cuenta el control del proceso global del conocimiento en Educación Matemática y su utilización práctica; **aprendizajes individualizados** que hagan efectiva la interiorización de los procedimientos de producción de conocimientos; **aprendizajes sociales** que comprometan ámbitos efectivos de producción y acceso al conocimiento más allá del medio escolar formal y **autoaprendizajes** que faciliten la aproximación al conocimiento. El hecho de considerar esos aprendizajes resulta un paso primordial para que la interdisciplinariedad en la Educación Matemática trascienda al conocimiento como un hecho por si mismo y que se limita, en muchos casos, a un "saber qué", y se vincule de manera más efectiva a un "saber cómo", a un "saber por qué", un "saber a quién" y a un "saber dónde y cuándo". Consideramos que este es uno de los rieles que permitirá a la Educación Matemática convertirse en un **campo estratégico** para la sociedad, en sentido de que pueda contribuir, de manera efectiva, en el planeamiento y diseño de posibles respuestas a demandas que la sociedad genera.

Los ejes de acceso a un modelo interdisciplinario

La manera en que se han venido dando las aproximaciones interdisciplinarias en la ciencia actual nos lleva a considerar que uno de los nuevos operadores, dentro de un modelo interdisciplinario para la Educación Matemática, son las **áreas del conocimiento**, que podrían tener intensidad variable según sea su nivel de integración.

El operador **áreas del conocimiento,** pretende ser una primera instancia para organizar la forma en que las diferentes disciplinas convergen, o pueden converger, hacia la Educación Matemática. Estas áreas del conocimiento, en función de su nivel de integración, las categorizaremos de la siguiente manera: Generales, Parciales y Específicas. Explicitemos cada una de ellas:

- **Áreas generales del conocimiento.** Son aquellas donde las síntesis interdisciplinarias se han producido con una mayor fluidez y han permitido la constitución de sistemas integrados que demandan la interacción y cooperación permanente de dos o más disciplinas.
- **Áreas parciales del conocimiento matemático.** Son aquellas que sin ser tan inclusivas como las de la categoría anterior, involucran la interacción de un conjunto de disciplinas, pero en un radio de acción más limitado.
- **Áreas específicas del conocimiento matemático.** Serían aquellas que conciernen, de manera más estricta, a ciertas áreas de la Educación Matemática, las cuales necesitan para su desarrollo de los instrumentos de análisis y de los métodos empleados por otro campo o disciplina.

Dentro de las ideas para la constitución de un modelo interdisciplinario para la Educación Matemática un segundo operador a considerar es el que denominaremos **aspectos del conocimiento**, los cuales categorizaremos de la siguiente manera: Ontológicos-Epistemológicos, Tecnológicos y Sociológicos. Veamos cada uno de ellos:

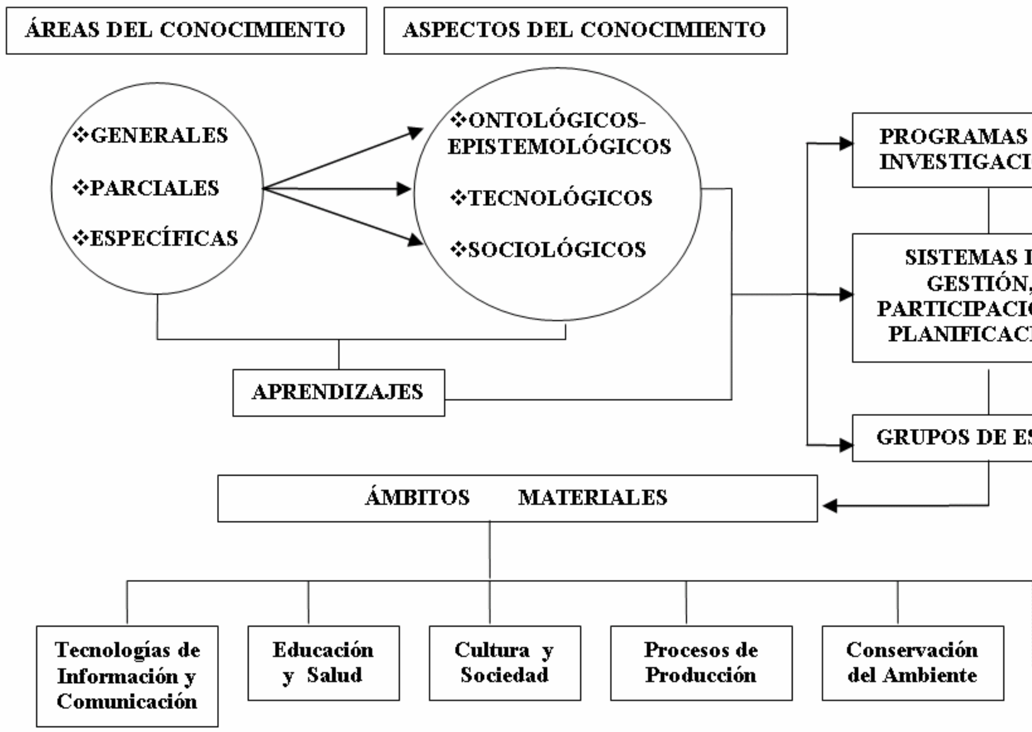
- **Aspectos ontológicos-epistemológicos.** Tendría que ver con el conocimiento en educación matemática en sí mismo, con su propia especificidad. Aquí se considerarían los dominios materiales, los dominios de estudio, los niveles de integración teórica, los métodos, los instrumentos de análisis, las aplicaciones prácticas y las contingencias históricas.
- **Aspectos Tecnológicos**. Directamente ligado a la aplicación del conocimiento en Educación Matemática, con el "saber cómo" y el "saber qué".
- **Aspectos Sociológicos**. Tiene que ver con: las formas de organización social que deben estar en correspondencia con un desarrollo armónico del conocimiento; las problemáticas que una sociedad cambiante, y en constante evolución, plantea a la

Educación Matemática y la evaluación de las perspectivas, mediatas o inmediatas, de cómo una determinada manifestación de progreso en el campo de la Educación Matemática incide sobre el cuerpo social.

Por otra parte, un modelo interdisciplinario para la Educación Matemática, tal como lo estamos proponiendo, no puede estar basado, simplemente, en una estructura para generar, o en algunos casos transmitir, de manera eficiente el conocimiento. Es decir, que la interdisciplinariedad no puede ser un objetivo en sí misma sino debe constituirse en un **"medio para".** Por tanto, el modelo que hemos ido esbozando dentro del quehacer académico, debe tener como necesaria consecuencia que la interdisciplinariedad, como eje conductor, se convierta en un **principio de organización** que tenga incidencia preponderante y decisiva sobre espacios tales como: programas de investigación, sistemas de gestión, participación y planificación y grupos de estudio. En la medida en que la interdisciplinariedad funcione como un **principio de organización**, el modelo propuesto puede ser uno de los ejes fundamentales para que promueva una Educación Matemática para la **innovación** y para la **resolución de problemas,** ya que los programas de investigación, los sistemas de participación, gestión y planificación y los grupos de estudio que se generen como consecuencia de la interacción de los nuevos operadores pueden estar conectados a **ámbitos materiales**. En el Gráfico siguiente presentamos una visión global de la forma en que concebimos, metodológicamente, la aproximación al modelo interdisciplinario para la Educación Matemática que estamos proponiendo.

A manera de conclusión

La interacción y cooperación de las diversas disciplinas, campos de estudios, enfoques y puntos de vista que conforman la complejidad de la Educación Matemática pueden convertir a ésta en una poderosa herramienta para desentrañar, a su vez, la propia complejidad de problemas que le atañen y que pueden presentarse en diversos ámbitos materiales de la sociedad. Con base en ello el modelo propuesto puede ser un punto de partida para que la Educación Matemática se convierta en un "campo estratégico" para la sociedad, con la premisa fundamental que la interdisciplinariedad en la Educación Matemática debe ser asumida dentro de un contexto estructural amplio. Es dentro del contexto educación-matemática sociedad donde un modelo interdisciplinario, como el propuesto en el presente trabajo, puede cobrar una fuerza vital.



Referencias Bibliográficas

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática 12*(1), 5 - 38

Godino, J.D. (2002). *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*. Obtenido del sitio web la Universidad de Granada: http://www.ugr.es/local/jgodino

Higginson, W. (1980). On the foundations of mathematics education. *For the Learning of Mathematics 1*(2), 3-7.

ICME (2003). *Main component of the scientific programme of ICME-10*. Obtenido del sitio web: http://www.icme-10.dk/

Mora, D. (2001). *Didáctica de las Matemáticas*. Caracas: Universidad Central de Venezuela, Ediciones de la Biblioteca Central.

Steiner, H. (1985). Theory of mathematics education (TME): An introduction. *For fhe Learning of Mathematics 5*(2), 11-17.

Schoenfeld, A. (2000). Purpose and Methods of Research in Mathematics Education. *Notices of the AMS 47*(6).

Skovmose, O. (1999). *Hacia una Filosofía de la Educación Matemática Crítica*. Bogotá: una empresa docente, Universidad de Los Andes.

Villarreal, M. (2002). *La Investigación en Educación Matemática: ¿Qué ocurre en Argentina?*. Obtenido del sitio web: http://www.ceride.gov.ar/notiuma/confmonica.pdf

Waldegg, G. (1999). *La Educación Matemática ¿Una Disciplina Científica?*. Obtenido del sitio web: http://www.uv.mx/iie/coleccion/N_29/la_educación_matemática.htm

El uso Inadecuado de Conceptos Matemáticos en las Escuelas de Ingeniería

Alejandro Muñoz
UPIBI, Instituto Politécnico Nacional
México
amunoz@acei.upibi.ipn.mx
Formación de Profesores - Nivel superior

Resumen

Se examina el efecto que tiene el uso inadecuado de conceptos de Matemáticas en una escuela de Ingeniería. Se abordan varios ejemplos de este uso inadecuado y como la falta de comprensión total o parcial de un concepto puede llevar a resultados parciales o equivocados, incluso a que el alumno no pueda abordar adecuadamente la resolución de un problema. En este trabajo sólo se ilustrará el tema con el uso que los alumnos de ingeniería hacen del concepto de infinito. El efecto más frecuente del uso inadecuado del concepto matemático es la elección de los caminos más difíciles para resolver los problemas o bien el dar respuestas simplistas que no tienen nada que ver con la verdadera solución. Se concluye que el uso inadecuado del concepto viene del poco énfasis que se da al aspecto formativo de la matemática porque sólo se le toma como una herramienta de trabajo.

Introducción

En la Física se usan extensivamente conceptos originados en la Matemática, la cual es herramienta fundamental tanto de la Física como de la Ingeniería. Sin embargo, existen conceptos que se usan en forma inadecuada, en parte porque no hay un entendimiento completo de los mismos, porque son conceptos difíciles de enseñar para los profesores o porque en los textos no se les da la importancia que merecen o bien suponen que el alumno entenderá sin mayor explicación la aplicación de tal concepto. En el caso de la enseñanza de la Física para los futuros ingenieros, lo anterior puede llegar a ser crítico, porque se ha insistido demasiado solamente en los aspectos herramentales o aplicativos de la Matemática, como si únicamente fuera importante la aplicación del concepto *per se*, sin preocuparse por entender el significado.

En este trabajo se analiza solamente un caso que trata de ilustrar las ideas anteriores, se trata del manejo que se hace del concepto de infinito en la enseñanza de la Física en las escuelas de Ingeniería. Se tiende a usar el concepto de infinito como sinónimo de otras ideas que tienen que ver con comportamientos asintóticos, con variables que crecen mucho o bien que tienden a cero o cuando una variable es mucho mayor (>>) que otra. Cuando el alumno encuentra que alguna variable Física tiende a infinito piensa que el trabajo está terminado, no hay nada más que hacer ni nada más que pensar acerca del problema. Sin embargo, cuando el alumno da como respuesta “infinito” a alguna pregunta, muchas veces no ha meditado bien las implicaciones de esta respuesta, y es frecuente que realmente no haya entendido bien el problema e incluso que no esté dispuesto a hacer algún experimento porque considera que la respuesta es obvia, porque: ¿Para qué molestarse en hacer el experimento si ya se sabe que la respuesta es “infinito”? Sería perder el tiempo. Cuando el alumno de ingeniería observa el símbolo de infinito en una expresión matemática que sirve para obtener los valores numéricos de una variable física, usualmente se desconcierta, esos problemas son los que los alumnos muchas veces no resuelven y el docente tampoco, son los que al final de la clase siempre quedan como ejercicio para realizar en casa.

Desarrollo del tema

Para ilustrar las ideas anteriores, se describirán algunas experiencias que alrededor del concepto de infinito el autor ha recopilado en clases de Física para alumnos de nivel superior en las carreras de Ingeniería.

Cuando a los alumnos se les pregunta: ¿Cuántos dobleces sucesivos a la mitad se pueden realizar en una hoja de papel? La respuesta usual (no generalizada) es que es muy grande, que es "infinito". Sin embargo, basta tomar una hoja de papel común y hacer el experimento para convencerse de que solamente pueden hacerse unos cuantos dobleces. No faltará el alumno que trate de conseguir una hoja de papel más delgado o bien más grande para mostrar que se puede hacer una cantidad mucho más grande de dobleces, al no lograrlo probablemente sugieran que si tuvieran un papel "infinitamente delgado" e "infinitamente grande" su respuesta de un número infinito de dobleces sería correcta, lo cual es cierto, pero conseguir un papel "infinitamente delgado" en la realidad no es posible, lo que sugiere que el alumno no entiende bien no solamente el concepto de infinito sino también otros conceptos. Lo importante de la experiencia es que la mayoría de los estudiantes se convencen que la respuesta de un número "infinito" de dobleces es una respuesta superficial y que dar una respuesta más adecuada requiere mayor esfuerzo, la realización del experimento ayuda a que el alumno pueda dar una mejor respuesta. Usando papeles de diferentes espesores se puede hacer que el alumno entienda mejor el concepto de límite, pero aunque en la mente del alumno parece que el número de dobleces es infinito, es importante que el alumno no pierda el contacto con la realidad, por ello, el experimento no debe dejar de hacerse.

Entender bien los conceptos, en este caso el de infinito, puede ayudar también a diseñar experimentos, como se ilustra en la siguiente experiencia.

Si se carga un capacitor de capacitancia C conectado en serie a un resistor de resistencia R usando una fuente de voltaje V_m entonces es fácil mostrar que el voltaje V en el capacitor varía en el tiempo de acuerdo con [1]:

$$V(t) = V_m(1 - e^{-t/\tau})$$

donde $\tau = RC$ es la constante de tiempo del circuito. Se consideró que inicialmente el voltaje en el capacitor era cero. Una vez que el capacitor está cargado se retira la fuente y el resistor se conecta directamente al capacitor, en este caso se dice que el capacitor se descarga a través del resistor y el voltaje en el capacitor está dado por:

$$V(t) = V_m e^{-t/\tau}$$

En esta experiencia se les proporciona a los alumnos capacitores y resistores con una gama amplia de valores comerciales, una fuente de voltaje, un voltímetro y un cronómetro ambos analógicos y cables para armar un circuito, se les pide que carguen el capacitor y que después al quitar la fuente conecten el resistor con el capacitor, en ambos casos (carga y descarga) el voltímetro está conectado al capacitor. El alumno tiene que obtener experimentalmente las curvas de carga y de descarga obteniendo valores de voltaje en el capacitor a diferentes tiempos, y luego graficar el voltaje del capacitor en el eje de las ordenadas y el tiempo en el eje de las abscisas [2].

Experimentos como este se hacen en prácticamente todos los laboratorios de Física en las escuelas de Ingeniería, la única diferencia es que en este caso el alumno debe seleccionar los valores del resistor y capacitor que usará, en principio la mayoría de los alumnos simplemente toman el primer par resistor-capacitor que se les ocurre y conectan. Sin embargo, el problema se presenta al medir el tiempo. Pongamos por ejemplo el caso de la descarga, si se observa la ecuación para el voltaje del capacitor en el caso de la descarga, el alumno sabe que inicialmente ($t = 0$) el voltaje en el capacitor es máximo y luego decrece, sabe también que cuando el tiempo tiende a infinito el valor del voltaje en el capacitor debe tender a cero. Pero, al comparar sus resultados con los demás compañeros que hacen el experimento, observa diferentes comportamientos en el voltímetro: a veces la aguja se mueve tan rápidamente que es prácticamente imposible tomar ninguna lectura; otras veces aunque si se puede tomar algunas lecturas la aguja se mueve tan rápido que en algunos segundos la aguja marca cero; otras veces la aguja parece comportarse como piensa el alumno, la aguja se mueve muy lentamente y parece que tardará mucho en llegar a cero.

Esto le lleva a examinar sus ideas, por un lado la teoría dice que cuando $t \to 0$, $V_m \to 0$, pero los resultados del experimento parece que muestran resultados en algunos casos diferentes. Cuando el docente les pide que usen la expresión para V considerando $V_m = 10$ volts y los valores de R y C para calcular el voltaje a diferentes tiempos (por ejemplo con una precisión de cuatro cifras), los alumnos obtienen resultados como estos:

		Voltaje en el capacitor (V)				
R	C	t=1 s	t=5 s	t=10 s	t=100 s	t=1000 s
1 KΩ	F	0	0	0	0	0
1 KΩ	F	3.6787	0.0067	0.0067	0	0
10 KΩ	$1x10^{-3}$ F	9.0483	6.0653	3.6788	0.4540	0
1 MΩ	$1x10^{-4}$ F	9.9004	9.5123	9.0483	3.6788	0.4540
1 MΩ	$1x10^{-3}$ F	9.9900	9.9501	9.9004	9.0484	3.6788

Al hacer los cálculos el alumno entiende la importancia de la constante $\tau = RC$, porque si esta constante es muy pequeña obtiene valores muy cercanos a cero; si por otro lado, su valor es muy grande, obtiene pocas variaciones en el voltaje, de tal manera que tendría que esperar un tiempo muy grande para obtener la curva de descarga.

Al mismo tiempo el alumno entiende la importancia del medidor, porque si fuera posible tener un medidor extremadamente sensible (y digital) entonces en los renglones que tienen un cero aparecerían valores muy pequeños, pero diferentes de cero. Si se cuenta con un osciloscopio de los más sensibles entonces pueden usarse prácticamente cualesquiera de los valores de resistencia y capacitancia disponibles.

En muchos problemas de aplicación de Física la idea de que una variable tiende al infinito debe de enseñarse en forma diferente, debe de interpretarse como que la variable es lo suficientemente grande con respecto a otra variable, de tal manera que al comparar una con la otra la segunda puede ser despreciada con respecto a la primera.

Algo muy parecido sucede con el problema de enfriamiento en su modelo más sencillo conocido como ley de enfriamiento de Newton. Cuando se enfría algo, el alumno aprende que según la expresión matemática hace falta un tiempo infinito para que la temperatura del café sea igual a la temperatura ambiente, pero nuestra experiencia y el experimento nos dicen que esto se realiza más bien en un tiempo lo suficientemente grande para que no seamos capaces de notar la diferencia, sea con el tacto o con un termómetro [3].

Por ello, el hecho de que el tiempo tienda a infinito en el circuito RC, debería entenderse como que el tiempo es muy grande en comparación con τ, y esta interpretación es muy importante cuando se encuentran problemas físicos en donde se usa el concepto de infinito, tómense como ejemplo los dos problemas siguientes:

En un libro muy usado en las escuelas de Ingeniería [4], se pide al alumno que calcule la distribución de temperatura de estado estacionario en una placa semi-infinita, algunos alumnos a los que se les ha planteado este problema han manifestado su desacuerdo porque dicen que las aplicaciones deben ser más realistas, es decir, obviamente no existen placas semi-infinitas, y si no existen, ¿para qué resolver problemas como este?. Desde luego que se les puede responder que el problema de la placa finita es más complicado y que se abordará después y que resolver el problema de la placa finita es un entrenamiento para cuando se resuelva el problema más complejo, pero la respuesta debe ser en el sentido de que la longitud de la placa es mucho mayor que el ancho de la misma por lo que para propósitos prácticos se pude considerar infinita, por ello debe aclarársele al alumno que los resultados que obtenga si se pueden aplicar cuando éstas condiciones se cumplan.

En otro problema de un libro también muy usado en los cursos de Física en las escuelas de Ingeniería [5] hay muchos problemas de aplicación en donde los conceptos anteriores se explican con bastante precisión, por ejemplo se considera un anillo delgado de radio R en el que existe una densidad lineal de carga uniforme λ en toda su circunferencia y se pide calcular el campo eléctrico en un punto P, a una distancia z del plano del anillo a lo largo de su eje central, el cual se encuentra que es:

$$E_z = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Si se pide al alumno que diga cual sería el valor del campo eléctrico en los puntos muy alejados del anillo, una respuesta muy superficial sería que como z tiende a infinito el campo es cero, esto es verdadero, pero la pregunta más bien se refiere a que $z \gg R$, por lo cual lo más conveniente es despreciar el término R^2 con respecto a z^2, o sea z es mucho mayor que el radio R, en cuyo caso el resultado para el campo queda como:

$$E_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$$

Lo cual es la expresión para el campo de una carga puntual, efectivamente, a distancias muy grandes, el anillo aparecería como una carga puntual.

Entender bien éstos conceptos es importante no solamente para poder hacer aplicaciones y desarrollar o diseñar experimentos sino también para aprender a hacer cálculos que usualmente no se realizan aparentemente porque son tediosos cuando la razón principal es que no se entienden bien una serie de conceptos relacionados con el concepto de infinito. Tal como se verá en el siguiente ejemplo el uso de la computadora no resuelve el problema.

Si se considera una varilla metálica en la forma de un cilindro circular de radio unitario, si su longitud es mucho mayor que su radio entonces el cilindro se puede considerar de longitud infinita, si se supone que la superficie de la varilla se mantiene a 0º C y que inicialmente la temperatura en el interior de la varilla es de 100º C, entonces si se pide al alumno determinar la temperatura de la varilla en cualquier punto en cualquier tiempo, entonces se resolverá la ecuación de conducción calor en coordenadas cilíndricas para obtener como resultado que la temperatura está dada por [4]:

$$U(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{200e^{-k\lambda_n^2 t}}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} J_0(\lambda_n r)$$

En la expresión anterior k es la difusividad del material, λ_n son las raíces positivas de la función Bessel de orden cero J_0, y J_1 es la función de Bessel de orden uno. Usualmente en este tipo de expresiones matemáticas no se realizan los cálculos porque son tediosos, pero tarde o temprano el ingeniero tendrá que hacer este tipo de cálculos o parecidos. Otra razón por la cual no se hacen los cálculos es porque no se sabe dónde cortar la serie infinita ya que es obvio que para poder dar algún valor de la temperatura habrá que evaluar la suma anterior con un número finito de términos. El procedimiento podría ser como sigue: Primero se encuentran (numéricamente o en tablas) las raíces λ_n de J_0, aunque el número de raíces es infinito una sencilla revisión de la expresión anterior convencerá al alumno de que el término exponencial se aproxima muy rápidamente a cero, por lo que tres o cuatro términos darán aproximaciones excelentes. Las expresiones para J_0 y J_1 se pueden obtener de la siguiente expresión con $n=0$ y $n=1$ respectivamente:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - \ldots \right\}$$

O sea que las expresiones de J_0 y J_1 son a su vez sumatorias con un número infinito de términos. No obstante, una vez que el alumno ha entendido lo anterior resulta que al proceder a hacer los cálculos notará que los términos son cada vez más pequeños, por lo que nuevamente se tiene que tomar la decisión de tomar unos cuantos términos, el número de términos estará determinado por la precisión que se requiera en el cálculo.

Por lo tanto, aunque la expresión exacta para la temperatura si es una sumatoria con un número infinito de términos, el alumno puede llegar a la conclusión de que no es necesario en este caso tomar una gran cantidad de términos, si este problema fuera una aplicación en la realidad tendría que calcular el número suficiente de términos para alcanzar la precisión que tiene su instrumento de medición, en este caso su termómetro, lo cual para la mayoría de los procesos industriales no va más allá de una décima de grado.

Otra actitud del alumno cuando se le pide que calcule la temperatura a partir de la expresión para $U(r,t)$ es usar la computadora, es decir, escribir un programa que evalúe la sumatoria, es común que el número de pasos del programa los escoja arbitrariamente, la tendencia es tomar un número de iteraciones grande (sugerido por el símbolo infinito de la sumatoria) para así asegurar que los cálculos tendrán la precisión adecuada. No obstante, al hacer esto probablemente se están calculando muchos términos que son muy pequeños y que hacen que el programa sea lento, por otro lado el alumno debería además de examinar si las series que evalúa de ese modo son convergentes, porque no siempre el tomar una gran cantidad de términos garantiza la convergencia [6].

Tal como puede observarse, si el alumno entiende bien el significado de infinito en los diferentes problemas a los que se enfrenta (sean o no de la Física), esto puede redundar en un mayor entendimiento del problema y por lo tanto en la simplificación del trabajo, desafortunadamente es muy común que se descuide el aspecto formativo de la matemática, incluso muchos profesores en las escuelas de ingeniería eligen los caminos más difíciles para resolver problemas debido a que ellos mismos no han entendido el concepto. Esto que se ha ilustrado con solo un concepto, el del infinito, puede mostrarse que se reproduce para muchos conceptos matemáticos de los cuales se hace uso inadecuado.

Conclusiones

Se han mostrado problemas de diferentes cursos de Física en los cuales es necesario que el alumno haga un uso adecuado del concepto de infinito y de lo que ese concepto significa en la Física. Entender bien el significado de infinito en cada problema particular ayuda al alumno a entender mejor el problema, pero también le ayuda a simplificar sus cálculos, a obtener resultados más precisos y le apoya también en la realización de experimentos. El uso inadecuado del concepto viene del poco énfasis que se pone en el aspecto formativo de la matemática y solamente tomar tales conceptos como herramientas.

La enseñanza de la Física enfrenta muchos problemas, para el alumno los problemas que el docente le plantea y le resuelve muchas veces no significan nada para él, una de las razones por las que esto es así, puede ser porque el docente hace uso de conceptos matemáticos sin dar mayor explicación, suponiendo que el alumno los comprende. El docente debe verificar que el alumno realmente entiende la parte conceptual de la matemática que está empleando y que no está haciendo un uso inadecuado de la misma, de lo contrario sucederá lo que se ha ilustrado en este trabajo con el concepto de infinito.

Referencias Bibliográficas

McKelvey, J. P. (1981). *Física para ciencias e ingeniería, Vol 2*. México: Harla.

Muñoz-Diosdado, A. y Gálvez-Coyt, G. (1999). *Manual de laboratorio de Física II*. México: UPIBI-IPN.

Zill, D. G. (1997). *A first course in differential equations with modeling applications*, (6th. ed.). USA: Brooks/Cole Publishing Company.

Spiegel, M. R. (1983). *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. México: Prentice-Hall.

Resnick, R., Halliday, D. & Krane, K. S. (1994). *Física, Vol. 2*. México: CECSA.

Burden, K. L. y Faires, J. D. (1985). *Análisis numérico*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Concepciones Dominantes en la Enseñanza del Concepto de Número Entero en Estudiantes de Formación Inicial

Hugo Parra
Universidad del Zulia
Venezuela
parraortiz@cantv.net
Formación de profesores – Nivel Superior

RESUMEN

Se analizó entre los estudiantes del último año de la Licenciatura en Educación Matemática y Física, las concepciones acerca de la enseñanza del concepto del número entero presentes en sus planificaciones de clase. Los números enteros constituyen un problema didáctico relevante en nuestras instituciones de educativas y el mismo ha sido abordado según Gallardo (1996) en tres direcciones: desde una perspectiva teórica; desde una visión de carácter experimental y desde la perspectiva de su enseñanza Sin embargo, en formación de profesores la producción es menor. Para obtener la data se realizó análisis documental y entrevistas que luego se categorizaron, resaltando la incorporación de situaciones problemas para la introducción de los temas; la resolución de problemas como un aspecto de "refuerzo" de lo aprendido y una ausencia de la historia de las matemáticas entre otros.

El presente escrito tiene como propósito mostrar resultados preliminares de una investigación en curso acerca del conocimiento didáctico matemático relativo al conjunto de los números enteros, presente en estudiantes que se están formando para el ejercicio profesional de la educación matemática.

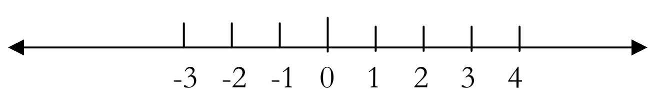
Antecedentes

Los estudios acerca de la enseñanza de los números enteros han sido menos frecuentes que los dedicados al conjunto de los números naturales. Sin embargo, tal como lo reseñan las investigaciones y nuestra propia experiencia como docentes y formadores de docentes de matemáticas, los números enteros representan una dificultad evidente en la mayoría de nuestros alumnos.

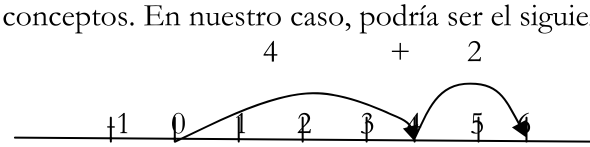
Gallardo (1996) señalaba la década pasada que las investigaciones respecto al conjunto Z se habían dirigido – fundamentalmente - en tres direcciones; una de ellas, como investigaciones desde una perspectiva teórica, entre las cuales destacaron los trabajos de Piaget (1960); otro tipo de investigaciones presentaban estudios de carácter experimental, entre los cuales se destacaron los trabajos de Vergnaud (1989) y, un tercer tipo, los referidos a la enseñanza, como, por ejemplo, los trabajos de Bruno & Martinón (1996), Ribeiro (1996) y Alfonso (1999). Creemos que esta tendencia se mantiene aun. Sin embargo, los trabajos dirigidos a estudiar el papel de los docentes en formación o en ejercicio de la profesión son escasos. Dentro de este último tipo de investigaciones - las referidas a los docentes - nos parece importante destacar los trabajos de Bruno & García (2004). Al respecto, estos autores analizan – al igual que en este trabajo – una población de estudiantes próximos a trabajar en el campo de la docencia en matemática; sin embargo, ellos centran su atención en analizar la clasificación que éstos hacían respecto a los problemas aditivos con números enteros según las estructuras de los enunciados. Los autores estudiaron en los futuros profesores, las clasificaciones de los problemas aditivos con números negativos que éstos realizaban y los criterios para justificar la clasificación de dichos problemas. Las conclusiones del trabajo se pueden sintetizar en dos: la redacción de los enunciados son relevantes al momento de la clasificación de los problemas y, los criterios que utilizaron consideraron mayoritariamente las tres situaciones numéricas implicadas en los problemas aditivos; estos son, *los estados* “que expresan la medida de una cantidad de una cierta magnitud, asociada a un sujeto en un instante (debo 2))” (Bruno & García, 2004: 27), *las variaciones* que en un enunciado expresan el cambio de un estado en un lapso de tiempo (perdí…) y, por último, que manifiestan las diferencias entre dos estados (tengo “n” más que tu…). Esta investigación, relevante, no sólo por la clasificación de los enunciados que expresa, sino también por la población que estudia, nos pareció pertinente considerarlo; ya que en el análisis de las concepciones, este tipo de tareas encajan perfectamente en lo que se constituyó en el principal referente de este estudio; nos referimos a los organizadores del currículo que plantea Rico (2004) al momento de una planificación de las situaciones de clase.

Rico (2001) manifiesta que al momento de concretar en una planificación lo que pretende el profesor realizar con los estudiantes, se hace necesario considerar varios aspecto, que implican diferentes significados que desde la matemática escolar deberían plantearse a los alumnos. Estos aspectos son lo que él denomina *organizadores del currículo* y que no son más que “aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas” (Rico, 2001: 88). Los organizadores del currículo son siete. El primero de ellos - la fenomenología – es el conjunto de fenómenos a los cuales un concepto matemático está relacionado. En nuestro caso, son todos aquellos fenómenos vinculados a los números enteros; por ejemplo: Al salir de mi casa tenía en mi haber tres lápices y al llegar por la tarde sólo me quedaba uno, es lo que Rudinitsky, A.; Etheredge, S.; Freeman, J.M. & Gilbert, T. (1995) denominan historia o situaciones aditivas simples y que nosotros denominamos situación – problema.

Otro organizador lo constituyen los sistemas de representación, que no son más que los símbolos y gráficos a través de los cuales se expresan los diferentes conceptos y procedimientos matemáticos; ejemplos de ellos en los números enteros lo representa un número *n* cualquiera (-1, 0, 76,…) o la recta numérica



Un tercer organizador son los modelos; ellos muestran la relación que existe entre los fenómenos y los conceptos. En nuestro caso, podría ser el siguiente



Un cuarto organizador lo constituyen los materiales, medios o recursos. De alguna manera estos elementos son los que considera un docente como herramientas que le permitan facilitar el logro de los propósitos que se aspiran obtener, desde una perspectiva donde el alumno juega un rol participativo en el proceso de enseñanza y aprendizaje.
Junto a estos organizadores, hallamos también uno generalmente olvidado, como lo son los posibles errores y dificultades que podrían generarse en el transcurso de una clase.

El quinto organizador es la historia de las matemáticas como elemento orientador del proceso de enseñanza, que a la vez permite una visión del conocimiento matemático como producto cultural de la humanidad.

Por último – y no por ello menos importante – está la resolución de problemas, el cual siendo una de las principales estrategias de la educación matemática, debería estar presente en toda planificación de cualquier situación de aprendizaje que se desee plantear a los alumnos.
El conjunto de estos organizadores complementados por los aportes de Bruno & García (2004) constituyeron los principales referentes teóricos para nuestra investigación, tal y como lo veremos a continuación.

Objetivos de la investigación

Ante la dificultad que representa el estudio de los números enteros en los alumnos y, como formadores de profesores, nos planteamos como objetivo analizar las concepciones presentes en las planificaciones relativas a la enseñanza de los números enteros en estudiantes que en un futuro cercano serán profesores de matemática.

Metodología

Asumimos el análisis documental de los materiales producidos por un grupo de estudiantes próximos a obtener su licenciatura para ejercer la docencia en matemática a nivel de la educación intermedia (12 a 17 años). Para la obtención de la data se realizó un análisis documental de las propuestas de trabajo de clase (planificaciones) así como entrevistas en los casos de no estar clara la información que se tenía. Para el análisis centramos la atención en los elementos organizadores del currículo que consideraron los estudiantes en sus planificaciones.

Resultados

En el marco del estudio de las planificaciones de los estudiantes para profesor de matemática, el primer aspecto estudiado fue la incorporación o no de situaciones – problemas que permitiesen ver si le otorgaban una perspectiva de lo fenomenológico a la planificación. En ese sentido se mostró una tendencia dominante en su incorporación; ochenta y tres por ciento de las planificaciones analizadas presentan situaciones problemáticas (Figura 1), contra 16,6% que obviaron tales situaciones y se inclinaron únicamente por el cálculo de las operaciones para el estudio de aspectos relativos a los números enteros como estrategia. Cuando analizamos las situaciones problemas planteadas, notamos que todas – a excepción de una de ellas – utilizaron las mismas para introducir la discusión de un aspecto del Conjunto Z. El uso predominante de las situaciones – problemas para utilizarlas en la introducción de temas, nos llevó a interrogar a los estudiantes al respecto. Todos los que limitaron su uso para iniciar un tema – sin excepción – manifestaron que esa era su única utilidad. De igual manera, se evidenció que el 58,3% de las situaciones – problemas planteadas se enmarcan en el uso de los números enteros como la medida de una cantidad de una cierta magnitud, asociada a un sujeto y a un instante, es lo que Rudnitsky et al. (1995) y Bruno & Martinón (2004) denominan *estados*. El resto – 41,7% - le dan un uso a los números enteros planteados en las situaciones – problemas como *variaciones* (figura 1); este tipo de uso está caracterizado por el cambio de un estado con el paso del tiempo.

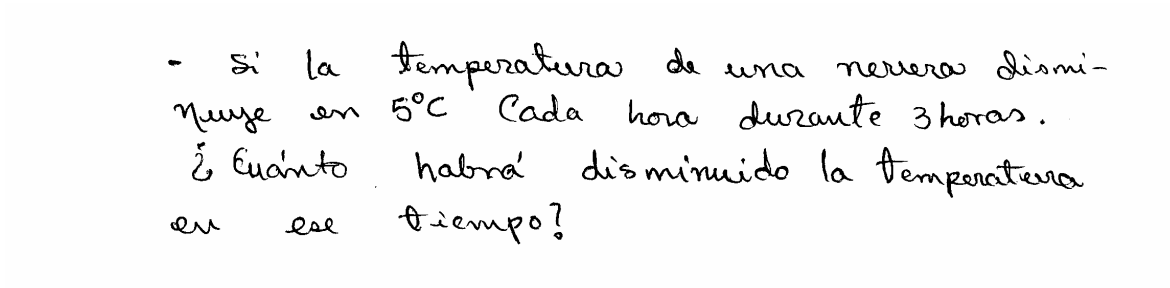

- Si la temperatura de una nevera disminuye en 5°C Cada hora durante 3 horas. ¿Cuánto habrá disminuido la temperatura en ese tiempo?

Figura 1

Un segundo aspecto estudiado se refirió a los sistemas de representación que promovían en las planificaciones. Se halló que los mismos se limitaron exclusivamente a la recta numérica.

El tercer aspecto – los modelos – se evidenciaron en sólo dos de las planificaciones. Una de ellas abordó – a través de la altura de un puente – la introducción a la conceptualización del conjunto de los números enteros. La segunda, contempló la representación de la potencia de los números enteros a través de un árbol genealógico; sin embargo, este último modelo no resultó del todo suficiente, ya que contemplaba sólo el caso de los números enteros positivos.

Un cuarto aspecto consideró el tipo de materiales, medios y/o recursos que se planteaban en las planificaciones. Resaltó en el análisis el hecho de que en ninguna planificación se optó por algo diferente a la utilización de la pizarra y la presentación de una guía de ejercicio.

Otro aspecto considerado fue la previsión de las posibles dificultades y errores que se podrían generar por parte de los alumnos en el proceso de implementación de lo planificado. En ninguno de los casos estudiados se previó algo al respecto.

Un sexto aspecto lo constituyó la posibilidad de incorporar la historia de las matemáticas en la planificación de las situaciones de aprendizaje a objeto de facilitar la comprensión de lo que es el conjunto de los números enteros; sin embargo, ninguna de las planificaciones contempló algo al respecto.

Por último, se analizó la presencia o no de la resolución de problemas; ya que ella constituye la principal estrategia para mediar en los procesos de construcción del conocimiento matemático. En 83,3% de las planificaciones se contempló su uso; sin embargo, el papel de la misma se limitó como elemento "reforzador del conocimiento aprendido en las clases previas" tal y como lo manifestó un estudiante en una de las entrevistas realizadas, opinión compartida por el resto de ellos.

Conclusiones

De los resultados podemos manifestar en primer lugar que, si bien la incorporación de situaciones problemas resulta favorable para aquellos que creemos que los aspectos fenomenológicos son fundamentales en el proceso de enseñanza de la matemática, no es menos ciertos que en los casos estudiados su restricción a la sola introducción del tema resulta insuficiente. Por ello, no es casual que además, la resolución de problemas aparezca rezagada a un papel secundario de "refuerzo de lo aprendido", como lo manifestaron los estudiantes entrevistados. Esta situación relativa a la situación problema y a la resolución de problemas, nos evidencia en los estudiantes una transición de un modelo de enseñanza de la educación matemática situado entre una perspectiva conductual y otra de tipo cognitiva.

En segundo lugar, resalta la ausencia de dos aspectos fundamentales en las planificaciones: la prevención por parte de los estudiantes de las posibles dificultades y errores que se pueden presentar y la ausencia de planteamientos históricos. Respecto a las dificultades y errores, creemos que no es casual su olvido; para nosotros subyace en esta ausencia la visión positivista de la educación, que implícitamente asume que si la planificación sigue una serie de pasos lógicos, el alumno no debería presentar problemas en la comprensión de los conocimientos planteados y, si llega a evidenciarse errores, los mismos serán producto de un descuido de parte de el alumno. En cuanto a la historia, la misma evidencia la ausencia de un planteamiento del conocimiento matemático como producto cultural de la humanidad.

Por último, la escasez de planteamientos alternativos diferentes a los tradicionales en lo que se refiere a los sistemas de representación, los modelos y recursos, evidencia la dificultad de hacer una enseñanza de las matemáticas que aborde de múltiples maneras su forma de estudiarla.

Todo lo expuesto, permite afirmar que las planificaciones de los estudiantes que han sido objeto de análisis, nos muestran una tendencia a concebir la enseñanza de los números enteros en un proceso de transición entre una visión conductual y otra de tipo cognitivo crítico; ésta última se entiende como aquella perspectiva de la educación matemática que concibe al sujeto como actor fundamental en el proceso de adquisición del conocimiento matemático, pero enmarcado en un contexto de interacción con sus pares y su propia realidad.

Referencias Bibliográficas

Bruno, A. & García, J. A. (2004). Futuros profesores de primaria y secundaria clasifican problemas aditivos con números negativos. *Relime 7*, pp.25 – 46.

Bruno, A. & Martinón, A. (1996) Números negativos: sumar = restar. *Uno* 10, 123 – 133.

Gallardo, A. (1996). El paradigma cualitativo en matemática educativa. Elementos teórico – metodológicos de un estudio sobre números negativos. En f. Hitt (Eds.), *Investigaciones en Matemática Educativa.* (pp. 197 – 222). México: Grupo Editorial Iberomérica.

Piaget (1960*) Introducción a la epistemología genética.* Argentina: Paidos.

Segovia, I. & Rico, l. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Eds.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria.* (pp. 83 – 104). España: Editorial Síntesis.

Rudinitsky, A., Etheredge, S., Freeman, J. y Gilbert, T. (1995). Learning to Solve Adition and Substraction Problems. *Journal for Research in Mathematics Education 26*(5), 467 – 486.

Vergnaud, G. (1989). L'obstacle des nombres négatifs et l'introduction à l'algèbre. En A. Bednarz y C. Garnier (Eds.). *Construction des savoirs.* (pp. 76 – 83). Canadá : Cirade.

Transferencia de Resultados: Taller con Docentes de Escuela Media

Josefina Royo, Celia Torres, Edna Agostini, Ana Lasserre y Mercedes Naraskevicins
Universidad Nacional de Jujuy
Argentina
perassi@educ.ar, jroyo@imagine.com.ar
Modelos Mentales – Nivel Superior

Resumen

La hipótesis inicial de esta investigación es: "Los alumnos de niveles superiores del sistema educativo tienen dificultades para el aprendizaje de la matemática, debido a que en los niveles inferiores no adquieren las habilidades lógicas necesarias para un óptimo manejo de las abstracciones matemáticas". En primera instancia se realizó un diagnóstico de los alumnos que inician estudios superiores para corroborar o desestimar la idea anterior y a partir de allí se indagó en qué fase del proceso de aprendizaje y con qué operaciones se presentan esas dificultades. Desde fines del año 2003 se trabajó en el diseño, adoptándose la modalidad de taller que se realizaron con grupos de docentes de Matemática de nivel medio. Estas son las conclusiones.

La hipótesis inicial de esta investigación en el año 2002 se definió de la siguiente manera "los alumnos de niveles superiores del sistema educativo tienen dificultades para el aprendizaje de la matemática, debido a que en los niveles inferiores no adquieren las habilidades lógicas necesarias para un óptimo manejo de las abstracciones matemáticas". A partir de esto, se propusieron los siguientes objetivos:

- Diagnosticar en los alumnos ingresantes a la Enseñanza Superior el nivel de adquisición de habilidades lógicas u operaciones mentales necesarias para el aprendizaje de la matemática en ese nivel
- Proponer un sistema de acciones compensatorias que estimulen el desarrollo de esas habilidades

Esta etapa de la investigación se encuadró dentro del marco conceptual aportado por las Lic. Norma Santos Marín (Universidad de las Villas) (Santos, 1998) y Teresa Sanz Cabrera (Universidad de La Habana) (Sanz, 1969). Ambas docentes ponen de manifiesto cómo la presencia o ausencia de las habilidades lógicas más elementales, repercuten en los aprendizajes matemáticos de los alumnos que estudian ciencias técnicas y proponen una serie de acciones para favorecer su desarrollo.

En el marco de la Psicología cognitiva., la concepción de los modelos mentales aparece como una herramienta teórica dinámica que trata de explicar el modo particular que poseen los sujetos para adquirir habilidades lógicas de pensamiento, necesarias para las abstracciones matemáticas de los niveles superiores del Sistema Educativo (Hartamann, 1996).

Por otra parte, diagnosticar las habilidades lógicas presentes en los ingresantes al nivel superior requiere precisar previamente el significado que se otorga a los conceptos de **"pensamiento**

lógico" y de **"habilidad"** en general. Para Podgoriets Kaya.N.A *"El pensamiento lógico constituye un tipo de pensamiento dirigido a la solución de diferentes problemas y situaciones sobre la base de procedimientos y recursos de la lógica"*.

Asimismo, Sanz (1969) sostiene *"Que en todo procedimiento lógico se destacan dos componentes, el propiamente lógico formado por el conjunto de acciones y reglas lógicas correspondientes al procedimiento y el componente específico que corresponde al contenido concreto en el cual éste se aplica."*

Para Piaget e Inhelder (1977) no se nace con la facultad de pensar lógicamente, ni esta facultad está preformada en el psiquismo humano. "*El pensamiento lógico es la coronación del desarrollo psíquico y constituye el término de una construcción activa y de un compromiso con el exterior, los cuales ocupan toda la infancia"*. Y podría agregarse, la preadolescencia. Para estos autores *"la construcción psíquica que desemboca en las operaciones lógicas depende primero de las acciones sensomotoras, después de las representaciones simbólicas y finalmente de las funciones lógicas del pensamiento",* de donde resulta que el pensamiento lógico es *"un instrumento esencial de adaptación psíquica al mundo exterior"*.

Se define como habilidad a "*la capacidad o disposición para realizar una cosa*" y para su estudio, se dividieron las habilidades mentales en dos grandes grupos: las habilidades más generales y las habilidades lógicas propiamente dichas.

1. <u>Habilidades generales</u> (a pesar de que se consideran habilidades generales, las acciones están referidas al contexto de la enseñanza de la matemática)

HABILIDAD	**Verificable por:**
1. Expresarse con precisión y fluidez	*1.1 Uso correcto de la simbología y el lenguaje de la Matemática* *1.2 Incorporación a su expresión de los aspectos lógicos que se estudian en la asignatura*
2. Trabajar con la información científica	*2.1 Uso de bibliografía*
3. Organizar y auto-controlar el trabajo	*3.1 Organización de la información, selección de los medios y ordenamiento de las tareas. (Planificación)* *3.2. Comprobación de los resultados del trabajo. (Verificación)*
4. Calcular	*4.1 Resolución de ejercicios y problemas*
5. Modelar	*5.1. Determinación de leyes que describen el problema* *5.2. Expresión matemática de las leyes que describen el problema* *5.3. Determinación de las cualidades de la solución que más interesan*
6. Interpretar la solución de un modelo	*6.1 Interpretar el significado de los conceptos estudiados* *6.2 Buscar y obtener la mayor información de la solución de cada ejercicio o problema resuelto*

2. <u>Habilidades lógicas</u>

   2.1. <u>Habilidades relacionadas con operaciones lógicas en base a conceptos</u>

HABILIDAD	Verificable por:
2.1.1. <u>Definición:</u> En Matemática, esta habilidad tiene que ver con reconocer si un objeto está en la extensión de un concepto, entendiendo por extensión, al conjunto de elementos que cumplen las propiedades definidas para un concepto	*a) Reconocer si el objeto posee las características esenciales que establece el contenido del concepto* *b) Reconocer si el objeto está en una de las subclases (subconjuntos) de la extensión del concepto* c) *Reconocer si el objeto posee algunas de las propiedades del concepto*
2.1.2. <u>Generalización</u>: en el estudio de una ciencia, una vez introducido un concepto se trata siempre de extender, lo más posible, la clase de objetos que le corresponden. También entra dentro de esta operación lógica la noción de restricción, es decir que, al analizar determinadas propiedades relacionadas con dicho concepto que corresponden a determinada subclase de la extensión, es necesario restringir el concepto a dicha subclase	*a) Extender los conceptos estudiados en una clase determinada a otra más amplia* *b) Distinguir entre dos generalizaciones cuál de ellas es la mejor* c) *Establecer relaciones entre diferentes generalizaciones de un mismo concepto*
2.1.3. <u>Clasificación</u>: Clasificar es ordenar por clases	a) *Determinar si el fundamento (criterio) de la clasificación particiona la extensión del concepto* b) *Comprobar que la clasificación se hace siguiendo un solo criterio* c) *Analizar si la clasificación no tiene saltos y es proporcionada* d) *Realizar clasificaciones de un mismo concepto de acuerdo a diferentes criterios*

2.2. <u>Habilidades relacionadas con operaciones lógicas en base a teoremas</u>

2.2.1. <u>Por el nivel de asimilación</u>:

HABILIDAD	Verificable por:
2.2.1.1. <u>Comprensión e Interpretación del enunciado</u>	*a) Obtener condiciones necesarias y/o suficientes para un concepto (comparar extensiones de conceptos)* *b) Expresar el teorema en forma de implicación* *c) Interpretar el significado geométrico, físico, etc., de los datos y de la tesis del teorema*
2.2.1.2. <u>Formulación de nuevos teoremas</u>: luego de estudiado un teorema, el estudiante debe poder formular nuevas proposiciones relacionadas con él.	*a) Enunciar el teorema contrarrecíproco* *b) Plantear posibles proposiciones relacionadas con el recíproco* *c) Plantear proposiciones relacionadas con el contrario* d) *Plantear proposiciones que generalicen lo afirmado por el teorema*

2.2.1.3. Aplicación: categoría de pensamiento que se caracteriza por la puesta en práctica de principios , leyes y generalizaciones, a realidades, problemas y situaciones concretas. Es hacer uso de una cosa o poner en práctica los procedimientos adecuados para conseguir un fin.	*a) Resolver problemas concretos* *b) Plantear situaciones problemáticas sobre la temática estudiada*

2.3. Por el fin que persiguen:

HABILIDAD	**Verificable por:**
2.3.1. Demostración	*a) Determinar el tipo de demostración* *b) Estructurar el proceso de demostración y su fundamento*
2.3.2. Refutación de proposiciones	*a) Comprobar que un ejemplo presentado constituye un contraejemplo de una proposición universal* *b) Construir contraejemplos sencillos*

Los avances de esta investigación en relación al diagnóstico de los alumnos que inician estudios superiores fueron presentados en una edición anterior de esta misma Reunión. En ellos se ponen de manifiesto la presencia o ausencia de las distintas categorías de habilidades (generales y lógicas) que poseen éstos alumnos. También se determinó en qué fase del proceso de aprendizaje y con qué operaciones se presentaban estas dificultades (Agostini, E., Royo, J., Torres, C. y Naraskevicins, M., 2004).

Quedaba entonces por realizar las acciones referidas al segundo objetivo, es decir, proponer un conjunto de acciones compensatorias que permitieran salvar esas dificultades.

A tales efectos, se decidió hacer un trabajo previo de transferencia de esos resultados a los docentes de Matemática de nivel medio, por lo que, desde fines del año 2003 se trabajó en el diseño de las acciones necesarias para ello, adoptándose la modalidad de un Taller a realizar con dichos docentes. La presentación que se somete a consideración ahora describe los resultados de la Prueba Piloto de tal actividad titulada: *"Taller de análisis y contrastación de las pruebas diagnósticas de habilidades lógicas, estrategias necesarias para superar obstáculos en el aprendizaje de la Matemática, con los saberes teórico - prácticos de un grupo de docentes de esta asignatura"*.

En este encuentro, se propuso que los docentes de Matemática de nivel medio:

- Analicen, a la luz del marco teórico presentado, las pruebas diagnósticas elaboradas y aplicadas por el equipo de investigación, a los alumnos ingresantes a la Facultad de Ingeniería y al Profesorado de Matemática, con el fin de:

a) identificar las habilidades generales y lógicas que los alumnos deberían poseer para la resolución de las pruebas presentadas y

b) teniendo en cuenta los resultados obtenidos, evaluar el estado de situación en que se encuentran los alumnos con respecto a esas habilidades, consideradas por el equipo de trabajo como necesarias para el aprendizaje de las matemáticas superiores y además, la utilización de las mismas como estrategias para resolver situaciones problemáticas emergentes del campo disciplinar en estudio.

El Taller se realizó con profesores que desempeñan su tarea docente en los últimos cursos de la escuela media, con una antigüedad entre los 2 y 17 años, en colegios públicos y privados, de la capital y del interior de la provincia que ofrecen al estudiantado modalidades como: bachillerato común, comercial o técnico. Como podemos apreciar, la muestra seleccionada cubre el espectro de la escuela media en Jujuy.

Desarrollo del Taller

El taller se había planificado en tres momentos: introducción, trabajo sobre el primer test y trabajo sobre el segundo test. A su vez, el trabajo sobre cada test abarcaría dos instancias:

- Reconocimiento de las habilidades generales y lógicas que los alumnos debían poner en juego para la resolución de los ejercicios planteados
- Evaluación de los resultados obtenidos por los alumnos.

El registro de las discusiones que se entablaran a partir del análisis de los instrumentos en sí y su aplicación permitiría reforzar el trabajo de interpretación del equipo. La introducción estuvo a cargo de la directora del grupo, que realizó una breve exposición acerca del propósito de la reunión y el marco teórico que sustenta la investigación. Luego se entregó el material impreso sobre la temática y en pequeños grupos de trabajo analizaron el mismo. Finalizado este momento se comenzó con el núcleo central de la actividad que era el trabajo con los test aplicados por el equipo. Los grupos trabajaron alrededor de treinta minutos sobre el primer test, contrastándolo con la teoría que se les había facilitado y luego se entabló la discusión.

La primera reacción provino de una docente que manifestó que "a su entender el instrumento no era para medir habilidades sino conocimientos", el resto de los participantes del taller estuvo en desacuerdo con este planteo, considerando que no se pueden medir habilidades si no se plantean a través de contenidos. Situación que permitió al equipo explicitar exhaustivamente el tema. Aclarado este punto, la docente manifestó que las habilidades aquí planteadas "eran un ideal, es lo que todo docente desearía lograr con sus alumnos, pero la realidad áulica es distinta", *aparentemente de menor rendimiento,* y "que este instrumento se alejaba de ella". En respuesta a ésta última inquietud, se hizo hincapié en las razones teóricas que hicieron que la investigación partiera de ese lugar, y que estas clasificaciones o escalas de madurez intelectual no debían bloquear el trabajo investigativo, sino por el contrario alentarnos a indagar, averiguar y comparar, en el propio contexto. Y así, a partir de un trabajo sistemático y analítico, determinar cuales son los factores que emergen del mismo, de manera tal de poder tomar posición frente a esquemas conceptuales generalizados, que muchas veces no son apropiados para las características culturales de la zona. De esta manera se buscó atemperar cierto clima de tensión que se percibía en el ambiente, generado por el recelo de los docentes de nivel medio respecto a la posibilidad de estar siendo evaluados por el equipo de investigación. Superado satisfactoriamente el momento, se continuó el intercambio de ideas en un ambiente más próspero, donde surgieron aseveraciones tales como "ningún alumno de la escuela media posee esas habilidades", "los alumnos sólo por la educación formal pueden adquirir esas habilidades", "la universidad debería partir de menos exigencias, ya que los alumnos no poseen estas habilidades al ingresar a la misma".

Respecto de la primera frase se indicó que la segunda parte de la actividad consistía en observar las tablas de resultados, que también se les había entregado y que, a partir de ella, sacaran sus conclusiones. También pudo demostrarse con ejemplos claros y sencillos, que no necesariamente, las habilidades lógicas del pensamiento se adquieren en la escuela sino que, muchas veces, se generan a partir de situaciones de la vida cotidiana. Se aprovechó ese momento para aclarar que las acciones que se indicaban en la teoría para evaluar cada habilidad estaban referidas a la matemática como disciplina, pero ello no implicaba que los jóvenes no puedan adquirir esas habilidades en otras asignaturas o en otros ámbitos.

En relación a la tercera observación, se aclaró que, justamente, está en debate en la sociedad cuáles deben ser las exigencias que la Universidad debe requerir a los aspirantes a ingresar a ella y que las cuestiones políticas, estructurales, económicas y sociales que están implicadas en ese debate, superan el alcance de este Taller por lo que el tema debiera discutirse en otra ocasión oportunamente citada para ello. Habiéndose extendido el tiempo más de lo estipulado se modificó parcialmente la programación, dejando el análisis de los resultados como trabajo individual de los participantes y con la misma mecánica anterior se procedió al trabajo con el 2º test.

Si en el análisis anterior nos llamó la atención que los profesores dudaran en cuestiones conceptuales con respecto a lo que es una habilidad, distinguir el campo de aplicación de las mismas y además cuales se necesitan previamente para resolver cuestiones matemática, en esta segunda instancia se notó un manejo más fluido del marco teórico enriqueciéndose por lo tanto la discusión.

Los profesores aportaron algunas ideas interesantes a modo de ajuste al diseño de los ejercicios, comentando acerca de maneras o formas comunes y cotidianas que tienen sus alumnos al momento de analizar ciertas problemáticas similares a las planteadas en el diagnóstico. Entre esas ideas, se puede destacar el haber encontrado que se podían evaluar otras habilidades que el equipo no había considerado. Como actividad final del taller se plantearon dos preguntas abiertas referidas a:

1.- Las estrategias didácticas que utilizarían para desarrollar en los alumnos la habilidad de clasificar.
2.- Obstaculizadores y facilitadores que encuentra en su práctica docente para el desarrollo de las habilidades lógicas antes trabajadas.

Respecto a la primera pregunta manifestaron la importancia de trabajar esta habilidad primeramente con elementos concretos, luego en relación con otras asignaturas como las Ciencias Biológicas, para finalmente abordar entes abstractos como los conceptos matemáticos. Resulta llamativo que los docentes insistan en trabajar con elementos concretos teniendo en cuenta la edad de los alumnos que cursan los últimos años de la escuela media.

Con respecto a la segunda contestaron que los obstáculos que se presentan son: el estudio de "memoria" "la incomunicación entre docente y alumnos" porque el alumno no posee el lenguaje matemático, "la falta de lectura", "el elevado número de alumnos por curso" " la resistencia a pensar", "los factores socio-culturales y socio económicos", "factores de arrastre de formación deficiente en la EGB I y II" entre los más importantes y entre los facilitadores puntualizaron "el trabajo tesonero de los docentes" y proponen "el uso de nueva tecnología" y "la generación de espacios extracurriculares".

Conclusión

Como ya se dijo, el taller realizado constituyó una prueba piloto con miras a verificar su viabilidad y a que permitiera hacer las correcciones necesarias para un mejor aprovechamiento del mismo al momento de aplicarlo ante un grupo mayor de profesores, abarcando el conjunto de las escuelas medias de la provincia. Desde esta perspectiva, el taller resultó satisfactorio tanto para el equipo de investigación como para los docentes participantes. Ello pudo constatarse por el nivel de participación así como por el entusiasmo puesto de manifiesto al momento del intercambio de ideas y de los aportes realizados por los docentes. Asimismo quedó determinado que se deben ajustar los tiempos estipulados para cada actividad ya que en esta ocasión no pudo realizarse el trabajo de análisis sobre los resultados de los alumnos.

Referencias Bibliográficas

Callis, J. (2001). *Lógica y aprendizaje matemático*. Documento presentado en el II seminario Internacional de Problemáticas Educativas "Matemáticas para el siglo XXI", Jujuy, Argentina.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1977). *Psicología del niño*. Madrid, España: Ediciones Morata.

Santos, N. (1988). *Sistema de habilidades lógicas relacionadas con los conceptos y los teoremas en la Matemática de las ciencias técnicas*. Disertación doctoral no publicada, Facultad de Matemática y Cibernética, Universidad Central de las Villas, Cuba.

Sanz, T. (1969). *Estudio de los procedimientos lógicos de identificación de conceptos y clasificación en estudiantes de ciencias técnicas* [Resumen]. Disertación doctoral no publicada, Facultad de Psicología, Universidad de la Habana, Cuba

Agostini, E., Royo, J., Torres, C. y Naraskevicins, M. (2004). Enseñanza de la Matemática: Habilidades lógicas presentes en los ingresantes a nivel superior. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 17, Tomo I, pp. 306 – 312). México

Hartamann, S. (1996). The world as a process. Simulations in the Natural and Social Sciences. En R. Hegselmann, U. Müller y K. Troitzsch (Eds.), *Modelling and Simulation in the Social Sciences from the Philosophy of Science Point of View* (pp. 77 – 100). Dordrecht: Kluwer

Una Propuesta para Reconstruir el Saber Didáctico y Matemático en un Curso de Actualización Docente

Yolanda Serres
Universidad Central de Venezuela
Venezuela
serresy@ucv.ve
Formación de Profesores – Nivel Básico

Resumen

El objetivo de esta investigación es diseñar una estrategia de reconstrucción colectiva del saber didáctico y matemático en un contexto de actualización de docentes de bachillerato. Para Fernández (1988) el éxito de la institucionalización del perfeccionamiento docente es directamente proporcional a la percepción que los profesores tienen del grado en que ellos han podido co-decidir y co-gestionar "su" propio perfeccionamiento. Por lo cual se ha propuesto que los docentes participen desde la escogencia de los temas para trabajar en el curso hasta el seguimiento de las actividades de regreso en el aula. La metodología que se utiliza para incorporar a los docentes a la investigación es la investigación acción. Las técnicas de recolección de la información son fundamentalmente entrevistas, observaciones participantes, notas de campo y el diario de campo llevado a cabo durante el Curso.

Planteamiento del problema

El conocimiento docente está en constante construcción, es por ello que para estudiar ese conocimiento es necesario considerar desde la planificación de las situaciones didácticas hasta la comunicación de los saberes y sus transformaciones en el aula. El conocimiento que tienen los docentes sobre su profesión, se ve reflejado en su discurso, en sus productos (materiales escritos, manipulables, actividades de aprendizaje) y en su práctica de aula.

Shulman (citado por Cohran-Smith y Lytle, 1993) al trabajar de forma intensiva con profesores noveles y experimentados, se dio cuenta, junto con sus colaboradores, de la amplia gama de categorías de conocimiento que los profesores poseen y utilizan. Su trabajo muestra cómo el conocimiento del profesorado es complejo, y se forma desde una trama en la que se interseccionan el conocimiento de la materia, de la pedagogía, del currículum, de los estudiantes y sus características, contextos, intenciones y valores educativos diversos, e ideas históricas y filosóficas fundamentadas. Para el trabajo con docentes de matemáticas se centrará la atención en los conocimientos de los docentes sobre las matemáticas, su didáctica, su filosofía y la psicología del aprendizaje de ésta; pues se concibe que la Educación Matemática es un área multidisciplinaria que está conformada por:

- La Matemática como materia esencial y científica a desarrollar en el proceso de aprendizaje y enseñanza (Mora, 2002a).
- La Didáctica como una ciencia de la comunicación de los conocimientos y de sus transformaciones (Brousseau, 2000).
- La Psicología Educativa que aporta resultados sobre las dificultades de aprendizaje y las estrategias que utilizan los estudiantes para construir los saberes matemáticos. (Bishop, 2000).

- La Filosofía de la Educación Crítica que orienta los objetivos de la Educación Matemática. (Skovsmose, 1994).

Se espera que un estudio en esta área abarque todo estos aspectos de manera integral, es decir, aborde las partes y las relaciones entre ellas teniéndolas siempre presente como un todo.
Ahora bien, en el contexto de un curso de actualización de docentes cuyo objetivo es discutir con los docentes algunos contenidos y estrategias para la enseñanza de las matemáticas, bajo la metodología de la investigación-acción surgen las preguntas:

- ¿Cómo lograr la mayor participación del docente en la reconstrucción de sus saberes?
- ¿Cómo reconstruir los saberes matemáticos y didácticos de forma colectiva?

Marco teórico

Según Valdez (2001) en la tradición magisterial se ha privilegiado el discurso retórico, por encima del cambio procedimental. Para Blanco (citado por Valdez 2001) hoy día prevalece un saber estático que no impacta el trabajo en aula, se hace necesario modificar las formas de interlocución para impulsar el desplazamiento hacia los saberes dinámicos, que vinculen las teorías con las formas efectivas de ponerlas en práctica, muy especialmente en lo que toca a la enseñanza. En un primer plano queda el docente como aprendiz de ambos tipos de saberes, y en un plano más profundo e importante, como diseñador de situaciones didácticas que promuevan saberes aprovechables y movilizadores de la actividad de sus estudiantes. Es aquí donde los saberes han de ser transformados en acciones, pues la esencia misma de la docencia está en la puesta en práctica a partir de una teoría iluminadora. (Valdez, 2001)

Plantea Fernández (2000) acerca de la mejora de la calidad de la educación que la realidad de los educacionistas actuales hace ya tiempo ha descubierto una situación cuyo esquema lógico podría sintetizarse así:

- La investigación educativa ni puede ni debe tener otro objetivo que el de la mejora de la calidad de la educación,
- La investigación educativa jamás mejorará la calidad de la educación real, hasta que sus conclusiones y/o recomendaciones no entren en las aulas, ni lleguen a informar/fundamentar lo que se hace o se deja de hacer en ella,
- Lo que se hace o se deja de hacer en las aulas difícilmente cambiará si los docentes no interiorizan qué hay que hacer o dejar de hacer y por qué,
- Los docentes nunca entenderán que tienen qué hacer, si, de alguna manera, no han recorrido el camino, lógico y pragmático, que conduce de las razones o porqués, a las recomendaciones didácticas y pedagógicas,
- Los docentes permanecerán ajenos sistemáticamente al recorrido del camino tecnológico antedicho, si no participan, de alguna manera, en la investigación educativa cuyas conclusiones sustentan racionalmente los cambios aconsejables para su práctica en las aulas, pues "no comprenderán lo entendido".

Se plantea entonces la pregunta ¿de qué manera puede organizarse, en la práctica, esa participación de los docentes en tareas concretas de investigación y qué instrumentos y técnicas podrían ellos aplicar, sin que la investigación se trivializase? (Fernández, 2000).

Para Elliott (2000) las técnicas y métodos para conseguir pruebas en la fase de detección del problema de la investigación-acción son: - los diarios, llevados de forma permanente; - los perfiles, los cuales proporcionan una visión de una situación o persona durante un período de tiempo; - el análisis de documentos como programas, planes de evaluación, pruebas, tareas, libros de texto, trabajos de los estudiantes; - datos fotográficos, de los estudiantes mientras trabajan, de la distribución física del aula y su organización social, de lo que ocurre "a espaldas del docente", la postura y posición física del docente cuando se dirige a los estudiantes; - grabaciones de audio y vídeo y transcripciones, para grabar clases; - utilización de observadores externos; -las entrevistas, pueden ser estructuradas, semiestructuradas o no estructuradas según su objetivo y el momento de la investigación en que se utilicen; - la triangulación de información; -los informes analíticos. Todas estas técnicas y métodos pretenden abarcar la práctica educativa desde su complejidad y a todas las personas involucradas de manera de mejorar la calidad de la educación a través de la transformación de reflexiones en acciones desde y para los docentes.

Plantean Porlán y Martín (1993) en su libro *El diario del profesor. Un recurso para la investigación en el aula* que el diario del profesor puede tener distintas funciones: .- detectar problemas y hacer explícitas las concepciones; .- cambiar las concepciones; .-transformar la práctica.

Se propone este recurso para la reconstrucción de los saberes de los docentes en el marco de un Curso de Actualización dictado por la Secretaría de la Universidad Central de Venezuela, denominado Samuel Robinson va al Liceo.

En un primer momento, el diario ha de propiciar el desarrollo de un nivel más profundo de descripción de la dinámica del Curso a través del relato sistemático acerca de qué se va a reflexionar, cómo se lleva a cabo la discusión y a qué conclusiones se llega (¿qué acciones puede implicar?). (Porlán y Martín, 1993)

Se busca reconstruir el conocimiento matemático y de las didácticas de las matemáticas de los docentes, tratando de categorizar las ideas según se relacionen con el saber matemático en sí, con la comunicación y transformación de ese saber, con el aprendizaje o con los objetivos de la enseñanza.

El análisis de las ideas hechas permitirá detectar construcciones conceptuales acerca de la matemática, su didáctica, su aprendizaje y sus objetivos, como también problemas prácticos que para ser resueltos exigen un plan de acción.

Plantean Porlán y Martín (1993) que los problemas no tienen por qué ser preguntas explícitamente formuladas y que estos se aclaran y delimitan en la medida que van siendo investigados…el problema es un "proceso" que se va desarrollando, reformulando y diversificando. En cuanto a las condiciones del problema estos autores agregan que una de las condiciones que debe reunir cualquier estrategia didáctica, tomándose aquí como cualquier plan de acción, es la de poder adaptarse a dicha diversidad y complejidad pues siempre en un grupo de personas, sean de la edad que sean, se encuentra una diversidad importante de niveles de desarrollo, niveles de conocimiento, tipos de personalidad, diversidad de expectativas, intereses, etc. Por último, comentan que se tiene la sensación de que los problemas que se plantean son exclusivos de una clase y que cuando se comparte crítica y rigurosamente en un equipo de trabajo, la comprensión de los acontecimientos pasa generalmente a un nivel superior, y los problemas ya no son únicos de una clase o de un docente: son problemas profesionales compartidos y, por tanto, más objetivables en su primera formulación.

Para cambiar las concepciones, las cuales no sólo determinan la manera de ver la realidad sino que "de hecho" guían y orientan la actuación en el aula y son resistentes al cambio se pueden someter a procesos continuados de contraste con la propia realidad o con otras concepciones y puntos de vista, suelen aparecer contradicciones y evidencias que pueden llevar a la modificación, ampliación o sustitución de las mismas. (Porlán y Martín, 1993)

El diario del profesor permitirá pues hacer explícitas las concepciones, detectar los problemas de la educación matemática que se imparte, contrastar las concepciones con la realidad del aula y con los resultados de investigación y hacer planes de acción que pretendan cambiar las concepciones y resolver los problemas reales de la educación.

Marco metodológico

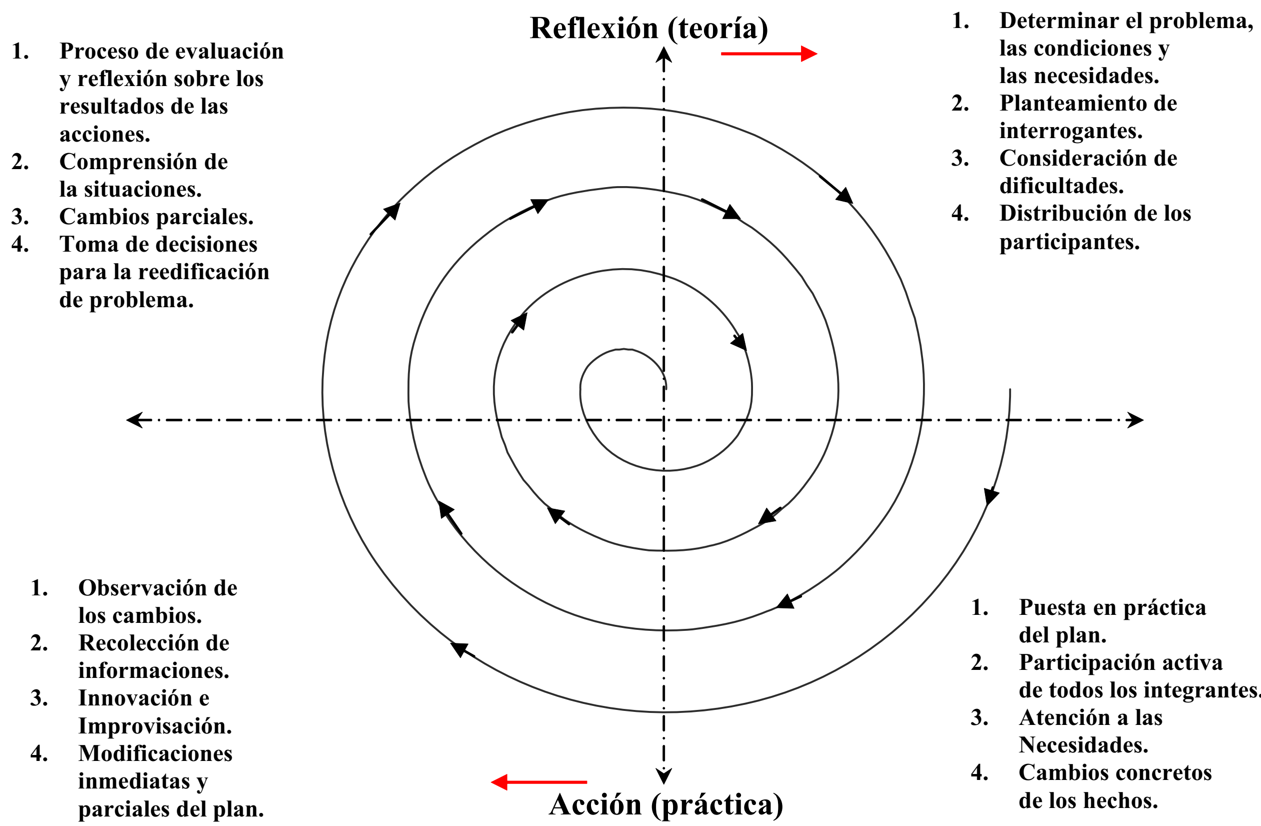
Una investigación educativa que ignora el carácter mediacional del docente como variable sistemáticamente independiente, está utilizando un diseño no-válido, en términos estrictos de validez intrínseca, pues no se investiga lo que se dice se quiere investigar, la realidad de la educación, ya que el docente es, en realidad, un foco tozudamente generador de variables nuevas…una investigación que decida no ignorar el lugar decidor original de los docentes en el acontecer del aula, no puede tenerlos en cuenta sólo para investigar *sobre ellos*, sino que, de alguna manera, deberá investigar *con ellos.* (Fernández, 2000). Es por ello que esta investigación se declara una investigación-acción, donde el proceso de planificación, acción y reflexión con los docentes es permanente, siendo también la metodología de trabajo declarada por el Curso de Actualización en el cual se lleva a cabo la investigación.

La investigación acción reúne tres características fundamentales: (Carr y Kemmis, 1988)

1. Es democrática, todos los que están vinculados con la investigación cumplen una función básica durante cada una de las fases del proceso de la investigación.
2. Es participativa, no puede existir una auténtica investigación acción si algunos de sus miembros se convierte solamente en objetos de la investigación.
3. Es colaborativa, exige de las personas vinculadas directa o indirectamente con la investigación la disponibilidad y colaboración inmediata para que se realicen con éxito cada una de las fases que componen la espiral cíclica de la investigación durante todo el proceso investigativo.

En este sentido, la política del Programa Samuel Robinson va al liceo es un marco de trabajo ideal pues éste pretende involucrar a los docentes en los cambios educativos necesarios para mejorar la calidad de la educación matemática que imparten en sus instituciones.

El diario de la investigadora jugará el papel del instrumento principal de recolección de la información, pues servirá para captar cada fase del proceso de investigación.
El diseño se orienta por el siguiente esquema general (Mora, 2002b):



Primeros resultados

En el caso de la Unidad Educativa Nacional Teresa de Bolívar, participante en el Programa Samuel Robinson, se está trabajando actualmente con un grupo de docentes quienes en su proyecto del Centro de Reflexión y Actualización del Profesorado (CRAP) plantearon cómo problema la cantidad de reprobados en el área de matemáticas de séptimo grado de Educación Básica. Los docentes mencionan que "el índice de alumnos reprobados está asociado a diversos factores entre los que destacan: el interés de los alumnos, las estrategias pedagógicas utilizadas por los docentes, la carga horaria del plan de estudio, el contenido programático y los conocimientos previos, entre otros". Y en cuanto a las estrategias metodológicas se dice que son tradicionales, por lo general el método expositivo y la resolución de problemas; por lo cual deciden analizar las estrategias que utiliza el docente de 7° grado en el área de matemáticas argumentando que es el factor sobre el cual tienen mayor incidencia.

Se les ofreció un Taller sobre iniciación al álgebra, contenido presente en el programa de ese grado, de manera de discutir más a profundidad las estrategias utilizadas. En este Taller surgió la necesidad de reflexionar no sólo sobre estrategias sino también sobre dificultades de aprendizaje. A cada docente se le solicitó participar en ambos sentidos: describiendo las estrategias que utilizaba para comenzar el estudio del álgebra y mencionando las dificultades que presentaban los estudiantes. Luego, a cada uno se le entregó un material preparado por la investigadora donde se reportaban algunos resultados de investigación referentes a estrategias para enseñar álgebra y algunas dificultades de su aprendizaje. El objetivo era que contrastaran sus experiencias con los resultados hallados en otras latitudes y pudieran pensar en la posibilidad de actuar de manera sistemática para resolver el problema.

Las ideas centrales que se discutieron, grabadas y reportadas en el diario de la investigadora, fueron los métodos de despeje de una ecuación y la resolución de problemas literales. En cuanto a los métodos de despeje surgieron términos imprecisos para explicar la técnica ("hay que quitar lo que molesta", "se comienza por lo que está más lejos de la incógnita") y un docente planteó la inquietud de que los estudiantes pasan de grado sin saber hacer correctamente los despejes, enfatizando en lo básico de ese conocimiento para hacer matemáticas. A partir de estas ideas se planteó la discusión acerca de qué es la matemática y qué es lo que se debe enseñar, dónde se debe hacer énfasis, ¿en lo procedimental? En cuanto a la resolución de problemas casi toda la discusión se centró en las dificultades para interpretar los enunciados, pues una vez que se logran plantear las relaciones a través de ecuaciones surgen las mismas dificultades que con el despeje de ecuaciones. No surgieron comentarios acerca del proceso de contextualización ni de verificación de las soluciones de los problemas. Se discutieron ideas sobre cómo ayudar a los estudiantes en la comprensión de los problemas, tanto cualitativa como conceptualmente.

La participación de los docentes fue activa y significativa, se vinculó con otras áreas como la física, la química y la biología (lo referente a solución de problemas) se percibe la necesidad de llegar a conclusiones que permitan avanzar en el análisis de los problemas planteados y en la puesta en marcha de un plan acción para superarlos. Dicho en términos de la investigación-acción se mantiene el trabajo en una reflexión teórica que no conlleva a una acción práctica.

Referencias Bibliográficas

Bishop, A. (2000). *Matemáticas y Educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Madrid: GRAO.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática 12*(1). 5 - 38.

Carr, W. y Kemmis, S. (1988). *Teoría crítica de la enseñanza*. Barcelona: Martínez Roca.

Cohran-Smith, M. y Lytle, S. (1993). *Dentro/Fuera Enseñantes que investigan*. Madrid: Akal.

Elliott, J. (2000). *El cambio desde la investigación-acción*. Madrid: Morata.

Fernández, P. M. (2000). *La profesionalización del docente. Perfeccionamiento. Investigación en el aula. Análisis de la práctica*. México: Siglo Veintiuno.

Mora, D. (2002a). *Didáctica de las Matemáticas*. Caracas: EBUC.

Mora, D. (2002b). [Aplicación metodológica de la investigación acción.] Datos en bruto no publicados.

Porlán, R. y Martín, J. (1993). *El diario del profesor. Un recurso para la investigación*. Serie Práctica. Sevilla: Díada.

Skovsmose, O. (1999) *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. (P. Valero, Trad.). Bogotá: una empresa docente. Universidad de los Andes.

Valdez, E. (2001). Los Recursos Didácticos y la Formación Docente. Un punto de vista histórico-cultural. En G. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 14, pp. 3 -13) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Diseño de Gráficas a partir de Actividades de Modelación

Liliana Suárez, Carolina Carrillo y José Iván López
Cinvestav - IPN
México
lsuarez@cinvestav.mx, ccarrill@cinvestav.mx, jilopez@cinvestav.mx
Socioepistemología – Nivel Superior

Resumen

Este documento reporta los resultados obtenidos de tres situaciones de aprendizaje aplicadas en diversos talleres con profesores de matemáticas cuya actividad central es dar cuenta de una situación de movimiento a partir del contraste de dos gráficas, una generada con las concepciones propias sobre el movimiento y otra generada por una calculadora a través de datos obtenidos por un sensor. Se observan elementos para ampliar la gama de situaciones de movimiento con los que se puede caracterizar un nuevo uso de las gráficas.

Uso de gráficas en situaciones de movimiento

La problemática en la cual se inscriben las exploraciones que presentamos en este escrito se relaciona con la búsqueda de explicaciones sobre la construcción de conocimiento a partir de descripciones en las que haga uso de él a través de las prácticas sociales (Véanse elementos teóricos en Cantoral y Farfán, 2003; Cordero, 2003).

En Torres (2004) se describen los significados, procedimientos y argumentos que caracterizan un uso de las gráficas a partir de actividades de modelación con tecnología que permite tomar datos. Las exploraciones que presentamos a continuación tienen como principal propósito ampliar la gama de situaciones de movimiento a modelar y el análisis de las gráficas asociadas.

Con 'actividades de modelación' nos estamos refiriendo a aquellas que están centradas en ver cómo funciona una situación de movimiento. Estas actividades incluyen en su diseño la variación de los elementos (parámetros) que intervienen.

El trabajo con la tecnología: el sensor de movimiento, el analizador de datos (que permite la transducción) y la calculadora que realiza una gráfica a partir de los datos numéricos obtenidos, reproduce la situación que nos interesa. A partir de diversas realizaciones del movimiento ante el sensor la calculadora muestra las gráficas de ese movimiento.

El proceso que realiza la tecnología es explícito pero permanece en un segundo plano. El énfasis se desplaza del adiestramiento en el uso de la calculadora, el analizador de datos y los sensores hacia su uso para obtener gráficas que se esperan. De esta forma, lo que importa, en el camino: se abra paso hacia la discusión y estudio de ideas matemáticas.

Situaciones de movimiento

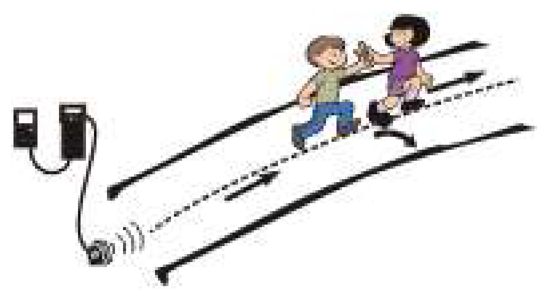
a) Movimiento pendular

La Situación
Mediante un cuerpo sujeto a una superficie, lo suficientemente alta, se simula un movimiento pendular.
Se hacen variaciones de los parámetros que intervienen en dicho movimiento con el fin de observar de qué manera influyen en las gráficas que los representan.

Modelo gráfico
En esta situación se pide a los participantes que representen, a priori, un movimiento pendular mediante una gráfica.

La simulación
Mediante el uso de las calculadoras y sensores se propone una nueva forma de graficar sin tener necesariamente que pasar por las tablas de valores a las que los alumnos están acostumbrados. De manera tal que podemos modelar la situación, hacer cambios en las variables que intervienen (la longitud, el peso, el ángulo) y confrontar las gráficas obtenidas hasta poder conjeturar acerca de las propiedades de dicho movimiento.

b) Movimiento de personas



La situación es una carrera de relevos

Un equipo de corredores tiene como meta recorrer una distancia fija en el menor tiempo posible. Un participante del equipo corre a la vez. Cada cierta distancia otro de los participantes espera para recoger la estafeta del corredor y continuar la carrera.

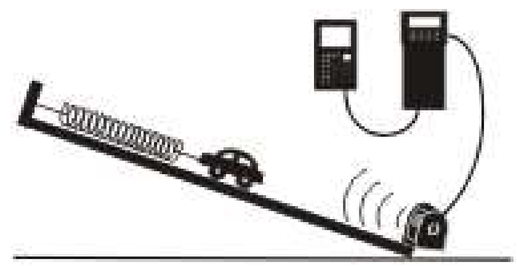
Modelo gráfico
Se pide diseñar una gráfica que describa los cambios de posición de un equipo de corredores en una carrera de relevos. En el momento de realizar esta tarea se toman decisiones: la distancia de la carrera, el número de corredores y la distancia que recorre cada uno de ellos.

La simulación

Se simula el movimiento frente al sensor para obtenerlas. El movimiento se adapta al alcance del sensor. La "carrera" se realiza en un espacio de cuatro o cinco metros con dos o tres corredores. El tiempo que dura va de 5 a 10 segundos. A partir de múltiples realizaciones se establecen relaciones entre las características del movimiento y los diversos comportamientos gráficos obtenidos en la calculadora.
Finalmente se ajusta el modelo gráfico original dando cuenta de la situación planteada.

c) Movimiento oscilatorio amortiguado

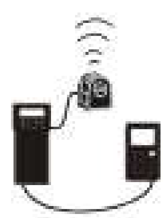
En este caso se presentan dos situaciones, en la primera de ellas un cuerpo atado a un resorte se desliza sobre una superficie, el ángulo de inclinación de ésta se varía en dos ocasiones, primero cuando el cuerpo está estático y la superficie horizontal y, después, cuando el cuerpo ha quedado estático después de esta primera variación del ángulo.



En esta segunda situación se presenta una variación de la anterior, en este caso se ha eliminado la fricción que produce la superficie, y el cuerpo ahora es un contenedor atado a un extremo de un resorte y el otro extremo de éste se encuentra fijo a un techo.
El contenedor se encuentra estable, hasta que en determinado momento un cuerpo se pone dentro del contenedor.

Modelo gráfico

En un primer momento se les pide diseñar una gráfica que describa los cambios de posición del cuerpo, al ser modificado en dos ocasiones el ángulo de inclinación de la superficie. Se han de tomar decisiones sobre las escalas y el tiempo que en el que se realizará el experimento.



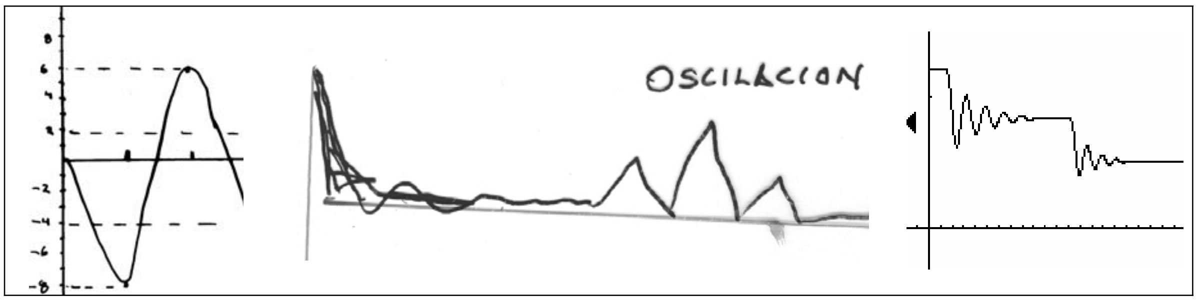
La simulación

Se simula el movimiento frente al sensor para obtenerlas. El movimiento se adapta al alcance del sensor. En este caso, mediante la repetición de toma de datos, se logra una gráfica que describe el movimiento.

Después de esta toma de datos se procede a un contraste y un posterior ajuste de la primera gráfica con la que produce la tecnología**.**

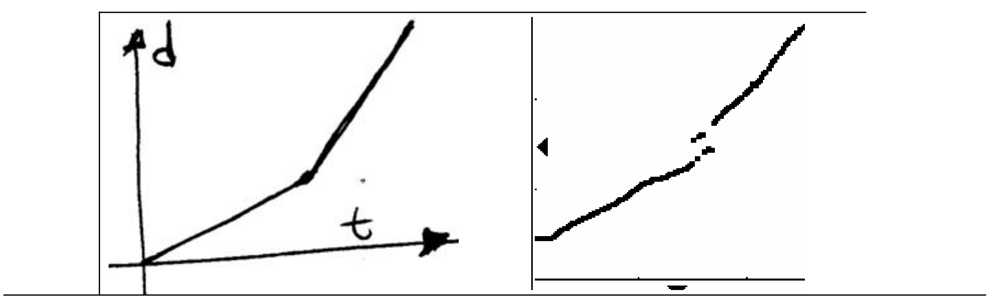
Observaciones realizadas con profesores de matemáticas

Se pudo observar que la confrontación entre las gráficas produce una ruptura entre las primeras concepciones de los participantes y las que se generan en la simulación del movimiento. Una de las concepciones recurrentes, observadas en el trabajo con los estudiantes de bachillerato, licenciatura, posgrado y profesores de matemáticas, está relacionada con el uso de líneas rectas (Suárez, 2002). En la descripción de movimientos con velocidad variable, por ejemplo partiendo del reposo hasta alcanzar cierta velocidad, el movimiento se describe sólo con funciones lineales, como muestran las gráficas realizadas por los participantes, contrastada con la que se genera con el sensor.



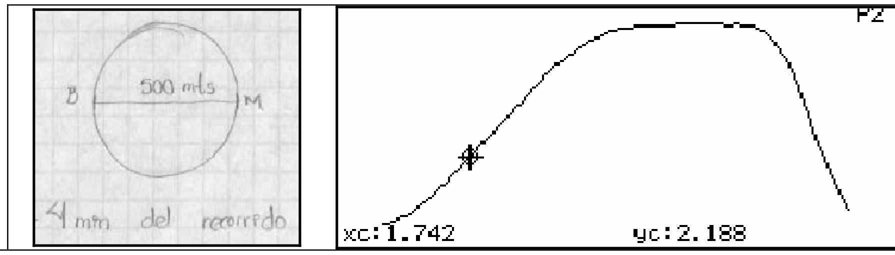
Trazos rectos y curvos a) y b) reportes de profesores, c) pantalla calculadora

Otra de estas concepciones se genera en las situaciones que generan gráficas discontinuas. Los participantes, en una primera explicación por medio de una gráfica, proponen una gráfica continua, misma que se contrasta con la que se genera por medio de la toma de datos (modelación de la situación).



Trazos continuos y discontinuos a) reporte de profesores,b) pantalla calculadora

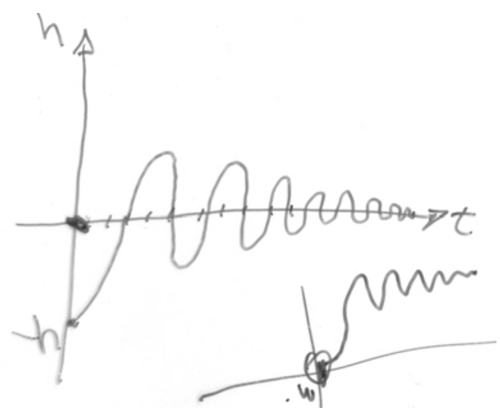
En algunos casos se hizo evidente una visualización de una gráfica, relativa a un tipo de movimiento, como si se tratara de una trayectoria, en estos casos se observó que en situaciones en las que el cuerpo regresaba a su posición de inicio, se expresaba una necesidad de hacer un gráfico cerrado cuyo principio y fin estuviese en el origen, esta concepción, viene probablemente de los primeros grados de enseñanza, en que un eje cartesiano es usado de manera exclusiva para localizar puntos en el plano como si se tratara de un mapa.



Trazos continuos y discontinuos a) reporte de profesores,b) pantalla calculadora

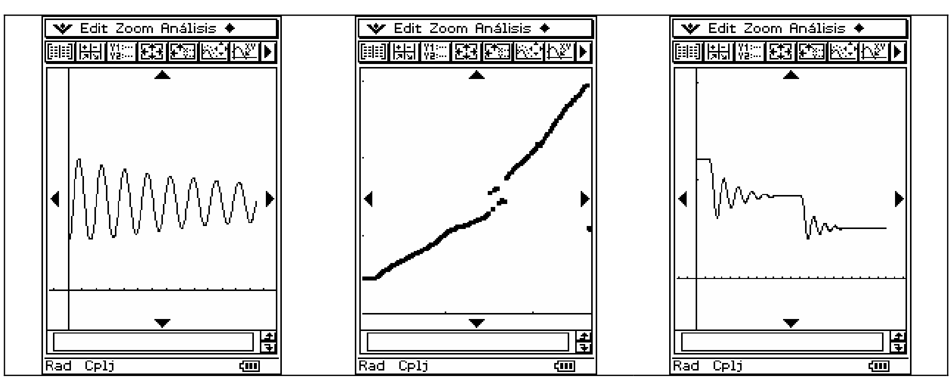
En el caso del movimiento pendular, una observación interesante es que al variar el peso del péndulo los participantes esperan cambios en el movimiento y por lo tanto de la gráfica, algo semejante a lo que sucede cuando pensamos en la caída libre de dos pesos distintos, pero podemos observar que no es así.

Cuando se pide generar una explicación del fenómeno por medio de una gráfica, los participantes deben tomar decisiones sobre los parámetros de la observación a realizar, en estos casos, aún cuando estas decisiones son diferentes entre distintos participantes, la explicación tiende a ser la misma, uno de esos parámetros a decidir es el punto desde el cual será observado el fenómeno, que traducido a términos de la gráfica significa dónde localizaremos el origen.



Conclusiones

La obtención de gráficas con la calculadora a través de la toma de datos con el sensor se ha identificado como un motor que lleva a múltiples realizaciones en las que se toman decisiones sobre las características que se varían en cierta situación para la obtención de determinada gráfica.



Pantallas obtenidas con la calculadora

Con estas actividades se ha observado que se puede tener una relación entre las características de una situación en términos de las magnitudes medibles y las características gráficas.

Se encontró que las ideas matemáticas surgieron a partir de la discusión entre los participantes de los talleres, ideas como la de relacionar velocidades con pendientes, en la cual se argumentaron tanto a nivel de la situación a simular como de la gráfica, así como de asociar a la velocidad en un sentido positiva y cuando el movimiento era opuesto era de signo negativo.

En el caso de las gráficas, pasaron de ser el mero objetivo, como el que se le da en la enseñaza tradicional, a ser un medio mediante el cual los participantes generan las explicaciones de las situaciones planteadas, para las cuales la tecnología fue un medio, que si bien se sitúa en segundo plano, permitió el contraste entre las gráficas que revelan sus concepciones (no todas acertadas) y aquellas que provienen de una toma experimental de datos.

El objetivo de los diversos talleres era el de generar una discusión que diera cuenta de una situación de movimiento a partir del contraste de dos gráficas, en este sentido creemos se cumplió ampliamente.

Referencias Bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R.M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 6*(1), 27-40.

Cordero, F. (2003). Lo social en el conocimiento matemático: los argumentos y la reconstrucción de significados. En J. R. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Vol. 16, Tomo 1. pp. 73 - 78). Chile: Clame.

Cordero, F. (en prensa). La modelación y la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa IPN.*

Suárez, L., Carrillo, C. y López, J. (2004). Diseño de gráficas a partir de actividades de modelación [Resumen] *Resúmenes de la Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, México, 221.

Suárez, L. (2002). *Actividades de simulación y modelación en el salón de clases para la construcción de significados del Cálculo*, Manuscrito en preparación. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Torres, A. (2004). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología*. Tesis de Maestría no publicada. CICATA-IPN.

Desarrollo de Habilidades del Pensamiento en Forma de Conceptos

Tania Toledo y Violeta Fernández
Instituto Superior Pedagógico "José de la Luz y Caballero"
Cuba
tania@isphlg.rimed.cu
Formación de profesores – Nivel Medio

RESUMEN

Para un aprendizaje activo y significativo y con el fin de lograr el desarrollo del pensamiento, se necesita la preparación del docente sobre: el análisis que debe realizar de los programas de estudios respecto a las habilidades del pensamiento a desarrollar según el nivel de enseñanza y el diagnóstico que posee de sus estudiantes. El objetivo es, exponer una propuesta didáctica para la formación de alumnos de la Facultad de Profesores Generales Integrales (PGI) y que pueda ser consultada por los profesores del nivel medio ya formados, sobre la estimulación de procedimientos y habilidades del pensamiento que se asocian a la elaboración de conceptos matemáticos en secundaria básica, a través de el desarrollo de cada una de las fases por la que transcurre este proceso, teniendo en cuenta las transformaciones que en este nivel ocurren en Cuba.

Introducción

Según investigaciones realizadas (MINED 2001) es una problemática existente *la forma limitada y en ocasiones de manera espontánea conque se realiza la estimulación del desarrollo intelectual* y en ello incide entre otros factores, *la insuficiente atención por el profesor a las formas de orientación y control de la actividad de aprendizaje, que propicien eliminar la tendencia poco reflexiva de los estudiantes a la ejecución, presentes en el proceso de enseñanza aprendizaje* y en no pocas regiones del mundo.
El matemático y en particular en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática se trabaja conceptos cada vez más abstractos , el pensamiento matemático no es más que una forma específica de expresar el proceso general del pensamiento
Para pensar en forma de concepto y el desarrollo de las habilidades intelectuales que se le asocian requieren que se estimule de manera sistemática los distintos procedimientos lógicos que los sustentan, el resultado de este proceso no es un simple reflejo de la realidad sino la elaboración sistemática, en la actividad matemática. Es esta asignatura, quien por su carácter deductivo, por excelencia incide en el desarrollo del pensamiento lógico del educando.

En este trabajo se aborda una propuesta didáctica sobre el desarrollo de habilidades del pensamiento relacionadas con la forma lógica conceptos, ejemplificada en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática sobre la base de la estimulación de los distintos procedimientos lógicos que se le asocian.

El objetivo de la propuesta es, la preparación del profesor en formación del primer año de la facultad de Profesores Generales Integrales de Secundaria Básica para su desempeño profesional en el desarrollo de habilidades intelectuales, asociadas a la elaboración de conceptos matemáticos.

Se expone cuándo y cómo realizar la estimulación de los procedimientos lógicos del pensamiento asociados al proceso de enseñanza aprendizaje de los conceptos matemáticos. Constituye un complemento de las orientaciones didácticas existentes sobre la realización del proceso de enseñanza aprendizaje de un concepto, que aparece en el programa de metodología de la enseñanza de está asignatura.

Está sustentada por el enfoque socio cultural de Vigostky; la teoría sobre el pensamiento, de autores de la sicología marxista; los resultados del proyecto dirigido por la doctora García(2003) sobre la estimulación de los procedimientos lógicos; la teoría sobre el desarrollo de los procedimientos lógicos del pensamiento asociado a los conceptos de Campistrous (1993); la tipificación de las tareas docentes realizada por Garcés(2003) y la teoría sobre la metodología de la enseñanza aprendizaje de los concepto que sustentan el programa de Matemática y su metodología del primer año en la facultad de PGI. DESARROLLO

Al iniciar la propuesta se relacionan los procedimientos lógicos del pensamiento que se le asocian al proceso de elaboración de los conceptos en general y que de manera sistemática se han formado en la enseñanza primaria. Se describe además la estructura interna de cada uno de ellos y sistemas de preguntas que le facilitan la estimulación de estas acciones.

La propuesta complementa las orientaciones metodológicas existentes sobre la elaboración de un concepto y transcurre por las siguientes fases.

- Fase de *autopreparación* (se identifican los procedimientos lógico que se le asocian y se proyectan tareas y sistemas de preguntas para realizar el diagnóstico)
- Fase de *diagnóstico* (diagnosticar habilidades y procedimientos lógicos identificados y retroalimentar la autopreparación)
- Fase de *formación del concepto* (lograr la estimulación de los procedimientos lógicos facilitando que el estudiante sea el principal protagonista de este proceso).
- Fase de *fijación del concepto* (elaborar tareas para la estimulación de procedimientos lógicos teniendo en cuenta el diagnóstico).
- Fase de *Evaluación y control* (elaborar tareas docente para regular el proceso de estimulación de los procedimientos lógicos).

Dinámica de la propuesta

En la fase de autopreparación el profesor debe:

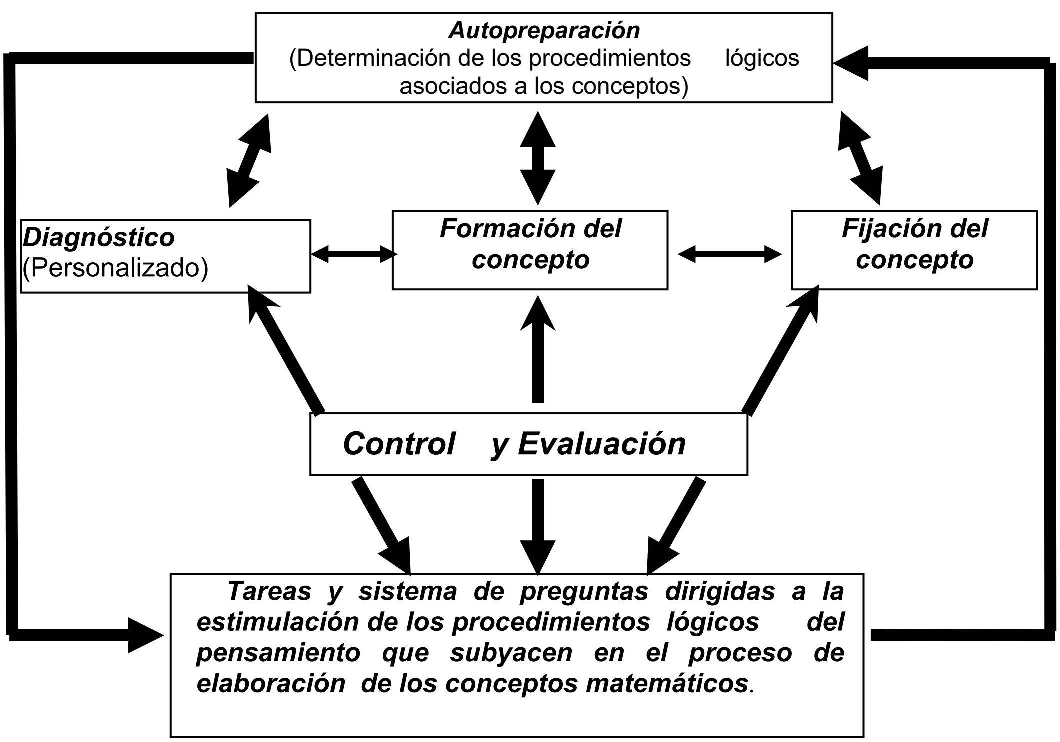
•Determinar contenido del concepto a elaborar y los que lo sustentan.
•Investigar utilidad práctica que tiene para el alumno el conocimiento del concepto o el empleo en su contexto cultural.
•Estilo de aprendizaje de los estudiantes.
•Horas clases de que se dispone para su tratamiento.
•Procedimientos lógicos del pensamiento a estimular, en correspondencia con el concepto, con la fase de elaboración de que se trate y el desarrollo intelectual de los estudiantes.

En la fase de diagnóstico, el profesor elabora tareas y sistemas de preguntas que le permitan diagnosticar el desarrollo intelectual del profesor en formación, en particular el grado de independencia que poseen para identificar los conceptos que lo sustentan, deducir otras propiedades de sus representantes, ejemplificarlos y clasificarlos, atendiendo a determinados rasgos.Se deben elaborar tareas docentes para la búsqueda y procesamiento de la información, por ejemplo donde se evidencie la utilidad del concepto en el contexto, la presencia del mismo en la sociedad o donde tengan que ir a la Enciclopedia Encarta u otras fuentes de información para resolverlas, porque se le pide hacerlo o porque lo necesite aunque no se le exija de manera explícita, anexos (1,2). Se elaboraran tareas docentes evaluativas y sistemas de preguntas para diagnosticar las habilidades en la utilización de los procedimientos lógicos.

Fase de formación del concepto, no deben faltar tareas docentes y sistema de preguntas con el objetivo de que sea el estudiante el principal protagonista al revelarse la nueva información, en la determinación de características de la clase de objetos, operaciones o relaciones de que se trate, en la distinción de los sistemas de características que los identifican y que le facilite al profesor en formación modos de actuación para la realización de la inducción o deducción del concepto (ver anexo 3). Las tareas evaluativas en esta fase le van a permitir la actualización del diagnóstico sobre el desarrollo intelectual del profesor en formación asociadas a conceptos se sugiere tareas donde a través del lenguaje exterioricen los conocimientos, por ejemplo redactar resúmenes , composiciones u oraciones sobre el concepto , sus características esenciales, su clasificación y su utilidad práctica o matemática.

Fase de consolidación o fijación del concepto, el profesor elabora tareas docentes de aplicación y sistema de preguntas que propicien la estimulación de los procedimientos lógicos que se tienen en cuenta en la fase de diagnóstico, ahora teniendo en cuenta el contenido del concepto formado, los conceptos superiores colaterales , subordinados, casos especiales y extremos y conocimientos de otras áreas matemáticas , otras disciplinas y la vida. Las tareas evaluativas le permiten diagnosticar el grado de independencia cognoscitiva que va desarrollando el estudiante a través de la fijación de los nuevos conocimientos.

Fase evaluativa se realiza a través de todo el proceso , está presente de alguna forma en todas las fases. Son útiles las tareas donde se le pida redactar resúmenes, composiciones u oraciones sobre el concepto y su utilidad práctica o matemática.
El esquema siguiente muestra la relación entre las fases de la propuesta



La propuesta es aplicada por el profesor especialmente en el desarrollo del progarma de Matemática en el primer bloque y en el segundo bloque se complementa la metodología para el tratamiento de conceptos matemáticos y se ejemplífica con la realización de la planificación de clases por el profesor en formación, donde se elabora el concepto y donde se aborden las distintas formas de fijación .

Resultó de especial atención entrelazar esta propuesta en la realización de la forma lógica del pensamiento razonamiento, cuando el profesor en formación argumenta o fundamenta .
Aprender a argumentar representa en los alumnos un importante aporte en la consolidación de los conocimientos científicos, a la asimilación de normas, principios, o valores según las situaciones en las que se use, y en todos los casos, a la formación de la personalidad de los alumnos. (López, M 1990).

Teniendo como base la estructura funcional de esta habilidad dada por la MsC Fernández (2000) de la habilidad argumentar donde tiene en cuenta las siguientes acciones:

1. *Observar*: Para ello el alumno debe: examinar atentamente el problema a resolver, determinar el objeto de observación y los objetivos de la observación, separar lo esencial de lo no esencial, fijar los rasgos y características del objeto observado con relación a los objetivos, establecer vínculos y relaciones entre los distintos elementos de un todo, comparar las diferentes partes.
2. *Recordar conocimientos previos*: Para ello el alumno debe extraer a su memoria un conocimiento, el maestro debe estimular y promover al alumno a que tenga presente un conocimiento ya adquirido y que es indispensable para fundamentar posteriormente sus argumentos, es decir, el alumno debe estar claro de cuáles son las propiedades, definiciones, conceptos, etc., que avalan esa argumentación para ello el alumno debe: ubicar en qué unidad de materia se encuentra la argumentación a realizar, determinar con precisión el contenido y la extensión de los conocimientos y capacidades necesarias, determinar con mayor precisión posible los conocimientos y las habilidades objetivamente necesarias sobre la base de los requerimientos de la nueva materia.
Sin la presencia de esta acción no puede haber argumentación, pues se argumenta sobre lo que se conoce, sobre lo que se domina... Debe tenerse en cuenta que el alumno en ocasiones no puede argumentar ante la interrogante del maestro o de su compañero de clase porque sus conocimientos previos fallan. Puede que a veces la indicación del maestro de que argumente sea prematura en relación a los conocimientos previos de sus alumnos.
3. *Analizar la situación dada*: Para ello el alumno debe determinar los criterios para el análisis, descomponer en elementos el objeto o fenómeno, sus rasgos, funciones y aspectos que dan pie al objetivo final de la argumentación, y determinar los principales nexos y relaciones cualitativos y cuantitativos que existen entre los principales elementos que componen las condiciones del problema y la relación en que estos se hallan respecto a la exigencia planteada. Todo esto permite al alumno representar el problema que está por resolver.
4. *Seleccionar juicios o argumentos que corroboran el juicio final:* Para ello el alumno debe determinar, los criterios o indicadores, los conceptos, propiedades, relaciones, etc. que le permiten a partir de ellos llegar a la argumentación. Es necesario tener en cuenta que pueden existir diferentes tipos de argumentos como base de la argumentación.
5. *Valorar la vía de solución*: Para ello el alumno debe caracterizar el objeto de valoración, establecer los criterios de valoración, comparar el objeto con los criterios de valor establecidos y elaborar los juicios de valor a cerca del objeto.

A manera de resumen queremos destacar que las acciones propuestas para la habilidad de argumentar no constituyen una sucesión algorítmica rigurosa que tiene lugar por igual para todos los alumnos. Por ello hay que tener en cuenta las particularidades de cada alumno.

Conclusiones

- La Propuesta Didáctica explica cómo y cuándo planificar la estimulación de los procedimientos lógicos del pensamiento asociados a conceptos y se dan orientaciones sobre cómo beben realizar una autopreparación sobre el contenido del concepto, su origen y desarrollo desde el punto de vista matemático y de la vida y planificar distintos tipos de tareas docentes y sistemas de preguntas atendiendo a la realización de cada fase en la elaboración de un concepto matemático.

Anexos

Ejemplos de tareas docentes utilizados en la elaboración del concepto trapecio que se sistematiza en el programa de 7. grado elaboradas algunas de ellas por los profesores en formación.

Anexo #1: Realizar el esbozo del barrio en que vives incluyendo las calles necesarias que te conducen a la bodega, el consultorio, a la escuela primaria y a las casas de los integrantes del equipo que viven en la zona (utilizar para ello una cartulina o papel grande que te permita mostrarlo al resto de tus compañeros).

Sistema de preguntas

- ¿Cuántas cuadras hay de la escuela a la casa de cada uno de los integrantes del equipo? ¿Con qué figura geométrica asocian una cuadra? ¿Y todas juntas en cada caso? (identifican)
- ¿Qué figura geométrica se forma con cuatro cuadras que tomadas dos a dos tienen una esquina en común? (identifican)
- ¿Qué otras figuras identificas en el esbozo realizado?
- ¿Qué te hizo reconocer en cada caso las figuras identificadas? (dan muestra de cómo pensaron, determinan propiedades, clasifican atendiendo a los rasgos señalados, deducen propiedades)

Anexo #2: (esta tarea puede ser utilizada además como tarea evaluativa en la fase de diagnóstico)

Analiza las partes de la bandera cubana y la significación histórica de cada una de sus partes y responde :

¿Qué forma tienen?

La bandera __________La parte roja __________ La estrella______________

La franja azul del centro_______ Las franjas blancas_________

Sistema de preguntas

¿ Cuáles son las características comunes que poseen todas estas partes de la bandera?

¿Cuáles de las partes tienen forma polígonos convexos ?. clasifícalos

¿Reconoces si algunos de los polígonos convexos son paralelogramos ?. Fundamenta

Anexo #3

Es intención de nuestro gobierno en la provincia Holguín restaurar las construcciones que así lo necesiten y que se encuentren en el casco histórico de la ciudad Capital de esta provincia, para ello, realizó un estudio para verificar la cantidad de pintura que se necesita con este fin. Algunas de las paredes de las construcciones de esta parte de la ciudad tienen la siguiente forma:

El objetivo de esta tarea es de motivar y orientar la necesidad de continuar profundizando en el estudio de los cuadriláteros.

La determinación del área de estas paredes resulta necesaria para la restauración que se pretende (determinar propiedades).

Sistema de preguntas

¿Por qué?¿Qué forma tiene? ¿Es un polígono? ¿De qué tipo?¿Por qué no es un rectángulo?

¿Los lados del cuadrilátero, qué parte de la pared representan y que relación de posición hay entre estas partes?

Referencias Bibliográficas

Ballester S. y otros (2002). *El transcurso de las Líneas directrices en los programas de Matemática y la planificación de la enseñanza*. Ciudad de la Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Campistrous, L. (1993). *Lógica y Procedimientos Lógicos del Aprendizaje*. La Habana, Cuba: Centro de Documentación e Información del ICCP.

Garcés, W. (2003). *El Sistema de Tareas como Modelo de Actuación Didáctica en la formación de profesores de Matemática–Computación*. Tesis doctoral no publicada. ISP, Holguín, Cuba.

García M. (2003). *Resultados del proyecto de investigación sobre la estimulación de los procedimientos lógicos asociados a los conceptos de Matemática y Español*. Holguin, Cuba: ISP.

MINED (2001). *Programa y precisiones Metodológicas de Matemática para Secundaria Básic*a. La Habana, Cuba: Ministerio de Educación.

Rubinstein, S. (1964). *El desarrollo de la Psicología General. Principios y Métodos*. La Habana: Editorial Revolucionaria.

Vigostky, L. (1987). *Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores*. La Habana: Editorial Científico- Técnica.

El Desarrollo de Habilidades Matemáticas y Actividades Matemáticas Universales. Sus Implicaciones en la Formación de Profesores

Santiago Ramiro Velázquez
Universidad Autónoma de Guerrero, Centro de Investigación y Desarrollo Educativo
México
sramiro@prodigy.net.mx
Formación de profesores - Nivel Básico

Resumen

En este artículo se expone parte de los productos de la investigación denominada "Habilidades matemáticas y formación de profesores de educación secundaria", 98-SIBEJ-03024 y de "Programa de capacitación y actualización para profesores de matemáticas de nivel medio superior en Guerrero", GUE-2002-C01-4725. Con estos productos y experiencias se estructura un curso corto realizado en Relme 18. Postulamos que el profesor de matemáticas tiene el compromiso de contribuir a la formación matemática de los alumnos, entendida como la que los convierte en ciudadanos cultos, constructivos, comprometidos y capaces de razonar, OCDE (2000). De modo que en este trabajo se analizan habilidades y actividades matemáticas encaminadas a la construcción de un modelo de capacitación permanente de profesores.

Presentación

En esta presentación se ofrece un curso para interesados en el proceso de estudiar matemáticas en educación secundaria y media superior, enfocado a la formación de profesores. En general se acepta que el profesor de matemáticas tiene el compromiso de contribuir a la formación matemática de los alumnos, entendida como la considera el proyecto PISA (acrónimo derivado del título del proyecto en inglés: Programm for Internacional Student Assessment) "La formación matemática es la capacidad del individuo, a la hora de desenvolverse en el mundo para identificar, comprender, establecer y emitir juicios con fundamento acerca del papel que juegan las matemáticas como elemento necesario para la vida actual y futura de ese individuo como ciudadano constructivo, comprometido y capaz de razonar" (OCDE, 2000).

Sobre esta base se plantean algunas interrogantes: ¿Los documentos curriculares y de apoyo didáctico actuales, se corresponden con esta concepción de formación matemática?, ¿ Los profesores de matemáticas comparten esta concepción y realizan su labor en este sentido?. Se parte del supuesto de que es necesaria una transformación del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, hacia un proceso de estudiar esta asignatura organizado y sostenido, como fuente constante de tareas y problemas matemáticos. De modo que la formación y capacitación permanente del profesor sea en esta dirección. Una vía para lograrla es el desarrollo de habilidades matemáticas universales como comprender, visualizar y comunicar (Velázquez, Flores, García, Gómez, & Nolasco, 2001) que a su vez promueven el desarrollo de las actividades matemáticas universales contar, medir, localizar, diseñar, jugar y explicar (Bishop, 1999).

En este artículo se hace una descripción de la problemática en este ámbito, se expresa la estructura del curso, una explicación de las habilidades matemáticas y actividades matemáticas universales y su concreción en una experiencia de capacitación de profesores del nivel medio superior. .

Problemática

En diversas investigaciones se verifica la escolarización del saber matemático de modo que se provocan conflictos entre éste y los saberes necesarios para la vida. En este sentido uno de los objetivos del proceso de estudiar matemáticas es la matematización en contextos auténticos (Slisko, 2003), que aseguren al alumno un desempeño exitoso en su vida laboral y social. En esta dirección en la Conferencia Internacional Sobre la Educación Matemática del Siglo XXI, titulada Matemáticas para la vida , un grupo de trabajo discutió sobre la conexión entre la resolución de problemas y el mundo real (De Corte y Malaty, 2000) y arribó a los siguientes consensos: se recomienda el uso de situaciones de problemas que sean concretas, realistas y auténticas[1], los problemas deben ser sensatos para los estudiantes, las situaciones de problemas deben ser diversas y hasta donde sea posible ricas en contexto, relacionadas con la sociedad y caracterizadas por la naturaleza abierta, además de la solución de problemas debe promoverse la formulación y planteamiento de problemas por los alumnos y la solución debe ser más orientada hacia los procesos y estrategias y menos a los productos.

Postulamos que el currículum[2] de matemáticas en la educación secundaria y media superior en México, no se corresponde fielmente con estas tendencias de ahí la necesidad de su transformación. Particularmente la formación, capacitación y actualización de profesores debe orientarse en esta dirección, a fin de asegurar que los docentes sean usuarios inteligentes y críticos de los planes y programas de estudio y cumplan con su compromiso en la formación matemática de los alumnos. Por su parte en los Marcos teóricos y especificaciones de evaluación TIMMS 2003 (Mullis, Martin, Smith, Garden, Gregory, González, Chrostowski, & Connor, 2003) se considera que los actos del profesor en el aula son los que más afectan el aprendizaje de los estudiantes y una de las necesidades del docente es tomar parte de programas de formación continua y desarrollo profesional de alta calidad.

Por otra parte en México y particularmente en el estado de Guerrero el 65 % de los profesores de matemáticas de nivel medio superior proceden de otras profesiones, el resto tiene preparación de normal superior o licenciatura en matemática educativa. Un estudio con 90 profesores de este nivel educativo constata sus limitaciones sobre las competencias en el ámbito disciplinario, didáctico y tecnológico. En este estudio se caracteriza el perfil académico real del profesor y el perfil deseable, de modo que la comparación de ambos refleja las necesidades de capacitación.

Estructura del curso

Objetivos del curso: 1. Analizar la concepción de formación matemática del proyecto PISA de modo que se refleje la correspondencia con las habilidades y actividades matemáticas universales. 2. Explicar las implicaciones de la anterior concepción en la formación y actualización permanente de los profesores de matemáticas.

Contenidos del curso: 1. Las concepciones de formación matemática del proyecto PISA. 2. Habilidades, actividades matemáticas universales y formación de profesores.

---

[1] Cuando hablamos de situaciones o contextos auténticos nos referimos a los ámbitos que tienen sentido y significado para los alumnos, ya sea porque contienen ideas matemáticas que le aseguran la comprensión del entorno o porque hay problemas de su interés, inmersos en esa situación

[2] Al abordar el currículum de matemáticas nos referimos a todos los aspectos que confluyen en la formación matemática de los alumnos

Modalidad de trabajo: Estudio de los contenidos del curso en un material de apoyo escrito en el que los participantes produzcan, confronten y validen ideas.

Implicaciones en la formación de profesores. Habilidades y actividades matemáticas

- Habilidades matemáticas

Las producciones de los estudiantes en el trabajo con las tareas y problemas matemáticos son manifestaciones de lo que pueden hacer, a las formas de como se manifiestan esas producciones se les da el nombre de habilidades matemáticas. En la teoría de la actividad (Leontiev, 1981) se expone que la interacción entre el sujeto y el objeto, a través de la cual se produce el reflejo psíquico que media y regula esta interacción, se realiza en forma de actividad. De manera que las habilidades son formas de ejecución de una actividad, cuando ésta se dirige conscientemente hacia el logro de un objetivo.

- La Habilidad de Comprender

De acuerdo al diccionario enciclopédico, comprender significa: entender, alcanzar, penetrar. Por su parte Fariñas (1995), considera que comprender consiste en el descubrimiento de significados y sentidos, llegar a la esencia de un objeto y determinar su valor. Considera que comprender es un acto genuino del pensamiento y que la comprensión es una forma esencial y general de ordenar y evaluar la realidad en toda su extensión y diversidad, por lo tanto es una de las vías para enseñar a pensar. El comprender nos permite desarrollar un trabajo productivo, descubrir recursos para determinar el valor de las cosas y generar una constante superación de la vida del hombre.

Sobre la base de estas ideas, se puede afirmar que comprender es tener una representación mental del objeto de estudio, de modo que el alumno pueda expresar las características con sus propias palabras y modelar diversas situaciones de la realidad.

- La Habilidad de Visualizar

Visualizar consiste en trasladar a imágenes visuales la información que está dada en un determinado contexto y viceversa. Guzmán (1996) considera que esta habilidad debe interpretarse como "Una forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas que develan las relaciones abstractas que al matemático interesan". Por su parte, Duval (1998) hace una diferenciación entre las representaciones mentales y las representaciones semióticas y señala que si en el proceso de enseñanza aprendizaje se pasan por alto o se da más importancia a unas que a otras, se conduce a confusiones. "Las representaciones mentales cubren el conjunto de imágenes y, globalmente, a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre lo que les está asociado.

Las acciones principales de esta habilidad son: identificar, representar y encontrar la vía de solución.

- La Habilidad de Comunicar

De acuerdo al diccionario enciclopédico comunicar, significa descubrir, manifestar o hacer saber alguna cosa. De igual modo, hacer participe a otra persona de lo que se sabe. Como habilidad matemática consiste en buscar información sobre contenidos de la matemática escolar, procesarla y expresarla correctamente desde el punto de vista de la forma y el contenido. En esta habilidad están enmarcadas principalmente las acciones de interactuar, codificar y recodificar.

Interactuar consiste fundamentalmente, en preguntar y responder a preguntas en una actividad cooperativa entre alumnos, docentes y personas en general, de modo que esta acción se pueda orientar con las interrogantes: qué, cómo, por qué, para qué y en qué momento. El desarrollo de está acción promueve las "buenas preguntas" y la identificación de afirmaciones como falsas o verdaderas, con base a los argumentos que la sustentan. Plantear buenas preguntas es un aspecto relevante en el proceso de aprender matemática, ya que las preguntas son fuente de conocimiento al convertirse en punto de partida para investigar.

Codificar significa, de acuerdo al diccionario enciclopédico hacer o formar un cuerpo de leyes metódico y sistemático, de igual modo el uso de un vocabulario convencional.

Recodificar es transferir la denominación de un mismo objeto de un lenguaje matemático a otro, expresar el mismo objeto a través de formas diferentes o usar signos diferentes para un mismo modelo.

Actividades matemáticas universales

Contar: en la que está incluido el razonamiento numérico, cálculo mental, razonamiento cuantitativo, manipulación de cantidades y la estimación.

Localizar: está relacionada con encontrar una ruta, orientarse y localizar objetos. También incluye acciones de orientación y coordinación espacial e imágenes cinestésicas.

Medir:que desarrolla acciones de estimación, aproximación, evaluación y visualización.

Diseñar: incluye aspectos relacionados con visualizar, imaginar, interpretar información figurativa, dibujar y otras formas de representar.

Jugar: que considera el pensamiento estratégico, planificar, conjeturar y aspectos sociales e interpersonales.

Explicar: que desarrolla el pensamiento lógico-lingüístico, el razonamiento verbal, la comunicación y facilita la toma de decisiones fundamentadas en una sociedad compleja como la nuestra. En este sentido explicar consiste en expresar con claridad ideas debidamente fundamentadas en forma desplegada que facilite su comprensión. Explicar es lo contrario de complicar y lo opuesto a implicar, así como una lucha contra lo confuso y en pro de lo diáfano y evidente.

A su vez estas habilidades y actividades matemáticas universales se corresponden con las destrezas y conocimientos para la vida, propuestos por el proyecto PISA. Una forma de desarrollar las referidas habilidades y actividades matemáticas es a través del diseño e instrumentación de situaciones didácticas como notas de clase, estructuradas con una serie de actividades para el logro de los objetivos propuestos. Estas actividades se presentan en forma de lecturas, exploraciones, ejercicios, problemas, tareas, momentos de reflexión y sitios de interés. De modo que en su puesta en escena se consideren las funciones didácticas (Leontiev, 1981), los 4 aspectos necesarios para abordar un conocimiento matemático (Chevallard, Bosch & Gascón, 1998) y las fases de la apropiación del conocimiento matemático (Brousseau, 1983).

Una experiencia de capacitación de profesores

Con base en estas posiciones la realización de esta experiencia de capacitación de profesores comprende de inicio un diagnóstico para caracterizar el perfil académico real y el deseable, de manera que la comparación entre ambos refleje las necesidades de capacitación en el ámbito disciplinario, didáctico y tecnológico. En esta intención se diseña, valida y aplica una encuesta a 90 profesores de matemáticas del nivel medio superior (NMS) de la región de Chilpancingo y Acapulco, Gro. Esta aplicación y análisis de los procesos y resultados reflejan limitaciones de los profesores en el dominio de la disciplina que enseñan, en los aspectos didácticos y en el uso de las nuevas tecnologías en su labor. Estas limitaciones se reflejan en el predominio de una visión de contenidos, es decir un interés por abordar el mayor número de temas tal como están en los programas sin prestar la atención que merece la formación de conceptos, el desarrollo de habilidades, procedimientos, estrategias y actitudes.

Para caracterizar el perfil deseable se hace un análisis de los aspectos relevantes de los planes y programas de matemáticas de los diversos subsistemas de nivel medio superior y de los criterios de la comunidad académico-científica de Matemática Educativa, acerca de la formación académica deseable de los referidos profesores. La caracterización se hace considerando los 3 ámbitos ya referidos, que a su vez determina las necesidades de capacitación en estos 3 aspectos, al comparar el perfile real y el deseable. Postulo que una forma de capacitar a los profesores debe incluir el desarrollo de las habilidades matemáticas y actividades matemáticas universales en correspondencia con los 8 saberes y destrezas matemáticas para la vida[3] propuestas por el proyecto PISA.

Sobre la base de estas posiciones y de las necesidades de capacitación se estructuran 5 cursos denominados como se expone a continuación: didáctica básica, geometría, álgebra, cálculo diferencial y planeación y evaluación. Con estos cursos se conforma un diplomado de matemática educativa que a su vez contiene el plan correspondiente, una antología para cada curso y un cuaderno de actividades con software.

El curso de didáctica básica tiene como objetivo fundamental que los profesores analicen las tendencias actuales de la didáctica de las matemáticas de modo que las consideren en la planeación, gestión y evaluación del proceso de estudiar matemáticas. Consta de 3 partes fundamentales, una sobre solución de problemas matemáticos donde se abordan diversas experiencias sobre esta temática. La segunda parte es sobre teoría de la actividad (Leontiev, 1981) como una forma de planear e instrumentar el proceso de estudiar matemáticas y la tercera parte sobre teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1983).

[3] Las 8 destrezas propuestas por PISA son: de pensamiento matemático, de argumentación matemática, de diseño, para plantear y resolver problemas, de representación, simbólica, formal y técnica, de comunicación y de utilización de ayudas y herramientas

El objetivo fundamental del curso de geometría es que los profesores reconozcan, analicen y diseñen propuestas de solución a los problemas didácticos más significativos que afectan el proceso de aprendizaje de la geometría en el NMS. También consta de 3 partes, en la parte 1 se analizan los problemas que viven los profesores y alumnos al enseñar y aprender geometría, en la parte 2 se estudian las condiciones del plan y programas para el desarrollo del pensamiento geométrico y en la parte 3 se diseñan situaciones didácticas como notas de clase que aseguren a los alumnos el aprendizaje de la geometría y contribuyan a la solución de la problemática en este ámbito.

De manera similar está estructurado el curso de álgebra, cuyo objetivo fundamental consiste en que los profesores propongan acciones de solución a la problemática que se vive en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, por medio del análisis de diversas fuentes y la realización de varias tareas que contribuyan al desarrollo del pensamiento algebraico. En la parte 1 se analizan los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de está disciplina que viven los profesores y los alumnos en la escuela. En la parte 2 se estudian las condiciones del plan y programa de estudio para el desarrollo del pensamiento algebraico de los alumnos y en la parte 3 se diseñan situaciones didácticas como notas de clase para el aprendizaje del álgebra y contribuir a la solución de la problemática en este campo.

En forma análoga está formado el curso de cálculo diferencial que tiene como objetivo fundamental que los profesores comprendan los procesos de cambio y variación y diseñen propuestas que contribuyan a la solución de la problemática en este campo. En la parte 1 se analizan los problemas que los profesores y alumnos viven en la escuela sobre el aprendizaje del cálculo. En la 2ª parte se estudian las condiciones del plan y programa para orientar el trabajo de alumnos y profesores y en la 3ª parte se diseñan situaciones didácticas como notas de clase para que los alumnos aprendan cálculo diferencial y se contribuya a la solución de la problemática en este ámbito.

El curso de planeación y evaluación tiene como objetivo fundamental que los profesores confronten sus prácticas con los nuevos enfoques recomendados para la planeación, gestión y evaluación en matemáticas con la finalidad de transformar su labor en el aula. En la parte 1 se aborda la importancia de la planeación escolar en el aprendizaje de las matemáticas, en la parte 2 se realiza la planeación de uno de los cursos que se trabaja en este nivel educativo y en la parte 3 se estructura una experiencia de evaluación.

La modalidad de trabajo en este diplomado es el taller donde los profesores apoyándose en diversas experiencias y fuentes producen saberes que confrontan, validan e institucionalizan con sus compañeros, asesores e investigadores. En esta forma los participantes ponen en juego habilidades y actitudes relacionadas con el trabajo individual y colectivo tales como la argumentación clara y precisa de ideas en forma oral y escrita, la disposición para discutir y poner en tela de juicio los conocimientos, habilidades y actitudes que se tienen. Así como la apertura para modificarlos e interesarse por las ideas de los demás. Por su parte en el curso corto en Relme 18 participaron 30 profesores y estudiantes, quienes consideran que este es un modelo interesante para la capacitación de profesores

Finalmente afirmamos que un aspecto relevante en la estructuración y realización de este experiencia, es la consideración del denominado experimento de desarrollo profesoral (Simon, 2000) en donde el desarrollo didáctico de los profesores se promueve a través de un ciclo continuo de reflexión e interacción entre los formadores, investigadores y profesores.

Referencias Bibliográficas

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural.* Barcelona, España: Paidós.

Brousseau, G. (1983). *Los obstáculos epistemológicos y los problemas de la enseñanza*. México, D.F: Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN.

Chevallard, Y., Bosch M. y Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. México, D.F: SEP.

De Corte, E. & Malaty, G. (2000). Report of working group 4: Connecting mathematics problem solving to the real world. Amman, Jordan: *International conference on mathematics education into the 21 st century: mathematics ford living.*

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Editor), *Investigaciones en Matemática Educativa II* México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica, 173-201.

Fariñas, G. (1995). *Maestro, una estrategia para la enseñanza.* La Habana, Cuba: Academia.

Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias innovadoras.* Madrid, España: Editorial Popular, S. A.

Leontiev, A. (1981). *La actividad en Psicología*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Mullis, I., Martin, M. Smith, T., Garden, R., Gregory, K., González, E., Chrostowski, S. y Connor, K. (2003). Los profesores y su preparación. En *Marcos teóricos y especificaciones de evaluación de TIMMS 2003*. Madrid. Disponible en: http://www.ince.mec.es/pub/marcosteoricostimms2003.pdf , 86-87.

OCDE (2000). *Proyecto PISA. La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos: un nuevo marco de evaluación*. OCDE.

Simon, M. (2000). Research on mathematics teachers development: The teacher development experiment, en R. Lesh y A.E. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and sciences education*. Lawrence Eribraum Associates, 335 – 359.

Slisko, J. (2003). *Los conocimientos y destrezas para la vida según el proyecto PISA: ¿Cuáles son sus implicaciones para la enseñanza de las matemáticas y de las ciencias naturales?*. Acapulco, México: Facultad de Matemáticas de la UAG.

Velázquez, S., Flores, C., García, G., Gómez, E. y Nolasco, H. (2001). *El desarrollo de habilidades matemáticas en situación escolar*. México, D.F: Grupo Editorial Iberoamérica.

Concepciones de los Docentes sobre la Matemática. Su Incidencia en la Enseñanza y el Aprendizaje

Silvia Vilanova, M. Cristina Rocerau, Perla Medina, Mercedes Astiz, María Oliver, Susana Vecino y Guillermo Valdez
Universidad Nacional de Mar del Plata
Argentina
svilano@mdp.edu.ar
Concepciones sobre la matemática – Nivel superior

Resumen

Los *sistemas de creencias* son una particular visión del mundo de la matemática e inciden en la manera en que se enfrenta un problema, en los procedimientos, el tiempo y la intensidad del trabajo que se realizará. El propósito de nuestra investigación es indagar cuál es la concepción de los docentes sobre la Matemática, su enseñanza y su aprendizaje y cómo incide esta concepción en su manera de resolver problemas y en su propia práctica docente. Los datos determinan que muy pocos docentes definen la matemática como una construcción que incluye conjeturas, pruebas y refutaciones y la mayoría tiene una visión en la que “saber matemática” es “ser hábil en desarrollar procedimientos e identificar los conceptos básicos de la disciplina”.

Introducción

"No estamos hablando acerca de una mejor o peor manera de enseñar la misma matemática;...Me ha llevado algún tiempo darme cuenta de que éste no es el caso. Yo solía pensar que los profesores de matemática estaban todos enseñando la misma disciplina, algunos haciéndolo mejor que otros. Ahora creo que hay efectivamente dos disciplinas diferentes siendo enseñadas bajo el mismo nombre: "Matemática". Skemp (1978)

Los *sistemas de creencias* son una particular visión del mundo de la matemática, la perspectiva con la cual cada persona se aproxima a ella y pueden determinar tanto la manera en que se enfrenta un problema, como los procedimientos, el tiempo y la intensidad del trabajo que se realizará.

Existen numerosas investigaciones sobre las concepciones y creencias de los docentes sobre la matemática y su incidencia en el aprendizaje de sus alumnos. Thompson (1992), reseñó los estudios que documentan cómo los docentes difieren ampliamente en sus creencias sobre la naturaleza y el sentido de la matemática, desde considerarla como un cuerpo estático y unificado de conocimientos absolutos e infalibles, hasta verla como un campo de creación e invención humana en continua expansión. Entre ellos Skemp (1978), propuso una distinción entre *matemática instrumental* y *matemática relacional*: la concepción *instrumental* la considera como un conjunto de "planes preestablecidos" para desarrollar tareas matemáticas. La concepción *relacional*, en contraste, está caracterizada por la posesión de estructuras conceptuales que permiten construir diferentes planes para desarrollar una actividad matemática; los medios se independizan de los fines a partir del aprendizaje de principios inclusores adecuados para usarse en una multitud de situaciones o tareas. El autor considera que la diferencia entre estas dos concepciones sobre la comprensión y el conocimiento matemático está en la raíz de muchas de las dificultades que se han experimentado en la educación matemática.

Ernest (1988), por su parte, agrupó las concepciones de los docentes sobre la matemática en tres categorías:

1) *La visión de la resolución de problemas*: es una visión de la matemática que la concibe como un campo de la creación y la invención humana en continua expansión, en el cual los patrones son generados y luego convertidos en conocimiento. La matemática es vista como un proceso de conjeturas y acercamientos al conocimiento, en la que sus resultados permanecen abiertos a revisión y no como un producto terminado.

2) *La visión platónica*: dentro de esta concepción, la matemática es concebida como un cuerpo estático pero unificado de conocimiento, un "reino cristalino" de estructuras y verdades interconectadas, unidas por la lógica y el significado. Así, la matemática es un monolito, un producto inmutable. Es descubierta y no creada.

3) *La visión instrumental*: desde esta visión la matemática es concebida como una "valija de herramientas" construida a partir de una acumulación de hechos, reglas y habilidades para ser usadas en la persecución de algún fin externo.

Por otra parte, la concepción de los alumnos sobre la matemática, muchas veces adquiere perspectivas diferentes a las de los docentes. Comúnmente, la matemática es vista por los estudiantes como un conjunto de reglas y procedimientos en el que los problemas son resueltos aplicando algoritmos enseñados por los docentes. Se concibe la actividad matemática compuesta por tareas rutinarias que requieren poca reflexión y producen respuestas correctas, si se aplica el procedimiento adecuado. Comúnmente, la matemática es asociada con la certeza: saber matemática y ser capaz de obtener la respuesta correcta rápidamente van juntas. Estos presupuestos culturales, son modelados por la experiencia escolar, en la cual hacer matemática significa seguir las reglas propuestas por el docente, saber matemática significa recordar y aplicar la regla correcta cuando el docente hace una pregunta o propone una tarea y la "verdad" matemática es determinada cuando la respuesta es ratificada por el docente. Las creencias sobre cómo hacer matemática y sobre lo que significa saber matemática en la escuela son adquiridas a través de años de mirar, escuchar y practicar.

Esta concepción de la actividad matemática contribuye a percibirla como un cuerpo estático de conocimientos, que no es creado sino replicado de maneras particulares. Debido a esta percepción de la Matemática como algo "dado", los alumnos no se sienten libres de hacer juicios sobre sus estrategias o recursos ante la resolución de problemas (Schoenfeld, 1985) y es difícil comprometerlos en una discusión sobre su pensamiento matemático. Esta visión de la Matemática puede influir fundamentalmente en la naturaleza de la participación de los alumnos en el aprendizaje significativo de esta disciplina y esencialmente inhibirlos de comprometerse en la resolución de problemas desde un punto de vista activo y creativo.

La investigación en el campo de las percepciones de los alumnos sobre la matemática, sugiere que su visión, es determinada o afectada, al menos en parte, por el docente (Schoenfeld, 1992). La naturaleza del entorno que crea el docente tiene una fuerte influencia en la manera en que los estudiantes conciben no sólo la Matemática como ciencia sino también las características que definen la actividad matemática.

Si el rol docente es percibido como transmisor de información y el rol del alumno se asocia a la recepción, entonces la tarea del profesor consistirá en presentar la lección planificada, sin disgresiones ni cambios ineficientes. Si, por el contrario, se considera que el descubrimiento y la verificación son procesos esenciales en matemática y que el docente debe crear y mantener una atmósfera informal y abierta en la clase para asegurar la libertad de los estudiantes de hacer preguntas y explorar sus ideas, resultará un clima de clase que, al menos potencialmente, será el sostén del desarrollo de las habilidades de resolución de problemas de los alumnos.

En suma, concientes o no, las creencias modelan el comportamiento matemático de docentes y alumnos, determinan el ambiente de la clase y pueden constituirse en un obstáculo para la implementación de mejoras curriculares.

Objetivos del trabajo

La experiencia que presentamos aquí tuvo como propósito indagar las concepciones y creencias de los docentes del área matemática del 3er. Ciclo de la E.G.B. que se desempeñan en instituciones educativas con características diferentes de la ciudad de Mar del Plata (Argentina) y su zona de influencia. Este estudio se orientó hacia dos cuestiones particulares: la concepción de los docentes sobre lo que significa "hacer matemática", su enseñanza y su aprendizaje y cómo se expresa esta concepción en su manera de resolver problemas y en su práctica docente.

Método

Participantes

217 docentes de 3er. Ciclo a cargo de esta área, (maestros de área y profesores de matemática con título terciario y universitario en matemática o disciplinas afines) que realizaban un programa de capacitación ofrecido por la Universidad.

De acuerdo a su nivel de formación, podemos caracterizarlos como sigue:

a) 32 docentes con título secundario (técnicos, maestros, bachilleres con algunas materias en la Universidad, etc.)

b) 148 docentes con título terciario no universitario (de los cuales 58 tienen título específico y el resto no específico en Matemática).

c) 37 docentes con título universitario no específico en Matemática (arquitectos, químicos, físicos, ingenieros, etc.)

Instrumento

Se utilizó un cuestionario compuesto por 6 ítems tendientes a indagar la concepción de los docentes sobre la matemática en general y sobre el papel de la resolución de problemas en la enseñanza.

El ítem 1 indaga la concepción sobre la Matemática como ciencia. El 2 y el 3 se relacionan con su percepción sobre las características de los "buenos" alumnos en matemática y con su propia actividad en el aula. El ítem 4 investiga la concepción sobre la resolución de problemas. El 5 explora los criterios de evaluación ante la resolución de problemas de sus alumnos y el 6, a través de dos problemas para resolver, evalúa los procedimientos, recursos y estrategias utilizadas por los docentes.

Este instrumento definitivo, surgió luego de la realización de una prueba piloto, de la que surgieron las modificaciones realizadas.

El cuestionario se administró en forma escrita e individual. Su realización fue voluntaria.

Tratamiento de los datos

Se diseñó una base de datos para cargar y procesar los resultados de las preguntas cerradas. Se elaboraron categorías previas de respuesta para las preguntas abiertas. Las categorías finales de respuesta incluyeron todas las respuestas de los docentes, luego de agregar categorías o modificar las iniciales. Los problemas se analizaron en función de las estrategias desarrolladas y de los recursos matemáticos utilizados.

Resultados

Analizaremos en este trabajo, a partir de la clasificación de Ernst sobre concepciones de los docentes sobre la Matemática, sólo el Item 1, en el que se pregunta : ¿Cuál es para Ud. el núcleo central de la actividad matemática y por qué?". Al realizar un primer análisis de las respuestas nos encontramos con 77 docentes que manifiestan en forma explícita que "la Matemática es resolución de problemas..." o que "la resolución de problemas es el núcleo central de la actividad matemática" , mientras que 140 ponen el énfasis en otros aspectos, considerándola un instrumento para otras disciplinas o para resolver problemas cotidianos, o considerándola como un cuerpo unificado de conocimiento, compuesto por estructuras y relaciones lógicas.

Sin embargo, a partir del análisis de las justificaciones de los docentes y de los resultados globales del cuestionario, se observa que los docentes que explícitamente caracterizan la Matemática como Resolución de Problemas, en realidad muestran discrepancias y contradicciones entre su respuesta ante la pregunta realizada y la concepción implícita que realmente tienen y expresan en sus justificaciones o en otros ítems del cuestionario: Algunas de las justificaciones ofrecidas dentro de este grupo son las siguientes*:*

"Permite incorporar conceptos teóricos, relacionarlos y aplicarlos a situaciones diferentes..."

"Involucra la interpretación, aplicación y análisis como operaciones mentales."

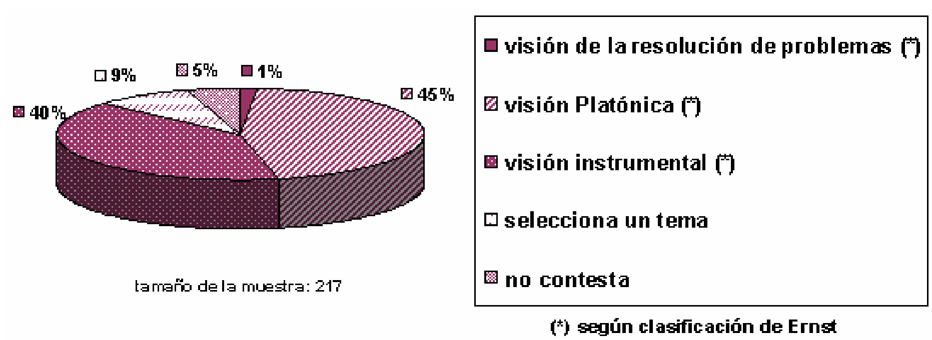
"Permite al alumno la aplicación de los contenidos matemáticos a la vida cotidiana y los capacita para afrontar los obstáculos que se le puedan presentar."

"Desarrolla la capacidad de adaptarse a nuevos conocimientos..."

"Es una de las actividades mentales más completa y compleja..."

Estas justificaciones muestran que en realidad, la resolución de problemas es vista como una herramienta al servicio de algún objetivo, en algunos casos de tipo intelectual y en otros de tipo práctico. No se evidencia una concepción epistemológica de la Matemática como cuerpo de conocimientos dinámico y en continua construcción, como un "..-proceso de conjeturas y acercamientos al conocimiento, en la que sus resultados permanecen abiertos a revisión y no como un producto terminado..." tal como Ernst (1988) caracteriza la concepción de la Matemática como Resolución de Problemas.

El siguiente gráfico sintetiza los resultados obtenidos:



Consideraciones finales y pasos futuros

Cada una de las percepciones y creencias de los docentes tiene amplias ramificaciones y consecuencias para el desarrollo de las creencias de los alumnos y sus consecuencias en el aprendizaje. Los docentes que colaboraron en este estudio nos han ayudado a ver cuán crítico es comenzar a comprender estas concepciones por las consecuencias que implican para la enseñanza de la matemática y la resolución de problemas.

Necesitamos conocer y comprender de dónde emergen estas concepciones, cómo se desarrollan a través del tiempo y cómo impactan en los resultados de aprendizaje de los estudiantes.

Sabemos también que las creencias y concepciones de los docentes no son estáticas. Se originan durante sus años de estudiante, continúan moldeándose durante sus primeras prácticas docentes, y continúan evolucionando durante su experiencia docente. Recientes estudios sugieren que es posible ayudar a los docentes a enriquecer sus bases de conocimientos y a desarrollar creencias más productivas acerca del aprendizaje y la enseñanza de la matemática, que les permitan tomar mejores decisiones pedagógicas. Estos estudios demuestran, sin embargo, que estos cambios no ocurren rápida ni fácilmente.

La investigación futura debería documentar esta evolución, entender cómo se relacionan con las creencias de los alumnos, sus actitudes hacia la matemática y su aprendizaje y proponer caminos para modificarlas, sin perder de vista la complejidad del tema.

Referencias Bibliográficas

Ernst, P. (1985). The philosophy of mathematics and mathematics education. *International Journal of Science and Technology 16*(5), 603-612.

Mcleod D.B. (1994). Research on affect and mathematics learning since 1970 to the present. *Journal for Research in Mathematics Education 25*(6), 637-647.

Resnik, L. y Collins, A. (1996). Cognición y Aprendizaje. *Anuario Psicología 69*, 189-197.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* New York, E.U.A.: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En D. Berliner y R. Calfee (Eds.), *Handbook for Research on Matematics Teaching and Learning.* (pp. 334-369). New York: Macmillan.

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher 26*(3), 9-15.

Thompson, A. (1992). Teacher's beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En D. Berliner y R. Calfee (Eds.), *Handbook for Research on Matematics Teaching and Learning.* (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Thompson, A. (1985). Teacher's conceptions of mathematics and the teaching of problem solving. En E.A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning mathematical problem solving: multiple research perspectives.* (pp. 281-294). Hillsdale, NJ: Erlbaum Associates.

Categoría 3:

Consideración de Aspectos Socioepistemológicos en el Análisis y el Rediseño del Discurso Matemático Escolar

Introducción

Una buena cantidad de investigaciones en Matemática Educativa, en Latinoamérica y el mundo, comparten como problemática básica explicar los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Muchos caminos son posibles para abordar esta problemática; pero es posible notar que una parte considerable de las investigaciones se basan, explícitamente o no, en las ideas que la epistemología genética proporciona. Por ejemplo, la idea de que las personas acceden al conocimiento a través de diversas etapas es particularmente atractivo para los matemáticos educativos y profesores de matemáticas; ya que dan criterios para la acción en los procesos de enseñanza. Plantear la necesidad de diversos "prerrequisitos" para acceder a diferentes corpus del conocimiento, como el precálculo o la preálgebra, son ejemplos de funcionamiento de estas ideas a una escala global.

El centrar la problemática en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas deriva en dos aproximaciones específicas que dominan el horizonte de la Matemática Educativa: aquella que centra su atención en los procesos de asimilación del conocimiento y aquella que centra su atención en los procesos de transmisión del conocimiento. La primera corresponde a lo que es llamado el *paradigma cognitivo* y la segunda a lo que bien podría llamarse el *paradigma instruccional*. Comúnmente la primera aproximación fundamenta a la segunda. Una de las características que comparten estas aproximaciones consiste en no problematizar el conocimiento matemático; las matemáticas, y sus conceptos, son fijas e inalterables, son aquellas señaladas por los corpus de conocimiento establecidos: Aritmética, Geometría, Cálculo, Variable Compleja.

En esta sección del Acta Latinoamericana se podrá encontrar una gama de investigaciones que con diversos argumentos y en diferente medida se oponen a los paradigmas cognitivo e instruccional. Tales investigaciones se enmarcan en la llamada *aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa*. Dos principios interdependientes de esta aproximación merecen ser señaladas aquí: 1) La problemática central de la Matemática Educativa es explicar cómo se construye conocimiento matemático y 2) el conocimiento matemático no surgió para vivir en la escuela. Así, en los artículos que siguen se podrán encontrar investigaciones que se apoyan en ambos principios. De ambos principios se derivan investigaciones que buscan caracterizar las *condiciones de la génesis del conocimiento* y/o *rediseñar el discurso matemático escolar*. En general los rediseños son estructurados en función de los hallazgos encontrados en la búsqueda de las condiciones de la génesis.

Al respecto el principal hallazgo de la aproximación socioepistemológica parece ser el haberse percatado de la necesidad de no otorgarle el papel protagónico a los objetos matemáticos (aquellos "objetos" presentes en una organización matemática específica; como lo son, por ejemplo, los conceptos matemáticos) y su cognición; para trasladar el foco de atención a las ideas o necesidades que dan origen a múltiples conocimientos matemáticos; ideas y necesidades que se sostiene son de origen social. El conocimiento matemático, y por ende su construcción, es un hecho social. Esta afirmación es, al parecer, la tesis básica de la aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa. ¿Pero que quiere decir exactamente esto?

De acuerdo con Cantoral (2002) la socioepistemología se plantea el examen del conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y escenarios particulares. El conocimiento en este caso, se asume como el fruto de la interacción entre la epistemología y factores sociales. Esta consideración general plantea al programa socioepistemológico problemas teóricos y empíricos para explicar la construcción del conocimiento. El principal problema consiste en llevar a la práctica la postura sistémica para analizar las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y sus mecanismos de su institucionalización vía la enseñanza. La solución clásica a este problema es a través del establecimiento de *unidades de análisis*, cada una de las cuales retiene en forma simple las propiedades significativas de todo el sistema. En Matemática Educativa podemos encontrar diversas nociones teóricas que desempeñan este papel. Por ejemplo, dentro de la metáfora del aprendizaje por adaptación al medio, contenida en la teoría de situaciones didácticas, las nociones de *contrato didáctico*, *obstáculo epistemológico* y *concepción* juegan este papel en relación al sistema didáctico. La primera, la de contrato didáctico, da cuenta de la complejidad del sistema didáctico (constituido por el saber, aquél quién aprende y el quién enseña en un medio determinado); ya que el contrato son las cláusulas, mayoritariamente implícitas, que regulan las relaciones entre el profesor y el alumno respecto a un conocimiento matemático. Mientras que la segunda, la de obstáculo epistemológico, da cuenta de las relaciones entre la cognición y la epistemología; ya que un obstáculo epistemológico es un conocimiento adecuado para un amplio dominio de situaciones, de ahí su resistencia a ser abandonado, que fuera de éste resulta inadecuado. Para algunos investigadores la noción de obstáculo epistemológico es el "corazón" de una situación didáctica; es decir, motor de la evolución del sistema didáctico. Finalmente la tercera, la de concepción, da cuenta de la relaciones entre aquél quién aprende y el conocimiento matemático.

A nuestro parecer algunas nociones acuñadas en la perspectiva socioepistemológica tienen la característica de ser unidades de análisis para explorar el origen social del conocimiento. De entre ellas retomamos dos que son fundamentales: la de *resignificación y* la de *práctica social*. La noción de *resignificación* busca hacer una distinción de origen con respecto a la idea platónica que establece la preexistencia[1] de los objetos y procesos matemáticos y que implica considerar la unicidad de sus significados. La noción de resignificación emerge, entonces, como elemento para dar cuenta de que el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intención; lo que señala la posibilidad de enriquecer el significado de los conocimientos en el marco de los grupos humanos. La noción de *práctica social* es quizá la parte medular de la perspectiva socioepistemológica. En términos generales se entiende por práctica social como aquel conglomerado de supuestos socialmente compartidos, mayoritariamente implícitos, que norman la actividad. La tesis central es sostener que son las prácticas sociales las que generan conocimiento. Ejemplos de estas prácticas son la *modelación* y la *predicción*.

En resumen, dentro la aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa se parte del supuesto de que el conocimiento matemático es un bien cultural y que es producto de la actividad humana en su práctica de modificar y construir su realidad, tanto natural como social. Se trabaja con la hipótesis del origen social del conocimiento, asumiendo que los procesos de construcción y de creación humana son procesos de síntesis[2], normados por las prácticas sociales, de los objetos y herramientas culturales presentes en una sociedad o un grupo específico. Desde este punto de vista los "nuevos" conocimiento serían aquellos que surgen emergentes en los procesos de síntesis de "viejos" conocimientos. Estas consideraciones

[1] En si misma esta es idea a-social, debido a que se considera al conocimiento como independiente del ser humano.

[2] En este escrito se entenderá por *síntesis* o *integración* al proceso de interrelación de algunas "partes" para conformar un "todo". Una propiedad *emergente* sería aquella presente en el "todo" y no presente en las "partes".

rompen con la visión platónica de la preexistencia de los conceptos matemáticas y plantean la necesidad de rediseñar el discurso matemático.

Referencia

Cantoral, R. (2002). La sensibilidad a la contradicción: Un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja. En C.R. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 15, Tomo I, pp. 35 – 42). México.

Un Estudio del Teorema Fundamental del Cálculo en el Contexto Área Bajo la Curva

María Antonieta Aguilar
Instituto Tecnológico de Pachuca, CICATA - IPN
México
auva5404@prodigy.net.mx
Gráficas y Funciones – Nivel Superior

Resumen

La presente investigación esta situada en el marco de las investigaciones socioepistemológicas, por tanto, los conocimientos generados permitieron concebir a la matemática, de las relaciones entre la derivada y la primitiva (El Teorema Fundamental del Cálculo) como un conocimiento con significados propios que se construyeron y reconstruyeron en el contexto mismo de las actividades realizadas por los estudiantes. Abordamos aspectos como la relación entre las prácticas sociales y los saberes involucrados como son; función creciente y decreciente, máximos y mínimos, puntos de inflexión, que pudieron ser resignificados considerando el "área bajo la curva". Damos cuenta de cómo los estudiantes hicieron uso de herramientas y argumentaciones en ambientes gráficos.

Introducción

La aproximación socioepistemológica y la Teoría de Situaciones Didácticas Brosseau, G. (1986, 1997, 2000) constituyen nuestro marco teórico, como metodología utilizamos a la Ingeniería Didáctica Artigue, M.(1995).

Analizamos las relaciones que establecen los estudiantes entre la primitiva y la derivada en el escenario gráfico, específicamente la relación del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), en el cual, la función área esta representada de la manera siguiente $A´(x) \sim f$, que puede leerse como "el área bajo la curva de la derivada es a la gráfica de la primitiva" y damos cuenta de cómo los estudiantes descubren dicha relación a través de las interacciones con diversos tipos de funciones y que son aplicadas a la resignificación en Física, por ejemplo, cuando se manejan conceptos inherentes al movimiento rectilíneo, uniformemente acelerado o tiro parabólico.

Otro escenario consiste en discutir aspectos de la función primitiva a través de la información gráfica de la función derivada sin considerar explícitamente las expresiones de las funciones, y ha sido analizado en el trabajo de Cordero (1994).

Postulamos que cuando los estudiantes interactúan en ambientes gráficos, reconstruyen significados (aquí existe una epistemología), justamente la perspectiva esta en la argumentación que se encuentra en dicho ambiente gráfico Aguilar, M.A.(2002,2003). Consideramos que los estudiantes reconstruyen significados a través de asociar prácticas, las cuales provienen de la actividad humana, la cual concebimos como el conjunto de actividades que realiza un individuo en una situación concreta, en nuestro caso tratase de el estudiante, el cual se encuentra inmerso en el proceso de construcción o reconstrucción de su conocimiento, en este caso, la relación entre F y F´ que es el (TFC). El proceso de construcción y reconstrucción que se da en la actividad humana, genera las argumentaciones, en nuestro caso Comportamiento Tendencial de las Funciones (ctf) y Teorema fundamental del Cálculo (TFC).

La actividad humana entonces es fuente de la reorganización de la obra matemática, para que ello ocurra el estudiante deberá interactuar con las gráficas de las funciones en situaciones específicas y esto le permitirá la reconstrucción de significados que se da en el salón de clases.

Desarrollo

Se inicia con el diseño de la situación ***Estudio del TFC en el contexto área bajo la curva*** que permitió la resignificación de ciertos tópicos de las relaciones entre la primitiva y derivada, como se muestra en las secuencias 1 y 2 referentes a la situación de la contextualización "área bajo la curva". En estas secuencias se muestra la aplicación a la Física con el movimiento Rectilíneo uniforme y el tiro parabólico.

Aplicación 1. Movimiento rectilíneo uniforme

Se pide a los estudiantes:
Si la rapidez media (dada en m/seg.) con la que se mueve una partícula puede representarse con la gráfica que tiene marcada el área bajo la curva:

- i) dibuje la gráfica de la función primitiva
- ii) ¿Cómo expresaría la posición de la partícula (S (t)) en cualquier t?
- iii) ¿Cómo expresaría la Velocidad de la partícula en (V(t)) en cualquier t?

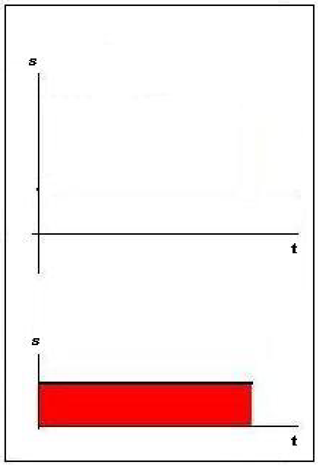
Aplicación 2. Tiro parabólico

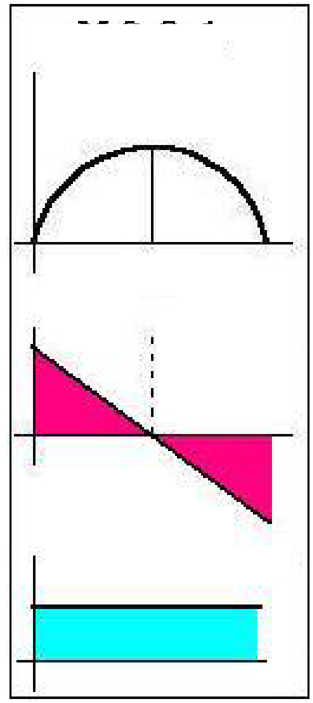
Un proyectil sigue la trayectoria que se muestra en la figura, revise todo el gráfico y en base a los datos ahí plasmados conteste:

- i) Escriba una expresión analítica para las funciones de posición, velocidad y aceleración del proyectil
- ii) ¿En que momento la velocidad del proyectil es igual a cero?
- iii) ¿Cuál es el valor de la aceleración?
- iv) ¿Qué relación existe entre función primitiva creciente y la velocidad del proyectil?
- v) ¿Qué relación existe entre función primitiva decreciente y la velocidad del proyectil?

Aplicación 2

Aplicación 1





Análisis

Como señala la ingeniería didáctica, un análisis a priori, es conveniente, en nuestro caso intervienen como fundamentos la aproximación socioepistemológica y la teoría de situaciones didácticas. Hacemos notar que tales aproximaciones teóricas van estrechamente relacionadas con la metodología.

En la aproximación socioepistemológica**,** la fuente de abstracción se encuentra en la esfera de la actividad humana. Justo en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), las secuencias involucradas contienen actividades correspondientes a dicha esfera. Podríamos decir que la coexistencia entre la aproximación socioepistemológica y la Teoría de Situaciones Didácticas, es precisamente la actividad humana que además resulta ser el punto común de ambas. Tomamos de la aproximación socioepistemológica, las actividades o prácticas sociales y de la TSD, las actividades presentes en las secuencias de la situación; estudio del Teorema Fundamental del Cálculo en el contexto área bajo la curva.

Esas actividades son parte de nuestro objeto de estudio, y las vemos plasmadas en las respuestas que los estudiantes dieron al ser entrevistados. Es por eso que en este trabajo consideramos a las prácticas sociales como la base del desarrollo en el conocimiento matemático.

De acuerdo a lo anteriormente tratado, una de las tareas primordiales de la aproximación socioepistemológica es la identificación de esas prácticas sociales las cuales han favorecido y favorecen la construcción del conocimiento matemático y justamente las detectaremos en el análisis de las respuestas que dieron los estudiantes y que se llevan a efecto en el salón de clases pues resultan ser nuestras evidencias.

Este momento al igual que el anterior es un momento de aplicación de los conocimientos en particular al movimiento rectilíneo. Generalmente en los cursos de Física y en los textos no hay congruencia entre los fundamentos teóricos y la aplicación de formulas, axiomas, teoremas o principios.

Vemos, justamente, el enlace entre la parte teórica y la parte de aplicación ya sea a ejercicios escolares o a la vida cotidiana; pensamos que ello se logra con el diseño de situaciones con secuencias como las que se presentan en este tipo de actividades.

Cuando a las estudiantes se les pidió dibujar la gráfica de la función primitiva dibujaron casi automáticamente una línea recta correspondiente a una función lineal y cuya área bajo la curva corresponde al área acotada por una función constante, como se muestra:

Avril *dibuje la grafica de la función primitiva*
Cecy *esa ya la teníamos, ya la hicimos*
Rosa *nada mas analicen, desde el origen*
Avril *como expresaría la posición de la partícula s(t) en cualquier t, la posición constante, no?*
Rosa *la constante es la velocidad, es lineal . . . .*
Avril *pero si es constante?*
Rosa *a que es igual s(t)*
Avril *puede ser 2x?*
Rosa *un 2, 3 o k*
Cecy *entonces s(t) = kx como . . . . . v(t) = k*
Avril *v(t) = k*

Cuando se les pidió que expresaran la posición de la partícula S(t) en cualquier t, escribieron S(t)= k x, lo mismo hicieron para la expresión de la velocidad V(t) = k. Las estudiantes realizaron estas actividades muy seguras de sí mismas, confiadas y satisfechas, creemos que esto fue así porque sintieron que construían su propio conocimiento a través de la resignificación pudiendo relacionar el contexto gráfico con el analítico.

Aplicación 3. Movimiento Parabólico

En esta actividad ya no se les pide dibujar el área bajo la curva o bien encontrar la grafica de la función primitiva, porque pensamos que esta bien establecida en el conocimiento y entendimiento de las estudiantes, prácticamente conviene que establezcan relaciones en un área especifica, en este caso el movimiento parabólico.

i) Escriba una expresión analítica para las funciones de posición, velocidad y aceleración del proyectil.
$S(t) = - k\, t^2 - c$
$V(t) = - 2k\, t$
$A(t) = - 2k$
$= - k$
$= - 9.81$

ii) ¿En que momento la velocidad del proyectil es igual a cero?
Cuando el proyectil alcanza la altura máxima.

iii) ¿Cuál es el valor de la aceleración?
$-9.81\ m/s^2$

iv) ¿Qué relación existe entre función primitiva creciente y la velocidad del proyectil? R es positiva

v) ¿Qué relación existe entre función primitiva decreciente y la velocidad del proyectil? R Es negativa

Las respuestas dadas por las estudiantes fueron contundentes, debido a que establecieron relaciones entre funciones primitivas y derivadas utilizando los contextos gráfico y analítico igual que en la actividad A 2, pero más ampliada puesto que aquí interviene otro factor físico, la aceleración. A ellas no les resulto difícil o tedioso trabajar con estos parámetros, puesto que establecieron relaciones entre ellos como mostramos a continuación:

Rosa s(t) que función nos describe, cuadrática, una parábola
Avril una función cuadrada, puede ser – kt^2 para tener desplazamiento a la derecha
Rosa más algo para tener el desplazamiento
Cecy + c
Rosa la velocidad, que es?
Avril la derivada
Rosa entonces . . . .
Avril -2kt, ahora la derivada otra vez
Rosa mmmjj
Cecy a(t) = -2k
Rosa a que es igual 2k, es una sola constante k, =-k, esa k tiene un valor en todos los formularios
Cecy es la gravead, es que. . . .
Rosa 9.81 m/ seg^2
Avril en que momento la velocidad es cero, en el punto medio
Rosa cuando el proyectil alcance la altura máxima
Avril que relación existe entre función primitiva creciente y la velocidad del proyectil
Karla cuando la posición del proyectil es creciente, la velocidad . . . .
Cecy decrece, no?
Rosa si pero la relación que estamos ocupando es depende al área
Cecy no entiendo, es positiva
Rosa si la función es creciente es positiva y si es decreciente es negativa

Podemos decir que esta es una actividad de recopilación de conocimientos y aplicaciones con significado, por eso las estudiantes lo realizaron con mucha seguridad, confianza y optimismo ya que sintieron que valió la pena realizar actividades convertidas posteriormente en prácticas sociales para la adquisición del conocimiento matemático.

Conclusiones

Las herramientas utilizadas fueron:

La identificación del efecto de los coeficientes en F y F´, b) reconocimiento de patrones de comportamiento gráfico, c) búsqueda de tendencias en los comportamientos y d) establecimiento de relaciones entre F y F´.

Los Argumentos utilizados por los estudiantes

Cuando los estudiantes interactúan con las gráficas de primitivas y derivadas, ellos usan al comportamiento tendencial de las funciones, cuyo estatus lo ubica en ambientes gráficos y al Teorema Fundamental del Cálculo, como argumentos para construir o reconstruir significados Aguilar, M.A. (2004).

Las resignificaciones

Con respecto a las resignificaciones, llamadas así a nociones o conceptos previos que los estudiantes ya poseían pero que al interactuar con las gráficas de F y F´ y las áreas bajo la curva de ésta última entienden significados o los reafirman convirtiéndolos en objetos por ejemplo; máximos, mínimos, puntos de inflexión función creciente o decreciente, ello les permitió construir conocimiento en diversos aspectos tales como: i) los estudiantes hacen uso de modelos globales y no puntuales poniendo en confrontación ambos modelos, ii) la definición del teorema fundamental, en el discurso escolar es aplicable a funciones continuas definidas en todo su dominio, con la resignificación de ciertos tópicos podemos aplicar el Teorema Fundamental, incluso a cierto tipo de funciones no continuas o no derivables, es decir, si una función es no derivable puede ser integrada utilizando estos argumentos gráficos.

Los obstáculos

Los obstáculos a los que se enfrentaron los estudiantes fueron:

Ellos están acostumbrados a que cuando escuchan o ven "algo igual a cero" lo relacionan inmediatamente con una cantidad. El ambiente gráfico les permite identificar a $F'(x) = 0$ como una función, en donde, para cada valor de x el valor de "y" es cero y dicha gráfica aparece sobre el eje "x". Otro obstáculo consiste en que a los estudiantes les resulta complicado identificar las zonas del "área bajo la curva", esto lo superan después de varias interacciones con diversas gráficas de F y F´.

El estatus de la aproximación socioepistemológica

De acuerdo a Arrieta, J., Buendía, G., Ferrari, M., Martínez, G. y Suárez, L (2004) ésta aproximación desarrolla estrategias de investigación de naturaleza epistemológica donde, es entendida como el estudio de las circunstancias que favorecen o posibilitan la construcción del conocimiento. Sí la epistemología es entendida a través de la actividad humana, nos permite tomar como objeto de estudio situaciones que no están definidas en una estructura matemática y que, sin embargo, están presentes cuando se estudia al hombre haciendo matemáticas y no solo su producción matemática. Es en este sentido donde los aspectos constructivos del conocimiento son el foco de interés para nuestras investigaciones. El planteamiento anterior deriva en el análisis de la relación entre prácticas sociales y el conocimiento, entendiendo a las prácticas sociales como un conjunto de acciones voluntarias que, intencionalmente, desarrolla el individuo para construir conocimiento. Las investigaciones desarrolladas en este marco se han realizado a través de revisiones históricas y de lo que sucede en los sistemas didácticos, en estas investigaciones se da evidencia de cómo el discurso matemático suele favorecer solo algunos aspectos relacionados con dichos conceptos, dejando de lado elementos presentes en la construcción social del conocimiento tales como los argumentos y las herramientas relacionadas; que son básicamente aquellos factores que facilitan la construcción del conocimiento. Tradicionalmente, la epistemología de conceptos ha permitido explicar las dificultades en la adquisición de objetos estáticos; sin embargo, no ha logrado establecer relaciones, más allá de un nivel utilitario, entre los diferentes tópicos del conocimiento matemático. Nuestra hipótesis básica, consiste en señalar que una epistemología basada en prácticas sociales favorecería un estudio en la construcción social de la matemática a través de la reconstrucción de significados asociado al saber matemático. De esta manera se favorecería el carácter funcional del mismo. Una vez que se reconocen a las prácticas sociales como generadoras de conocimiento, las situaciones que se diseñan fundamentadas en dichas socioepistemologías permiten hacer evidente herramientas y argumentos en los contextos interactivos del salón de clases (Ibíd.). En efecto los planteamientos anteriores se percibieron en el desarrollo de la presente investigación, en donde los estudiantes realizaron lo siguiente:

Desarrollaron actividades tales como; trazar un sistema de ejes cartesiano, dibujar gráficas tanto de F como de F´ (usando herramientas IRBE) para finalmente asociar (estableciendo relaciones), esto les permitió realizar algunas prácticas sociales bien definidas, que a su vez los condujo a ***derivar e integrar*** o ***variar y aproximar***.

Referencias Bibliográficas

Aguilar, M. A. (2002). Relaciones entre F y F´ el papel del registro gráfico. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 15, Tomo II, pp. 1004-1009). México.

Aguilar, M. A. (2003). Reconstrucción de Significados que realizan los estudiantes entre F y F´, cuando interactúan en ambientes gráficos. En J. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol 16, Tomo II, pp. 704-709). Chile.

Aguilar, M. A. (2004). Reconstrucción de Significados de la primitiva y Derivada en ambientes gráficos. La argumentación como parte esencial de la actividad humana. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 17, Tomo I, pp. 176-180). México.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Arrieta, J., Buendía, G., Ferrari, M., Martínez, G. y Suárez, L. (2004). Las Prácticas Sociales como generadoras del conocimiento matemático. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 17, Tomo I, pp. 418-422). México.

Brosseau, G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques 7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des Mathématiques*. EUA: Kluwer Academic.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática 12*(1), 5-38.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la Integral y la construcción de sus significados: un estudio del Discurso Matemático Escolar*. Disertación doctoral no publicada, Cinvestav, México.

Una Alternativa para la Construcción Aritmética-Algebraica de las Convenciones Matemáticas Presentes en los Exponentes

Rocío Antonio y Gustavo Martínez
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
México
antonny_81@yahoo.com.mx
Socioepistemología – Nivel Básico

Resumen

En este trabajo se presenta los avances de una investigación que tiene como objetivo explorar qué alternativas son factibles para la construcción de las convenciones matemáticas, presentes en los exponentes no naturales, en el plano del pensamiento aritmético- algebraico. Ya que consideramos a la convención matemática como una herramienta para la construcción del conocimiento matemático funcional, hemos diseñado una alternativa: que se trata de una situación didáctica tomando como metodología a la Ingeniería Didáctica y basada en la hipótesis de construcción de conocimiento que nos proporciona el proceso de convención matemática. Aquí presentamos, además, los resultados de una puesta en escena de la situación con estudiantes de secundaria.

Introducción

Esta propuesta surgió a partir de las siguientes exploraciones preliminares:

- Martínez, G. (2002) donde se observaron varios fenómenos didácticos con algunos estudiantes de diferentes niveles escolares (secundaria, medio superior y superior), como los siguientes:

RESPUESTAS	ARGUMENTOS
$2^0 = 0$	El 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2.
$2^{-3} = (-2)(-2)(-2) = -8$	Se multiplica tres veces y al último se le agrega el signo
$2^{3/2} = 2\left(3/2\right) = 3$	
$2^0 = 2$	El 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada
$\sqrt{2} = 1.4$	

Con estos tipos de respuestas nos damos cuenta que el estudiante no tiene claro el concepto de exponentes no naturales y no ha alcanzado la estabilidad necesaria para construir el conocimiento de la función exponencial. Se observó, por ejemplo, que los estudiantes están muy influenciados con el concepto de los exponentes naturales (multiplicación reiterada) por las respuestas que dieron, el cero como nada o de ninguno, la segmentación del número negativo “como número positivo” con el signo “menos”, además de que el alumno cuando se le presentó un radical lo ignoró y no interpretó su resultado como una exponenciación.

Los libros de texto

Haciendo una revisión de varios libros de secundaria y de álgebra de diferentes niveles escolares observamos que la mayoría de ellos (Alarcón, 2000; Almaguer et al. 1994; Barnett, 1997; Catter, 1997; Gabran, 1990; Laraglia et al, 1997; Nápoles, 1965; Salas, 1997; Shaaf, 1997) realizan el siguiente tratamiento:

- La secuencia de los exponentes es la siguiente: como abreviación de la multiplicación reiterada (naturales), cero, negativo y fraccionario
- Sus argumentos son de tal manera que se conservan las leyes de los exponentes naturales; pero en realidad no son “objetos de estudio”. (Tabla 1)

		ARGUMENTOS		
		$2^n * 2^m = 2^{n+m}$	$2^n / 2^m = 2^{n-m}$	$(2^n)^m = 2^{n\cdot m}$
EXPONENTES	Cero	$2^0 \cdot 2^2 = 2^2 \Rightarrow 2^0 = 1$	$1 = 2^4/2^4 = 2^{4-4} = 2^0$ $\Rightarrow 2^0 = 1$	No hay argumentos
	Negativo	$2^{-2} \cdot 2^2 = 2^{-2+2} = 2^0 = 1$ $\Rightarrow 2^{-2} = 1/2^2$	$1/2^2 = 2^4/2^6 = 2^{4-6}$ $= 2^{-2} \Rightarrow 1/2^2 = 2^{-2}$	No hay argumentos
	Fraccionario	$2^{1/2} \cdot 2^{1/2} = 2^{1/2+1/2}$ $= 2^1 = 2 \Rightarrow (2^{1/2})^2 = 2$ $\Rightarrow \sqrt{2} = 2^{1/2}$	No hay argumentos	$(2^{1/2})^2 = 2^1 = 2$ $\Rightarrow 2^{1/2} = \sqrt{2}$

Tabla 1. Argumentos presentes en los libros de Texto

- Como reglas de transformación ($a^0 = 1$, $a^{-n} = 1/a^n$, $a^{1/2} = \sqrt{a}$).

Dichas reglas de transformación son utilizadas en la escuela para realizar operaciones con monomios, aplicar reglas de derivación e integración y para la definición de función exponencial y logaritmo.

La noción de convención matemática

Para dar cuenta de la naturaleza de los significados que giran alrededor de los exponentes hemos acuñado la noción de “convención matemática” (Martínez, 2002; Martínez, 2003). Una convención matemática es un agregado (bajo la forma de una definición, un concepto, una restricción, una interpretación entre otras) a una teoría, establecido con el objetivo de que una estructura o parte de ella, de objetos matemáticos construida con anterioridad se preserve para satisfacer ciertos requerimientos dentro de una nueva organización del conocimiento.

Es decir, en nuestras exploraciones preliminares nos damos cuenta que en las aulas escolares hay un cierto problema con estos objetos matemáticos, el estudiante no percibe el carácter convencional del manejo de los exponentes (porque convenir matemáticamente así). Desde nuestro punto de vista son necesarios varios aspectos para la construcción de las convenciones matemáticas. En particular, en el marco del pensamiento aritmético-algebraico son: la ruptura de la concepción de cero como nada, la del exponente entero como multiplicación reiterada y la del surgimiento de las convenciones como un acuerdo para dar unidad a la operatividad de las potencias.

Descripción de la situación didáctica

Objetivo. Se pretende que el estudiante[1], construya de manera aritmético-algebraico las leyes de los exponentes manipulando la objetivisación de las potencias en forma verbal y después confronté su conocimiento de 2^0 con la ley del exponente para el producto, para que se percate de porque convenir matemáticamente que $2^0 =1$.

Análisis a priori. Los estudiantes contestarán $2^0= 0$ o que $2^0 = 2$, por el manejo que se le da en los libros y en las aulas escolares a estos objetos matemáticos y por la influencia del concepto de los exponentes naturales.

Diseño y análisis a priori. Esta situación didáctica esta comprendida en ocho actividades y se clasifica en cuatro etapas que son las siguientes:

La primera etapa (Actividad 1 y 2). **Recordar, Familiarizar y Objetivizar.**

Actividad 1. *Recordar* y *familiarizar* los elementos de la notación exponencial como son los exponentes y la base, y el concepto de los exponentes naturales como multiplicación reiterada a través del llenado de una tabla hasta la décima potencia de dos, clasificada en exponentes, notación exponencial, valor de la potencia y nombre de la potencia. *Objetivizar* de manera verbal el nombre de la potencia, es decir, hacer de las potencias objetos.

Actividad 2. Que se percate que al realizar multiplicaciones con potencias de dos, el resultado es otra potencia de dos; tratando de objetivizar aquí también las potencias de manera verbal y que observe que hay una cierta regularidad: la ley de los exponentes para el producto. Además que todos son múltiplos de dos (es aquí donde encuentra la manera de resolver aritméticamente y de manera intuitiva algebraicamente la ley).

La segunda etapa (Actividad 3). **Construir.**

Actividad 3. Se les recuerda que existe una ley de los exponentes para el producto y que es la que encontró en la actividad anterior, tratando de que reflexione con respecto a la primera etapa. Para esto se llena una tabla de multiplicaciones de potencias de dos, expresadas de manera verbal, guiándose por la primera actividad, para así recalcar y construir la noción de la ley del producto tanto aritmético como algebraico es aquí donde esperamos que se de cuenta

---

[1] Esta situación didáctica esta diseñada para estudiantes de secundaria (12-15 años en el sistema educativo mexicano)

de que al multiplicar las potencias expresadas verbalmente el resultado es la suma de sus ordenes (por ejemplo segunda potencia por tercera potencia es la quinta potencia), y le pediremos que exprese tanto aritmético como algebraico a dicha ley. En este documento consideramos que el aspecto aritmético consiste, por ejemplo; en usar (4)(8) = 32, mientras que $2^2 * 2^3 = 2^5 = 32$ la entendemos como un uso algebraico.

La tercera etapa (Actividades. 4 y 5). **Profundizar.**

Actividad 4. Mencionamos la propiedad que ha encontrado y las dos maneras en que puede resolverse, como por ejemplo:

- o Multiplicar con el valor de cada una de las potencias.
- • Sumar los exponentes y calcular el valor de la potencia.

$$2^3 * 2^2 = \begin{cases} \circ\ 2^3 * 2^2 = 8 * 4 = 32 \\ \bullet\ 2^3 * 2^2 = 2^5 = 32 \end{cases}$$

Actividad 5. Profundizará esta propiedad resolviendo varios ejercicios, donde se dará cuenta que resolviendo de las dos maneras llega al mismo resultado (esta es nuestra herramienta para dar cuenta del carácter convencional de 2^0)

La cuarta y última etapa (Actividades 6, 7 y 8). **Confrontar y Convenir.**

Actividad 6. Se le pregunta cuanto vale 2^0 para determinar cuál es su conocimiento antes de pasar a la siguiente actividad.

Actividad 7. Esta actividad, depende de la respuesta de la actividad anterior, aquí confrontará su conocimiento de 2^0 con la ley del producto de exponentes resolviendo de las dos maneras. Si su respuesta de 2^0 es 1, observará que llega al mismo resultado resolviendo de las dos maneras y si no tendrá que convenir cuanto tiene que valer 2^0 para obtener el mismo resultado (es aquí donde el alumno se tiene que dar cuenta del carácter convencional de porque $2^0 = 1$).

Actividad 8. Por último se le pregunta por segunda vez cuanto vale 2^0 después de haber analizado la actividad anterior.

Algunos resultados de la puesta en escena

Se le aplico a estudiantes de 1er año de secundaría de 13 y 14 años aproximadamente, en la ciudad de Chilpancingo Gro. Para esto se hicieron dos equipos de tres integrantes cada uno.

En la primera etapa. En la actividad uno, no tuvieron ningún problema con el recordatorio de la noción de la multiplicación reiterada (concepto de exponentes naturales) y la objetivización de las potencias verbales. En la actividad dos, concluyeron que al llenar la tabla de multiplicaciones de potencia de dos, ciertas cantidades se repetían con la primera actividad (tabla de la multiplicación reiterada), en este caso las potencias de dos, hubo un niño que sus conclusiones fueron que el llenado de la tabla se trataba de una variación de porcentaje que equivale a la mitad o el doble del resultado anterior y que este se encuentra en su libro de secundaria, además otro estudiante observo qué al multiplicar nos daba una cantidad divisible al primer número. Cabe subrayar que en esta actividad nos falto material de apoyo que son las calculadoras ya que los estudiantes eran muy lentos para realizar las multiplicaciones.

La segunda etapa: al principio hubo confusión por la poca familiaridad de multiplicar objetos matemáticos expresados de manera verbal, así que le pedimos que se guiara por la primera actividad y resolvieron sin ningún problema. Respecto a la descripción de la ley del producto de la manera aritmética quizás por nuestra pregunta confusa en términos verbales para los estudiantes, no especificaron explícitamente la ley con un ejemplo concreto que es como lo queríamos.

En lo algebraico hubo algunos que si expresaron la propiedad en notación exponencial que es como nosotros lo manejamos en esta situación. Otros lo hicieron de manera verbal y algunos nada más tomaron de la primera actividad la lista de potencias que están expresadas en notación exponencial.

La tercera etapa: en esta etapa los estudiantes se dieron cuenta de lo que habían encontrado al realizar las actividades anteriores (al mencionar la ley del producto y las dos formas en que se pueden resolver) y varios se querían regresar para cambiar la respuesta de la construcción de la ley. Con respecto a la profundización de esta propiedad no tuvieron ninguna dificultad.

En la cuarta etapa: La respuesta de la actividad seis fue lo que teníamos previsto en nuestro análisis a priori, un equipo concluyo que $2^0 = 2$ y el otro que tenía dos valores $2^0 = 0$ o 2.

De lo anterior concluimos lo siguiente: Al equipo que concluyo con un solo valor, confrontamos su conocimiento con esa igualdad de $2^0 = 2$ resolviendo varios ejercicios con la ley del producto para que conviniera cuanto tenia que valer realmente 2^0 lo cual convinieron entre todos que era igual a uno. El otro equipo qué concluyo con dos valores, confrontamos su conocimiento con los dos valores; es decir utilizando las dos igualdades por separada, la primera resolviendo ejercicios con la igualdad de $2^0=2$ y la segunda con $2^0=0$, lo cual los llevo a una confusión por que preguntaban cuanto realmente valía, por que ya estaban desesperados por concluir ya que se había terminado el tiempo y tenían clases, así que por el factor tiempo estos niños concluyeron que era dos sin reflexionar nada al respecto.

A manera de conclusión

Aquí presentamos de manera general una situación didáctica para construir las convenciones de los exponentes en un contexto aritmético-algebraico. Los resultados de una primera puesta en escena nos permitieron identificar la factibilidad de que la situación promueva la construcción del conocimiento a través del proceso de convención matemática. Futuras investigaciones tendrán por objetivo recopilar más evidencias al respecto.

Referencias Bibliográficas

Alarcón, G. (2000). *Matemáticas, Aritmética y Álgebra*. México: Editorial Iberoamericana.
Almaguer, G., Bazaldúa, J., Cantú F. y Rodríguez L.(1994). *Matemáticas 2*. México: Limusa.
Barnett (1997). *Álgebra.* México: Mc Graw Hill.
Catter, P. (1997). *Fundamentos de Matemáticas I.* México: Mc Graw Hill
Figueras, O., Filloy E. y Lema, S. (1984). *Álgebra I y II*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
Gobran, A.(1990). *Álgebra Elemental*. México: Grupo Editorial Iberoamérica
Laraglia, F., Elmore, M. y Conway, D. (1997). *Álgebra.* México: Latinoamericana.
Martínez, G. (2002). Explicación Sistémica de Fenómenos Didácticos ligados a las Convenciones Matemáticas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 5*(1), 45-78.
Nápoles, A. (1965). *Álgebra elemental para escuelas secundarias*. México.
Martínez, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de de su funcionamiento en los exponentes*. Disertación doctoral no publicada. CICATA-IPN, México.
Martínez, G. (en prensa). Continuidad y Ruptura de significados en la transmisión y difusión del conocimiento. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol.18.)
Martínez, M. y Struck, F. (1998). *Matemáticas 2*. México: Santillana.
Salas, L.(1997). *Matemáticas I*. México: Ediciones Castillo.
Shaaf, P.(1997). *Álgebra. Un enfoque moderno*. México: Reverté.

Prácticas Sociales y Argumentos: El Caso de lo Periódico

Gabriela Buendía
UNACH
México
buendiag@hotmail.com
Socioepistemología – Nivel Medio, Superior

Resumen

Bajo la visión socioepistemológica, las prácticas sociales se reconocen como fundamentación del conocimiento matemático. Estas se reinterpretan para lograr su ingreso al sistema didáctico a través de situaciones en las que dichas prácticas se transforman en el argumento. Ello permite hablar de una resignificación del conocimiento matemático (periodicidad) en un contexto argumentativo (interpretación situacional de la práctica predicción). Nuestra propuesta es que *lo periódico* permitirá percibir articulaciones al seno del saber matemático.

Introducción

En el marco de la Socioepistemología se está desarrollando investigación acerca de la construcción social del conocimiento matemático, entendida ésta como explicar la generación del saber a través de las prácticas sociales que le dan origen (Cantoral y Farfán, 1998; Cantoral, 2000; Cordero, 2001). Uno de los principales resultados es la formulación de epistemologías de prácticas en las que la imagen de un conocimiento matemático puro y limpio se deja de lado, para dar espacio a un conocimiento no lineal en el que las argumentaciones y herramientas lo reconstruyen continuamente (Cordero, 2003).

Tomar a las prácticas sociales como una variable didáctica amplía necesariamente los marcos de referencia sobre el conocimiento matemático. En estos nuevos marcos, los aspectos analíticos del saber –normalmente provilegiados en el sistema didáctico- son robustecidos por argumentos y herramientas que pertenecen más al ámbito del quehacer humano y no exclusivamente al matemático. Nuestra propuesta es que las prácticas sociales –y no los objetos matemáticos- favorecen el tránsito entre dominios del saber para constituir un conocimiento funcional y articulado.

Lo periódico

En un marco socioepistemológico, podemos percibir a *lo periódico* –todo aquello en un sentido institucional, cultural e histórico que tiene que ver con la periodicidad- como un lenguaje que se usa antes, incluso, de que aparezca la periodicidad en su forma institucionalizada.

Sin embargo, los procesos de institucionalización han reducido este atributo a un equivalente con la definición de la función periódica, privilegiando además una centración en funciones continuas; muy en particular, en las funciones trigonométricas. En consecuencia, el uso de la periodicidad en el sistema didáctico parece limitarse a la aplicación de una fórmula para determinar si una función es o no periódica, así como al uso de teoremas factuales que establecen una relación biunívoca entre periodicidad y los comportamientos senoidales y que excluye cualquier otra función o comportamiento periódico.O bien, en el mejor de los casos, se establece una relación biunívoca también entre cualquier forma de repetición de una gráfica y la propiedad periódica.

Como ejemplo, a un grupo de cuatro profesores de nivel superior se les planteó la pregunta, "De las siguientes gráficas tiempo-distancia (*Figura 1)*, ¿cuáles son periódicas?"

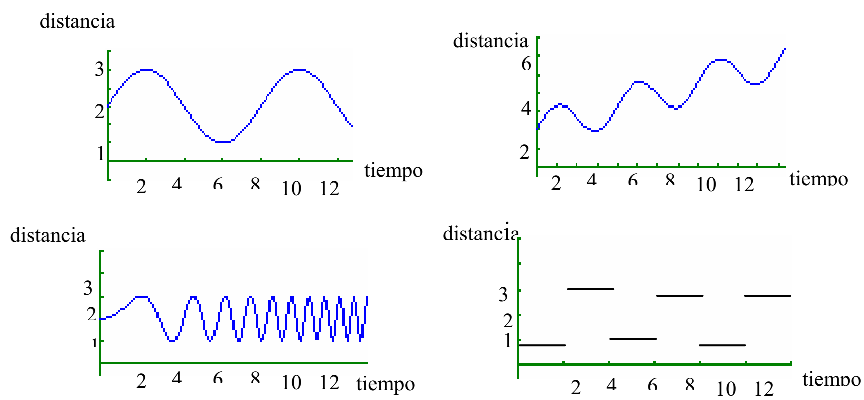


Figura 1

Dos ideas iniciales fueron que *"Todas son periódicas...excepto la última porque es discontinua... " "Todas son periódicas porque se están repitiendo"*

Una vez acordado que las gráficas periódicas son aquéllas que se repiten igual todo el tiempo, entonces surgieron argumentos como

"La segunda gráfica es periódica porque se repite igual todo el tiempo, lo mismo que la primera"
"Es como si hiciéramos un cuadrito en la primera para ver el periodo de repetición. Podemos hacer también un cuadrito para la segunda gráfica y veríamos, igual que en la primera, que el cuadrito se va repitiendo todo el tiempo igual...aunque también sube".

En estos comentarios subrayamos "todo el tiempo" porque se refieren explícitamente sólo a la repetición de intervalos iguales en el tiempo (eje *x*), independientemente de lo que suceda en el eje distancia. Estos comentarios se complementan con el siguiente:

"La tercera no es periódica porque los intervalos de tiempo no se repiten igual todo el tiempo, van disminuyendo"

Resulta necesario, entonces, que existan marcos de referencia más amplios sobre el conocimiento matemático lo cual implica reconocer que la matemática no se construye y reconstruye únicamente en términos de sí misma, sino como producto de la organización del grupo humano en el que vive. En esos marcos podría estudiarse el uso del conocimiento matemático a través de la función y forma que va tomando de acuerdo a la propia organización del grupo humano en cuestión. Ello nos hablará de la resignificación del conocimiento.

Para lo periódico, la socioepistemología que hemos formulado (Buendía, 2004) explica que la predicción como práctica social resulta ser un argumento para construir lo periodico ya que al predecir, se reconstruyen los signficados asociados a la repetición de un movimiento. Es importante hacer notar que la práctica de predicción no se reduce a pedir "ejercicios" de predicción y analizar si el estudiante logró o no predecir correctamente. Más bien, se compone de todo un escenario predictivo, desarrollado y propuesto de manera intencional de tal manera que sea una actividad que trascienda y transforme al objeto en cuestión. Ahí, las predicciones situacionales formulan argumentos que se van construyendo de acuerdo con las operaciones que los estudiantes son capaces de hacer, bajo las condiciones que ellos son capaces de capturar y transformar y con los conceptos que van construyendo progresivamente (Cordero, 2001).

Si por "argumento" uno podría entender una construcción hecha para convencer en el contexto de la interacción, bajo la visión socioepistemológica, la argumentación es la "materialización" de la práctica intencional (Campos, 2003). Y se compone de significados, procedimientos y de cuestiones cognitivas con relación a un contenido específico. Por lo tanto, la argumentación es algo necesariamente más rico, compuesto no sólo de elementos de corte discursivo sino de elementos que dan cuenta del uso del conocimiento en cuestión; es decir, dan cuenta de la resignificación del conocimiento matemático.

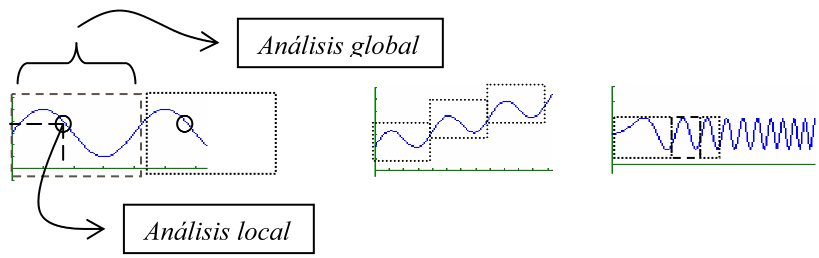
Un argumento para lo periódico

Hasta ahora (Buendía, 2004), hemos estudiado la periodicidad en un contexto de funciones y sus gráficas. Para ello, se diseñó una situación compuesta por ocho gráficas tiempo-distancia que representaban movimientos periódicos. Las cuatro primeras gráficas son las que se muestran en la figura1. La situación propone describir el movimiento en cada caso y, posteriormente, predecir la posición del móvil en un tiempo futuro (t = 231). Hemos dado evidencia acerca de la reconstrucción de significados acerca de la repetición del movimiento por medio de una confrontación entre agrupaciones de las gráficas por semejanzas y diferencias antes y después de predecir. Los criterios que se ponen en juego para agrupar antes y después de predecir pueden ser percibidos de diferente manera cuando sólo son tomadas en cuenta las características repetitivas de las gráficas en comparación con tomar en cuenta el *modo y tipo* de repetición. Esta distinción es la que favorece la predicción que se realiza en cada una de las gráficas.

Una vez confrontadas dichas clasificaciones, tenemos un escenario para resignificar lo periódico; un escenario tal que la relación periodicidad-predecir puede percibirse a través de argumentos y herramientas situacionales. Así, la búsqueda de significaciones para lo periódico no descansa en un virtual encadenamiento lógico matemático de objetos, sino en el buscar la predicción de la posición lejana que se tendrá sobre la gráfica del movimiento dada una cierta información actual (Cantoral, 2001).

En ese entorno, se presentan dos elementos importantes alrededor de lo periódico: el comportamiento de la función visto como una unidad compuesta del comportamiento en cada uno de los ejes y la necesidad de una relación dialéctica entre análisis de tipo local y global. Esta unidad de análisis surge en un escenario que propone a la predicción como una práctica intencional de tal manera que se tiene que echar mano de herramientas como el *hallar y usar* una unidad de análisis

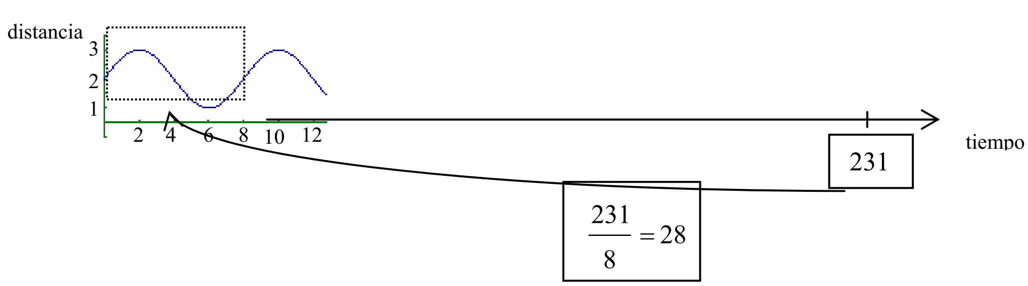
En el reconocimiento de dicha unidad juega un papel importante la relación dialéctica entre análisis de tipo local y global ya que tendrá que ser tal que en sí misma contenga información del todo y de cada una de las partes que la componen para que lo periódico del movimiento sea relevante.



Una vez reconocida dicha unidad, su uso obliga a explicitar el comportamiento en el eje x y en el eje y para distinguir el tipo de repetición que presenta una gráfica. Ya no será lo mismo decir sólo "La gráfica se repite" que especificar cómo es que se repite. El proceso periódico puede ser distinguible de una manera funcional –útil- del objeto periódico ya que, aunque, un proceso periódico implica una repetición en el movimiento, ahora puede percibirse que dicha repetición puede tener diferentes acepciones. Este es un aspecto cognitivo importante dentro de una socioepistemología rodeado de elementos que no son sólo de corte cognitivo y que habla de elementos como el comportamiento de las funciones como herramienta presente en la discusión de lo periódico.

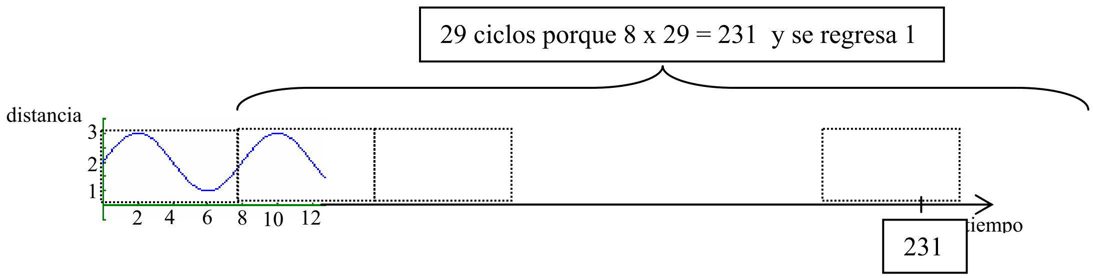
Lo anterior da cuenta de cómo, al materializar una práctica social, ésta puede ser vista como un argumento en la resignificación del saber. Haciendo un análisis enfocado en la situación, este argumento de predicción se va formando de argumentos que se van construyendo de acuerdo con las operaciones que los estudiantes son capaces de hacer y con los significados que van reconstruyendo progresivamente. Veamos los siguientes procedimientos cuando se pide predecir la posición del objeto en el tiempo 231 en la primera de las gráficas que presentamos anteriormente.

a) *Del futuro al presente.* El tiempo pedido se divide entre el intervalo de la unidad de análisis. Se determinan cuántos ciclos completos hay y se hace una búsqueda local de acuerdo al residuo de la división.



Se forman 28 ciclos completos y sobran 7, siete segundos, por lo que el móvil estará en la posición equivalente al tiempo 7.

b) *Del presente al futuro*. Se reproduce la unidad tantas veces como sea necesario hasta hallar, aproximadamente, el tiempo pedido. Esta aproximación puede ser por exceso o defecto al valor pedido. Una vez que se determinen cuántos ciclos se cumplirán entonces se hace una búsqueda local.



Aunque ambos procedimientos son equivalentes y básicamente se fundamentan en operaciones que son entre sí inversas (multiplicación y división), reflejan mucho más que una operación aritmética. En cada ejemplo, podemos identificar significados y procedimientos en relación a la repetición de un movimiento, así como cuestiones cogntivas relativas a la dialéctica proceso-objeto. Reflejan, entonces, el uso de la unidad de análisis y, en consecuencia, cómo se *usa lo periódico* de una gráfica para predecir. En ese sentido es que hablamos de una resignificación del conocimiento matemático (periodicidad) en un contexto argumentativo (interpretación situacional de la práctica predicción).

Otros escenarios para lo periódico

Hemos dicho que el explicar la construcción del conocimiento matemático a través de las prácticas que lo originan, motiva el hallar relaciones entre el sistema educativo. Para ilustrar nuestra propuesta, tomemos en caso de las fracciones periódicas. ¿Cómo se usa lo periódico en este caso?

En unas primeras exploraciones que hemos realizado al respecto, hemos percibido, nuevamente cómo su naturaleza periódica suele quedar minimizada frente aspectos de corte algorítmico como una división. Por ejemplo, a un grupo de 7 estudiantes se le pidió convertir la fracción 7/22 a decimales y hallar la cifra que ocupa el lugar 14. Resultó que cuatro estudiantes realizaron explicitamente la división catorce veces y tres realizaron la división tres o cuatro veces, escribiendo las catorce cifras al seguir el patrón obtenido.

Podemos notar que, aunque no todos requieren hacer la división catorce veces, todos requieren "ver" las catorce cifras. Esto es, para decir cuál es la cifra número catorce, no se cuenta con ningún otro recurso que ir contando hasta llegar a la catorceava cifra. La *naturaleza periódica* de la sucesión parece no haber sido relevante.

Nuestra tarea ahora es proponer un escenario predictivo para el caso de las fracciones en el que el hallar y usar una unidad de análisis sean herramientas en el reconocimiento útil de lo periódico.

Referencias Bibliográficas

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de Doctorado no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Campos, C. (2003). *La argumentación gráfica en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica.* Tesis de Doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Epsilon 42*(14), 854-856.

Cantoral, R. (2000). Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Vol. 13, pp.54-62*)*. México.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4(2)*, 103-128.

Cordero, F. (2003). Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y significados. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 16, Tomo 1, (pp.73-78). México.

.

La Noción de Conservación en el Estudio del Área

Ma. Guadalupe Cabañas
Cinvestav-IPN
México
gcabanas52@hotmail.com
Socioepistemología – Nivel Superior

Resumen

En este artículo se describe el desarrollo de un curso que trata de los conceptos de área, medida y conservación de área, el cual estuvo dirigido a profesores de matemáticas de nivel medio y superior. El trabajo se llevó a cabo en tres fases. En la primera se analizaron los conceptos de área, conservación y medida (de área). En la segunda se mostraron los resultados de algunas investigaciones asociadas con el tema de conservación y medida de área, entre los que destacan los estudios de Piaget y sus colaboradores, así como Kordaki y Potari. En la tercera se realizaron actividades que involucró el trabajo con estos conceptos en figuras geométricas planas y expresiones analíticas. En ese tenor, es que en este escrito se analizan estos conceptos, los resultados de investigaciones que se presentaron y analizaron en el curso, y las actividades realizadas.

Los conceptos de área, conservación y medida (de área)

El concepto de área se asocia al de medida. Se presenta en situaciones diversas como: la extensión que ocupa un terreno o un lago, el territorio que ocupa un estado, una pared a construir o pintar, un campo a sembrar, en la elaboración de planos y mapas, etc. Así, identificamos que los contextos en que se presenta el área pueden representar la extensión de un cuerpo; expresar un espacio vacío o bien la marca que deja un móvil al desplazarse. Desde el punto de vista matemático el área se refiere a figuras geométricas, particularmente al estudio de superficies planas y no planas, que pueden ser expresadas o no mediante fórmulas.

El concepto de área está relacionado con la cuantificación de una superficie a la que se asocia una unidad de medida, expresada como unidad cuadrada. La noción de área a su vez está relacionada a las de conservación, comparación y medida, mismas que pueden ser representadas a través de formas diversas, como: gráfica, numérica y simbólica.

El área en particular, es parte de la cultura de todas las sociedades, una parte de la ciencia y la tecnología, y de la vida diaria de las personas (Kordaki y Potari, 1998). La conservación, significa que el valor de un área permanece intacto mientras su figura puede ser cualitativamente nueva (Piaget, et al, 1970; Kordaki y Potari, 2001). La conservación puede presentarse a partir del cambio de la posición de una figura sin modificar su forma, mediante los movimientos de traslación, rotación y reflexión. Puede darse además, modificando una figura partiéndola y reacomodando sus partes, y; mediante transformaciones analíticas y geométricas. El concepto de medida de área consta del concepto de unidad, del concepto de iteración de unidad, de la cantidad de unidades y el cálculo de fórmulas (Piaget et al, 1970; Kordaky y Potari, 1998).

Freudenthal (1983) indica formas de aproximarse al concepto de área como las siguientes:

a) *Repartir equitativamente*. Se incluyen situaciones en las que dado un objeto hay que repartirlo, ya sea aprovechando regularidades, por estimación o por medición.
b) *Comparar y reproducir*. Incluye situaciones en las que hay que comparar dos superficies y también aquellas en las que hay que obtener una reproducción de una superficie con diferente forma a la que se tiene. Estas reproducciones pueden llevarse a cabo mediante inclusión, por transformación, por estimación, por medición o por medio de funciones.
c) *Medición*. Debido a que la superficie aparece vinculada a un proceso de medición, este proceso puede realizarse mediante exahusción con unidades, por acotación entre un valor superior e inferior, por transformaciones, y por medio de relaciones geométricas generales.

Estas aproximaciones son consideradas por Freudenthal como didácticamente aceptables pero con diferente peso, lo cual nos indica la complejidad del concepto de área.

Los conceptos de área, conservación y medida de área en la enseñanza de las Matemáticas

En la enseñanza de las matemáticas el concepto de área es fundamental. Su estudio inicia en el nivel básico, vinculado a la medida de superficies planas y no planas. En los niveles medio y superior este concepto también se asocia al de integral. En la escuela básica, los niños son introducidos al concepto de medida de área usando cuadrícula y contando los cuadrados dentro de una figura geométrica. Cuando se introduce la fórmula del área del rectángulo por ejemplo, lo subdividen en un número entero de cuadrados unitarios (normalmente se empieza con el tratamiento de figuras que efectivamente lo permiten), y se indica a los estudiantes que la medida del área de dicha figura equivale al número de cuadritos en que se le ha subdividido al rectángulo, advirtiéndoles, siempre por iniciativa del profesor, que el número de filas y columnas son a la vez las medidas de las longitudes de los lados del rectángulo. Con este procedimiento, concluyen que el área de esta figura se obtiene entonces de multiplicar las medidas del largo y del ancho, para obtener así la medida del área que habrá de expresarse en unidades cuadradas. Pasan a la representación algebraica del resultado: $A = b \times h$ y a las conocidas expresiones "base por altura" o "largo por ancho". Por el contrario, para el cálculo del área del círculo se prescinde de este tipo de procedimientos, limitándose a utilizar la fórmula πr^2 o la introducción de estrategias como la de seccionar el círculo en sectores cada vez más pequeños. Esta forma de presentar la medida del área en la enseñanza básica y de introducir prematuramente las fórmulas carece de sentido para los niños si no se cuenta con la comprensión de las propiedades de la medida de áreas, ya que no existen espontáneamente como condiciones lógicas en su pensamiento. Por ejemplo, para un niño el área de una figura no es desde siempre equivalente a la suma de áreas de las partes que lo componen (Domínguez, p. 31, 1984).

Piaget afirma que la ausencia de actividades para manipulaciones de área, principalmente aquellas con las cuales se inician las acciones sensorio-motoras de los niños, el salto del concepto de conservación de área y el uso prematuro de fórmulas de áreas matemáticas en la escuela causa dificultades en la mayoría de los estudiantes en este tema. Además, los niños no tienen la oportunidad para crear sus herramientas subjetivas para medir, por ejemplo unidades o cuadrículas, debido a la introducción de una unidad propuesta por el profesor (Piaget et al, 1970).

Respecto del área, Piaget afirma (Piaget et al, 1970) que el concepto de conservación de área es un aspecto preliminar y fundamental en el entendimiento del concepto de medición de área entre los estudiantes, es decir, la conservación antecede a la medición.

En la enseñanza de las matemáticas del nivel medio y superior, el estudio del área también se vincula con el de integral definida. Este concepto suele introducirse mediante explicaciones relacionadas con la medición del área de regiones planas acotadas, mediante la expresión "área bajo la curva". Dicho procedimiento de medición consiste en dividir la región en regiones más pequeñas, cuyas áreas tengan fórmulas de cálculo conocidas. Se suele dividir al intervalo de integración en subintervalos de igual longitud, sobre los cuales se construyen rectángulos con los que busca cubrir la región ya sea por defecto o por exceso. El valor aproximado del área se obtiene a partir de la suma de las áreas de los rectángulos así construidos. El cálculo del área de estos rectángulos utiliza la fórmula de "base por altura", por lo que basta contar con los valores de las bases y de las alturas para conocer el valor de las áreas de los rectángulos. Si bien el procedimiento utilizado pudiera parecer simple, el recurso de subdividir la región en rectángulos es introducido artificialmente tanto en los textos escolares como en las explicaciones del profesor, además de que la particular forma de toma al límite plantea dificultades cognitivas. Esto suele hacerse con el propósito de justificar la presentación de la integral definida a través de la noción de área de donde se pasará al tratamiento algorítmico típico de la enseñanza de las integrales.

"Si bien, en geometría elemental se deducen fórmulas para las áreas de muchas figuras planas, un poco de reflexión hace ver que tampoco se da una definición aceptable de la noción de área. El área de una región se define a veces como el número de cuadrados de lado unidad que caben en la región. Pero esta definición es totalmente inadecuada para todas las regiones con excepción de las más simples. Por ejemplo, el círculo de radio 1 tiene por área el número irracional π, pero no está claro en absoluto cuál es el significado de «π cuadrados». Incluso si consideramos un círculo de radio $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ cuya área es 1, resulta difícil explicar de qué manera un cuadrado unidad puede llenar este círculo, ya que no parece posible dividir el cuadrado unidad en pedazos que puedan ser yuxtapuestos de manera que formen un círculo" (Spivak. pp. 345-346, 1999).

Una particularidad relativa a la medición del área, es que las unidades convencionales (metro cuadrado, centímetro cuadrado, etc.) a diferencia de otras unidades no existen como instrumentos de medición en las tiendas, así como podemos encontrar reglas, cintas graduadas, escuadras en unidades de longitud; pesas para la masa, entre otras. El cálculo del área se determina indirectamente, a partir de medidas de longitud y con instrumentos correspondientes a esta magnitud.

Estudios sobre la conservación y medición de área

Los estudios realizados por Piaget y colaboradores en los años 60's, han significado una contribución importante a la comprensión del desarrollo en el niño de conceptos relacionados con el área, pues ellos descubrieron qué clase de nociones destacan entre los niños de 8 a 11 años de edad cuando tratan con las nociones de conservación y medición de áreas. A partir de estudios como este en que se emplean materiales concretos, se afirma que el concepto de conservación de área es un aspecto preliminar y fundamental en el entendimiento del concepto de medición de área, es decir en términos llanos, señalan que la conservación antecede a la medición. Esta tesis se llevó adelante en Grecia con estudiantes de secundaria de 14 años de edad, Kordaki y Potari (2003) utilizaron un micromundo llamado C.AR.M.E. (Conservación de Área y su Medida) para que los estudiantes construyeran de forma dinámica sus propias aproximaciones a los conceptos de conservación y medida de área. Los antecedentes de este trabajo fueron las investigaciones realizadas por Piaget et al., (1970). Mediante el uso de este ambiente exploraron: las estrategias de los estudiantes en relación al concepto de conservación de área y su desarrollo mientras interactuaban con el micromundo; el pensamiento de los estudiantes sobre el concepto de conservación de área en triángulos equivalentes y paralelogramos de base común e igual altura, y; el papel de las herramientas ofrecidas por el micromundo en relación con las estrategias de los estudiantes. El estudio muestra que las herramientas proporcionadas por el ambiente experimental estimularon a los estudiantes a expresar sus propias aproximaciones al concepto de conservación de área.

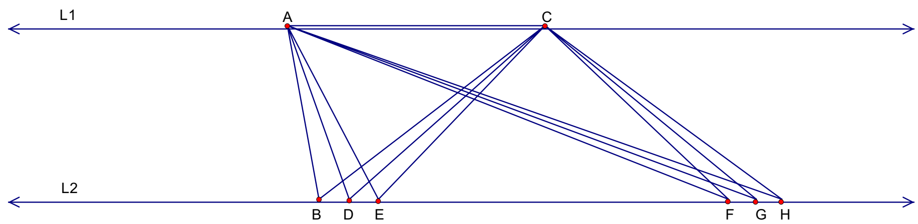
Marco Teórico

El marco teórico de referencia para el diseño de las actividades es la aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa. Aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar a los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemológica del conocimiento, su dimensión socio cultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza. Tradicionalmente las aproximaciones epistemológicas asumen que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando en sobremanera el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en toda actividad humana. La socioepistemología por su parte, plantea el examen del conocimiento socialmente situado, considerándolo a la luz de sus circunstancias y escenarios sociales (Cantoral y Farfán, 2003, 2004).

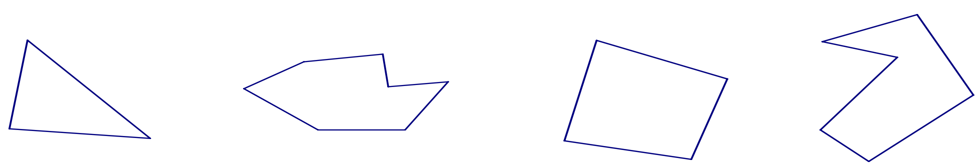
Actividades que comprendieron el curso

En el curso se trabajaron cuatro actividades. En la primera se pidió que determinaran la relación entre las áreas de triángulos con misma base y misma altura. En la segunda, que realizaran la transformación de polígonos convexos y no convexos, conservando sus áreas. En la tercera, que llevaran a cabo la transformación de gráficas de funciones lineales a no lineales conservando el área bajo la gráfica, y; en la última que interpretaran geométricamente los resultados de integrales. El propósito del trabajo con estas actividades fue que los profesores identificaran conceptos como medida, conservación de área en el estudio de relaciones, la realización de transformaciones geométricas y analíticas, y en la interpretación geométrica de resultados de una expresión analítica.

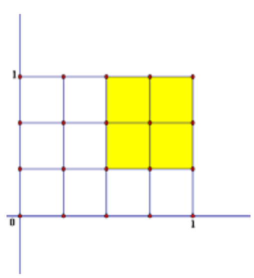
Actividad 1. Determina qué relación existe entre las áreas de los triángulos ABC, ACD, ACE, ACF, ACG y ACH. Ellos son construidos entre dos paralelas. Argumenta tu respuesta.

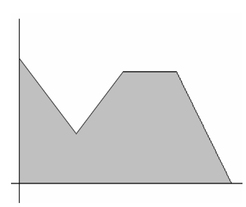


Actividad 2. Transforma cada uno de los siguientes polígonos en otro, con forma diferente, de modo que sus áreas sean iguales. Explica en cada caso, el método que utilizaste.



Actividad 3. Bosqueja la gráfica de una función no lineal cuya "área bajo la curva" sea igual al área de la región sombreada para cada una las siguientes figuras:





Actividad 4. Interpreta geométricamente los resultados de cada una las siguientes integrales

a). $\int_0^3 \frac{1}{2}\sqrt{x+1}\; dx$ *b*). $\int_1^2 n^2 dn$ *c*). $\int_1^4 \frac{1}{2}\sqrt{m}\; dm$

Referencias Bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics 53* (3), 255 - 270.

Del Olmo, M.A., Moreno, F.M. y Gil, F. (1993). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Síntesis.

Domínguez, R. (1984). *Conceptualizaciones y procedimientos de medición de áreas en la escuela primaria.* Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav, México.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht, Holland: Riedel.

Kordaki, M. y Potari, D. (1998). A learning environment for the conservation of area and its measurement: a computer microworld. *Computers and Education 31*(4) 405 - 422.

Kordaki, M. y Potari, D. (2002). The effect of area measurement tools on student strategies: The role of a computer microworld. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7*(1), 65 - 100.

Kordaki, M. y Potari, D. (2003). The effect of tools of a computer microworld on student's strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics 52*(2), 177 - 209.

Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1970). *The child's conception of geometry*. New York; USA: Basic Books.

Socioepistemología de la Predicción

Ricardo Cantoral, Juan Gabriel Molina y Mario Sánchez
Cinvestav IPN, Cicata IPN
México
rcantor@cinvestav.mx, jmolinaz@ipn.mx, mosanchez@ipn.mx
Sociopistemología – Nivel Superior

Resumen

Este escrito resume los planteamientos del Taller "Socioepistemología de la Predicción" donde nos ocupamos de presentar, a través de reflexiones teóricas y de una variedad de ejemplos didácticos, el papel que juega la predicción en la construcción de conocimiento matemático. Las actividades trataron con la noción de variación en el estudio de fenómenos de cambio continuo usando recursos tecnológicos diversos y experimentaciones típicamente escolares. Adicionalmente ubicamos estas experimentaciones como parte de la sociopistemología.

Presentación

El término *sociopistemología* plantea un corrimiento al problema del saber, lo contextualiza, lo sitúa. De ahí que podamos decir que la sociopistemología es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemológica del conocimiento, su dimensión socio cultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza. Tradicionalmente, las aproximaciones epistemológicas asumen que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando, sobremanera, el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en la actividad humana. La sociopistemología por su parte, plantea el examen del conocimiento social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión (Cantoral y Farfán, 2003)
Las actividades del Taller constaron de una serie de diseños secuenciados. La primera de estas actividades se describe enseguida:
Actividad 1
A continuación se presentan tres tablas numéricas.

a) Determina cuál de estas tablas corresponde a una ecuación lineal, cuál a una ecuación cuadrática y cuál a una ecuación cúbica.
b) Una vez que hayas determinado a qué tipo de ecuación corresponde cada una de las tablas numéricas, encuentra la expresión algebraica de cada una de estas ecuaciones.

x	y
-3	-78
-2	-57.75
-1	-40.5
0	-26.25
1	-15
2	-6.75
3	-1.5

x	y
-3	624
-2	404.25
-1	243
0	131.25
1	60
2	20.25
3	3

x	Y
-3	-29.25
-2	96
-1	221.25
0	346.5
1	471.75
2	597
3	722.25

Esta actividad, inspirada en el trabajo de Seymour y Shedd (1981) ha sido aplicada y discutida con varios profesores de matemáticas de diferentes niveles educativos dentro y fuera de México, lo que nos ha permitido generar un cúmulo de conocimientos empíricos acerca de las estrategias utilizadas por los profesores al intentar resolver la actividad: La gran mayoría de los profesores (digamos un 80%) utilizan como estrategia inicial la graficación para determinar una respuesta al cuestionamiento a); en el caso del cuestionamiento b) una proporción considerable de los profesores formula sistemas de ecuaciones lineales como medio para llegar a la respuesta.

Si analizamos el diseño de la actividad, podremos apreciar cómo ésta inhibe el desarrollo de las estrategias gráficas, por ejemplo, en las figuras 1 y 2 se muestran las gráficas correspondientes a las dos primeras tablas de la actividad; nótese como es difícil discernir cuál de las dos gráficas corresponde a un polinomio de tercer grado y cuál a uno de segundo grado; sin embargo es relativamente fácil identificar cuál de las gráficas corresponde a una ecuación lineal lo cual favorece que los profesores centren sus esfuerzos en la determinación de la ecuación lineal correspondiente a la gráfica. Así, la inclusión de la función lineal en la actividad es de central importancia, debido a que se presenta como una de las vías más accesibles para involucrarse en la resolución de la tarea matemática planteada.

La importancia de esta función dentro de la actividad no sólo reside en el hecho de representar una vía de acceso a la actividad matemática planteada, sino que además el trabajo con la ecuación lineal en el contexto de la actividad facilita que emerjan de forma natural estrategias y argumentos de tipo variacional los cuales constituyen el componente matemático fundamental dentro de nuestro diseño.

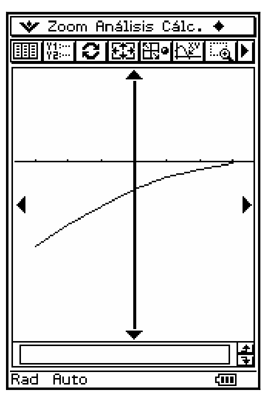


Figura 1.

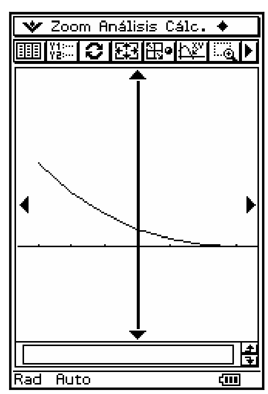


Figura 2.

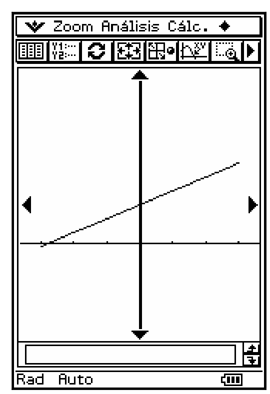


Figura 3.

Antes de intentar acotar el sentido del término 'variacional' debemos dejar clara la diferencia que percibimos entre cambio y variación: La noción de cambio denota la modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición de un cuerpo, de un sistema o de un objeto; mientras que la variación, la estamos entendiendo como una *cuantificación del cambio*, es decir, estudiar la variación de un sistema o cuerpo significa ejercer nuestro entendimiento para conocer cómo y cuánto cambia el sistema o cuerpo dado. Es en este sentido que nos referimos a los argumentos de tipo variacional. Decimos que una persona utiliza o comunica argumentos y estrategias de tipo variacional cuando hace uso de maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando.

En un sentido más amplio, la categoría del *pensamiento y lenguaje variacional*, constituye una línea de investigación insertada en la aproximación socioepistemológica, que estudia las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos (véase Cantoral y Farfán, 1998).

Regresando al punto de la función lineal como generadora de argumentos y estrategias de tipo variacional en la Actividad 1, podemos decir ahora que las ideas y técnicas de resolución que más comúnmente surgen al trabajar con la tabla de valores asociada, se relacionan de alguna manera con las ideas de pendiente y variación, ya sea mediante el cálculo de la magnitud $y_{i+1} - y_i$ para cualesquiera par de ordenadas consecutivas como medio de identificación de una variación constante, o por medio de la aplicación de la fórmula $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ para determinar la ecuación de la recta. En ambos casos la idea de variación está presente, pero…¿Por qué consideramos importante para el diseño que emerja la idea de variación entre las estrategias de los propios estudiantes? La idea de variación nos servirá, en un principio, para mostrar que el cálculo de las variaciones sucesivas en un contexto numérico permite identificar cuál es el grado del polinomio al que corresponde cada una de las tablas de la Actividad 1, por ejemplo, en el caso de la primera tabla, al calcular sus segundas diferencias (entendiendo como 'diferencia' la magnitud $y_{i+1} - y_i$ anteriormente mencionada) aparece un valor constante, lo cual nos indica que la tabla corresponde a un polinomio de segundo grado. (Figura 4)

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
-3	-78		
-2	-57.75	20.25	
-1	-40.5	17.25	-3
0	-26.25	14.25	-3
1	-15	11.25	-3
2	-6.75	8.25	-3
3	-1.5	5.25	-3

Figura 4.

En un segundo momento, la idea de variación manifestada mediante las diferencias sucesivas, nos servirá para crear un vínculo entre nuestra actividad inicial y el estudio del concepto de derivada. Esta relación puede percibirse desde la figura 4. Nótese como al aplicar la segunda diferencia a una representación numérica de un polinomio cuadrático nos da como resultado un valor constante; en el campo del cálculo diferencial, la segunda derivada de un polinomio de segundo grado es igual a una constante.

La ilustración de la figura 5 es una prueba de cómo la idea de la diferencia y variación ha sido utilizada desde tiempos antiguos para la determinación de lo que ahora conocemos como derivadas. Estas ideas, seguramente ausentes del Discurso Matemático Escolar por procesos de Transposición Didáctica, representan una vía de estudio del concepto de derivada que puede ayudarnos a reconocer e identificar códigos y patrones variacionales los cuales son necesarios para la construcción y formación del concepto mismo (Cantoral y Farfán, 1998).

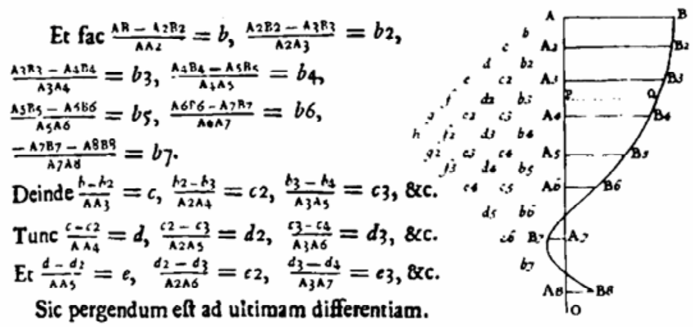


Figura 5. Escrito original de Isaac Newton 1676

La segunda actividad presentada en el taller retoma la idea de variación y diferencia que de alguna manera emergió en la Actividad 1 para calcular la aproximación a la derivada de una relación funcional tiempo – distancia asociada a un movimiento pendular generado por una botella balanceándose. Esta actividad consiste en registrar las mediciones de tiempo y distancia relacionadas con el movimiento de la botella utilizando un sensor de movimiento, un analizador de datos y una particular calculadora graficadora. Para ello recolectamos un total de 250 mediciones espaciadas en intervalos de 0.02 segundos. La representación gráfica de las mediciones tomadas se muestra en la figura 6, el eje de las abscisas representan al tiempo medido en segundos, mientras el de las ordenadas representa la distancia graduada en metros.

Además de utilizar la idea de diferencia para calcular una aproximación a la derivada de la forma $f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ con base en las mediciones realizadas con el sensor, esta idea fue empleada para buscar e identificar los patrones gráficos asociados a las derivadas de orden mayor o igual a 1. Para realizar esta búsqueda de los patrones gráficos se utilizó la función $f(x)=\text{sen}(x)$ debido a que es una función que posee la particularidad de que sus derivadas de orden superior se encuentran acotadas. En las figuras 7, 8, 9 y 10 se encuentran los comportamientos gráficos correspondientes a la parte de la gráfica de la función donde la primera, segunda, tercera y cuarta derivadas de la función $f(x)=\text{sen}(x)$ son positivas.

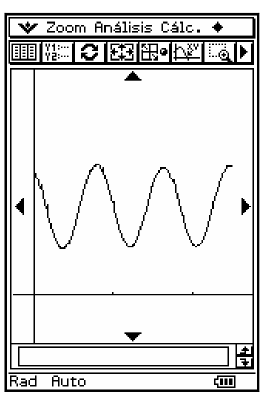


Figura 6.

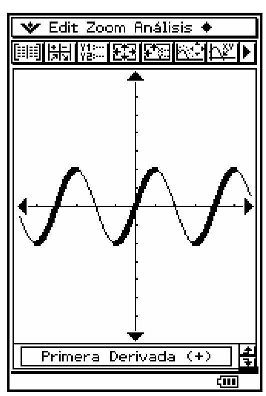


Figura 7.

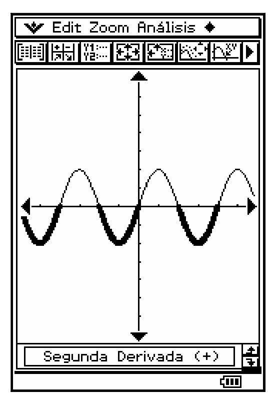


Figura 8.

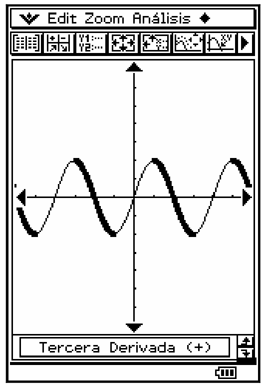


Figura 9.

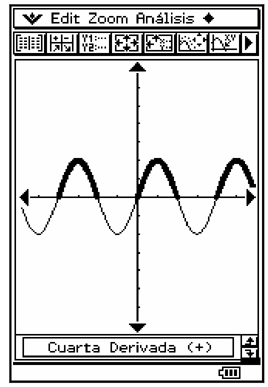


Figura 10.

Dos hechos interesantes alrededor de estos patrones gráficos es que se cumplen para funciones trigonométricas más complejas como $f(x)=\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ (por mencionar un ejemplo) y algunos polinomios; en este momento nos encontramos investigando las condiciones que permiten que estos patrones gráficos aparezcan en diferentes tipos de funciones continuas.

Consideraciones finales

La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa, centra su atención en el examen de las prácticas sociales que favorecen la construcción del conocimiento matemático, incluso antes que estudiar a los conocimientos mismos. En este sentido, hemos considerado a lo largo de diferentes investigaciones (Cantoral y Farfán, 1998) que una de tales prácticas es la *predicción*. La imposibilidad de controlar el tiempo a voluntad, obliga a los grupos sociales a predecir, a anticipar los eventos con cierta racionalidad. Este enfoque centrado en prácticas debe entenderse en el marco de las dimensiones sociales. Se aboca al estudio de la interacción y la convivencia en el ejercicio de las prácticas de referencia. Esta dimensión dota de autonomía al saber desligándolo de la escuela, del pensamiento y de su propia historia, para ubicarle al nivel de las instituciones en un sentido amplio. El saber se posiciona histórica, social y culturalmente en el campo de las instituciones.

En este sentido, en este Taller quisimos plantear, en el marco de prácticas predictivas preguntas matemáticas inusuales como las que han sido descritas anteriormente.

Es importante diferenciar entre los conceptos de adivinación y predicción. La adivinación es un pronóstico generado por señales o sucesos sin un fundamento científicamente aceptado, mientras que la predicción es una actividad racional que permite determinar el estado futuro de un sistema, de un objeto o de un fenómeno con base en el estudio sistemático de las causas que lo generan y los efectos que produce.

Consideramos importante la predicción porque ha mostrado ser una idea motriz en el desarrollo de conceptos matemáticos, especialmente en el área del cálculo, además de que la predicción está íntimamente relacionada con la variación porque para predecir un estado futuro correspondiente a un sistema es necesario cuantificar y analizar los cambios de sus causas y efectos y con base en esto generar modelos matemáticos que nos permitan anticipar consecuencias. Así, la variación se convierte en una herramienta de análisis necesaria para el ejercicio de la predicción.

Referencias Bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y Lenguaje Variacional en la Introducción al Análisis. *Epsilon 42*, 353 – 369.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Mathematics education: a vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics 53*(3), 255 – 270.

Cantoral, R. y Ferrari, M. (2004). Uno studo socioepistemologico della previsione. *La matematica e la sua didattica 2*, 33 – 70.

Sánchez, M. y Molina, J.G. (2004). *ClassPad 300: Representación y Manipulación de objetos Matemáticos*. México: Casio Computer Co. Ltd.

Seymour, D. y Shedd, M. (1981). *Diferencias finitas: una técnica para resolver problemas*. México: CECSA

Mecanismos para la Difusión del Discurso Matemático Escolar

Apolo Castañeda
Cicata-IPN[1]
México
acastane@ipn.mx
Pensamiento Matemático Avanzado- Nivel Superior

Resumen

La idea de *tránsito* se introduce en el estudio de las derivadas sucesivas como un argumento que permite establecer coordinación entre los distintos órdenes de derivadas. Logra crear puentes de comunicación entre la función y las derivadas a través de la información que se obtiene del análisis al comportamiento variacional de la curva en diversos puntos. Este acercamiento hace necesario un estudio de las curvas, en el que se logren desarrollar habilidades de análisis y predicción de formas, además con la posibilidad de coordinar esta información con los ámbitos numérico y gráfico

Antecedentes

La investigación socioepistemológica relativa a la caracterización de la evolución didáctica del punto de inflexión (Castañeda, 2004), dio cuenta también de los mecanismos institucionales para la difusión del conocimiento y de las prácticas asociadas estudio del punto de inflexión dentro del ámbito de las diferencias infinitesimales.

La difusión del cálculo (como fenómeno de divulgación del saber) con fines didácticos se originó a partir de la necesidad de compartir los nuevos saberes que Leibniz, y por otra parte Newton, formularon. Pero el desarrollo de este proceso tuvo intérpretes que aportaron una versión, si bien fiel a las ideas, ordenada y con una secuencia que atendía a la lógica evolutiva de las ideas, entre estos matemáticos identificamos la obra del Marqués de L'Hospital y de María de Agnesi.

Las obras de estos personajes se publicaron cuando aún el cálculo estaba en un proceso de construcción. El papel de las obras se reconoce en dos sentidos; al aportar una aproximación del nuevo cálculo intentando clarificar las ideas y como medio difusor de un nuevo saber a través de un discurso especialmente escrito para fines didácticos o de difusión. Este último rasgo los define como los primeros libros de texto de cálculo de la historia y se reconoce en ellos un primer esfuerzo por estructurar un *curso escolar del cálculo*. En este ejercicio de organización y de formulación de un nuevo discurso se ha identificado el papel argumentativo de la geometría así como un acercamiento al cálculo basado en explicaciones geométricas también con carácter infinitesimal, es decir, que rompían con la axiomática de la geometría euclidiana.

Por otro lado, esa investigación mostró la existencia de ciertas prácticas que caracterizan saberes, como el punto de inflexión, a través de situaciones en donde se *hace necesario* ese saber. Estas prácticas se identificaron integradas al discurso que proponen los libros antes citados, en ellas se observa que el acercamiento a la ideas matemáticas se da a través de modelos

[1] Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

geométricos en los que se representa la variación (como el caso de la variación máxima de la subtangente), así las *aproximaciones sucesivas sobre una curva* representa una *actividad* específica que permite caracterizar la inflexión en una curva.

Estrategias en la investigación epistemológica; revisión de libros de Texto [2]

En una obra se puede identificar una *intencionalidad* del autor de *difundir* sus ideas, es en esta circunstancia que un análisis socioepistemológicos no sólo deben atender el contenido matemático se que dice y se *transpone*[3], sino también analizar las formas y procedimientos por los que éste conocimiento se comparte; las formas en las que se explican las ideas, los ejemplos que propone, la organización de la información, en suma, caracterizar la estructuración del saber que se expone.

Este ejercicio de análisis del *discurso* (Van Dijk, 1998) permite el reconocimiento de varios niveles; los procedimientos de difusión, los procedimientos de comunicación, las características del receptor, la intencionalidad del emisor, incluso algunos que son implícitos como la ideología que se desea transmitir.

Nos apoyamos en las explicaciones de la teoría socioepistemológica, la cual aborda desde una perspectiva sociocultural el problema de estudio de las matemáticas y permite explicar la *naturaleza de un discurso* y mostrar evidencias de cómo se construye el conocimiento (en este caso; el matemático escolar ó de difusión) a partir de una intencionalidad didáctica (Castañeda, 2002; Castañeda, 2000), así como aquellos aspectos de socialización de las ideas, como parte de un proceso por el que se de la ampliación del cuerpo teórico de la matemática.

Entonces a través de un estudio al *discurso matemático escolar*, se puede identificar el tratamiento que ofrece el autor de libro de texto a las ideas, a fin de establecer su naturaleza epistemológica e identificar los procedimientos de comunicación de las ideas matemáticas.

Este estudio busca también determinar la perspectiva y las concepciones de la matemática que transmite a fin de identificar sus efectos en el aprendizaje. Cabe advertir que aún siendo libros «de cálculo diferencial», el tratamiento de las ideas puede tener un sentido distinto, entre otras cosas, por el enfoque que domina el libro o bien al énfasis en el uso de ciertos instrumentos o ciertas tecnologías.

Caracterización de las formas de *comunicación* de ideas matemáticas; Marco Teórico para el análisis de libros

a. Argumentaciones sobre lo geométrico con apoyo visual

---

[2] Distinguimos un «análisis **didáctico** a las obras de texto» de un «análisis **epistemológico** a las obras de texto», por las preguntas que guían cada estudio. Para el primer caso, nos planteamos en escenario escolar, el tratamiento de la matemática para un fin específico que es el aprendizaje, en este caso podemos observar en las obras de texto, estrategias de comunicación, ejemplos para introducir el tema, dibujos o metáforas para el tratamiento didáctico de la matemática. En el análisis epistemológico las preguntas se orientan a definir la naturaleza del conocimiento tomando como referencia su marco epistémico, lo que el autor está entendiendo por cierto concepto matemático, el uso que se le otorga al conocimiento mismo y los procedimientos de comunicación de las ideas matemáticas en relación a su propia concepción del contenido matemático.

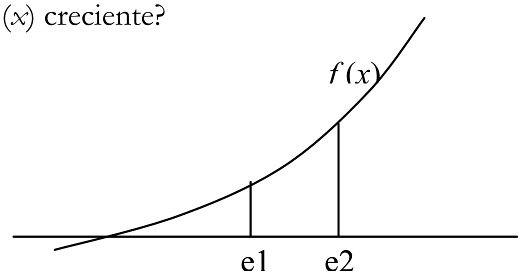
[3] En el sentido de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1991)

Tal y como lo demuestra el trabajo histórico – epistemológico de (Youschkevitech, 1976), la clasificación de las formas gráficas constituye un aspecto importante en el estudio de las funciones. Al respecto uno de los trabajos más trascendentes es el de Descartes, a quien además se le debe el relacionar a una curva algebraica plana con una ecuación. Descartes propuso una clasificación atendiendo a la naturaleza de las gráficas; mecánicas para aquellas cuya forma estaba asociada al movimiento de instrumentos o máquinas y geométricas para aquellas cuyo trazo correspondía a la habilidad humana.

El interés por organizar las curvas se formuló a partir de reconocer que en ellas existe un cúmulo de información el cual ofrece, no sólo un acercamiento a la naturaleza de los fenómenos sino además la posibilidad de determinar comportamientos, alcances, incluso formular predicciones y determinar patrones. Estas habilidades propias de un pensamiento funcional se convierten en herramientas fundamentales para entender los procesos de variación y cambio.

Por ejemplo, determinar si un fenómeno se comporta en forma creciente o decreciente, requiere por parte del lector ciertas habilidades de lectura y el uso de algunos criterios tales como la comparación, identificación de formas, estimaciones y cálculos, por citar algunas.

¿es $f(x)$ creciente?



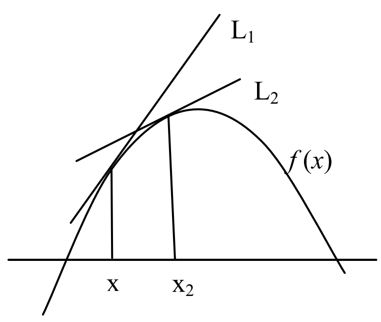
Estrategia

Criterio: comparación de estados
Argumento: Alturas de las ordenadas
Referente: geométrico - visual

El ejercicio visual conduce a distinguir dos puntos sobre el eje x, en cada punto una ordenada y finalmente comparar su magnitud. Al usar el criterio de comparación sobre las alturas de las ordenadas viene una conclusión del tipo; $e1 < e2$, con $|e2 - e1| < \varepsilon$, entonces $f(x)$ es creciente. Todas estas operaciones se integran a una habilidad que tras una breve incursión visual determina si $f(x)$ es creciente o decreciente.

b. Argumentaciones sobre lo geométrico – analítico

A medida que se profundiza en el estudio del cálculo, las construcciones geométricas que parecían más o menos simples, se vuelven complejas debido a que se agregan al escenario de estudio nuevos objetos (tales como la idea de tangente, grado, inclinación) los cuales se construyen a partir de objetos que pueden ser abstraídos de una simple incursión. Veamos por ejemplo una estrategia usada para responder a la siguiente pregunta; ¿ $f'(x)$ es creciente?



Estrategia

Criterio: comparación grados de inclinación
Argumento: Inclinación de las rectas tangentes
Referente: geométrico - analítico

En un primer momento se identifican y toman como referencia los puntos x_1 y x_2 sobre le eje *x,* se trazan las ordenadas correspondientes, se determina la recta tangente a cada punto sobre la curva. Entonces es posible determinar cómo es *f'* (*x*); L_1 tiene un ángulo mayor que L_2, por lo tanto $f'(x_1) > f'(x_2)$, concluyendo algo como: si $x_1 < x_2$, con | $x_2 - x_1 < \varepsilon$, entonces $f'(x)$ es decreciente.

Observemos que para responder al planteamiento inicial se exige una abstracción sobre los trazos geométricos, ya que éstos por si solos son ahora insuficientes para responder.

c. Argumentaciones sobre lo algebraico

El rasgo más representativo de este escenario es el uso de la manipulación simbólica para expresar situaciones matemáticas.

En relación a este escenario (Douady, 1995), advierte que el desarrollo algebraico sobre un concepto matemático obliga justamente, al olvido del contexto donde se generó. De tal forma que las expresiones algebraicas, tal y como las conocemos, se presentan como una síntesis refinada de las discusiones matemáticas.

Otro de los riesgos, que advierte Douady, es una tendencia natural dentro de los sistemas escolares a reducir el tratamiento algebraico de los conceptos matemáticos a una colección de reglas y procedimientos, provocado fundamentalmente por un manejo de los algoritmos encaminado únicamente a desarrollar y fortalecer habilidades operatorias.

El escenario algebraico describe relaciones numéricas con literales y constantes bajo principios o leyes matemáticas. Veamos por ejemplo en Cantoral, (1998);

> *… una forma de encontrar la derivada de una función de un punto, consiste en desarrollarse en serie de potencias entorno del punto en cuestión. Veamos mediante un ejemplo cómo es que operan estas ideas. Considere la función dada por la expresión f(x)=x³, de la cual quiere conocer la derivada en x., Si seguimos la estrategia de Cauchy tendremos:*

$$f'(x) = \lim_{n \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{n \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{n \to 0} \frac{x^3 - 3x^3 h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$
$$\lim_{n \to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

Si seguimos en cambio la estrategia de Lagrange, tendremos:

$f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2 h + 3xh^2 + h^3$, así que la derivada de *f* es el coeficiente de *h* es decir, $3x^2$

d. Argumentaciones sobre lo Analítico

El escenario analítico tiende a confundirse con el algebraico a consecuencia de una frontera que es muy poco perceptible. Sin pretender una definición; una aproximación analítica involucra funciones mentales avanzadas (como la variación, la predicción) para la determinación de leyes que rigen el comportamiento de un sistema.

Cantoral, (2001), describe algunos acercamientos analíticos en relación a la serie de Taylor, en ellos es posible observar diversos elementos matemáticos que conforman un sistema en el que la *variación* está en el centro del escenario.

> *El modelo de regularidad binomial, se caracteriza por percibir y utilizar una regularidad en los desarrollos binomiales. Centra su atención en los números y las magnitudes variables, aunque de éstas, no precisa su variación sino su semejanza operativa con los números… Entre los resultados característicos se cuentan, Triángulo de Pascal, Binomio de Newton, y fórmula de interpolación de Newton-Gregory. La serie aparece en todos ellos aún cuando no se le reconozca como patrón organizador.*
>
> *El modelo de variable-variación, consiste en reconocer y utilizar sistemáticamente, la idea de que la parte contiene la información del todo, es decir, en tanto que se estudia la variación de unas magnitudes variables respecto de otras ya sea físicas o geométricas, se reconoce que la variación instantánea o puntual proporciona la información integral del fenómeno.*

Otro ejemplo que clarifica una formulación analítica es expresada por el modelo de la *aproximación polinomial*.

> *…resulta muy cercano, a nuestra práctica sobre la Serie de Taylor y se caracteriza por reducir el cálculo de la función, al cálculo de polinomios. Para ello se construye una sucesión de éstos que converja a la función determinada y que hereden el comportamiento puntual de la función, para lo que también se estima el margen de error.*

Se puede observar que no basta reducir el problema a replantear el cálculo de una función al cálculo de polinomios, pues evidentemente no se trata de un ejercicio algorítmico. Existe, desde la perspectiva del autor, un sistema que proporciona un sentido general.

Observemos un caso de análisis al punto de inflexión. El libro es Cálculo de Stwart, edición 1998.

Referente: *Geométrico – Visual* Argumento: *Cambio de concavidad* Criterio: *Cambio de forma*	*Un punto P de una curva se llama punto de inflexión si en él la curva pasa de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa.*

Referente: *Geométrico – Analítico* Argumento: *Posición de la tangente sobre la curva* Criterio: *Lugar en donde la tangente cruza la curva*	*En diversos puntos* de una curva *en [a,b], se han trazado tangentes a esas curvas, la curva que queda arriba de las tangentes, se dice que es cóncava hacia arriba en [a,b], la curva que está debajo de las tangentes se dice que es cóncava hacia abajo en [a,b].*
Referente: *Analítico* Argumento: *Cambio de signo de la segunda derivada* Criterio: *Si cambia de positivo a negativo y viceversa*	*…de acuerdo con la prueba de la concavidad, hay un punto de inflexión en cualquier punto donde la segunda derivada* **cambie** *de signo.* *PRUEBA DE CONCAVIDAD; Si f tiene segunda derivada en un intervalo I* *a) si f '(x)>0 para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I* *b) Si f '(x)<0 para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I*

En este análisis se observa que se muestran múltiples caracterizaciones de los conceptos, sin embargo, no todos ellos son explícitos ni son de la atención del autor. Obsérvese por ejemplo que la definición «importante» del punto de inflexión recae en el método algorítmico. (tercer cuadro)

Evidentemente no somos de la idea de que un *buen discurso didáctico* sería aquel con el mayor número de caracterizaciones, se requiere de un discurso que atienda las diferencias, que cada contexto de representación expresa así como favorecer el tránsito esas caracterizaciones a través de situaciones, prácticas, usos que hagan visible al objeto estudiado.

Conclusiones

En el contexto del salón de clase, el libro de texto juega un papel importante para la comunicación de un discurso matemático, pues entre otras cosas, tiene la función de validar «lo que el profesor dice».

Sin embargo, nos enfrentamos a reconocer en él una *génesis ficticia* a consecuencia de que la matemática se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares, por lo que su introducción al sistema de enseñanza obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento (Cantoral, 2000), en este proceso las ideas matemáticas son presentadas en forma comprimida y refinada, privadas de sus significados primarios los cuales le son arrancados y aislados, de manera que aquellos contextos y situaciones que les dieron origen, sentido, motivo, son olvidadas.

La forma de legitimar su origen en el salón de clase es creando una *génesis ficticia*, que le proporcione una identidad para que sean estudiados. Al respecto, el programa socioepistemológico de investigación, considera importante problematizar el discurso matemático escolar y proponer, a través de la investigación, la incorporación de situaciones didácticamente robusta para favorecer aprendizajes.

El análisis de aquello que se erige como discurso escolar plasmado en los libros de texto, permiten entender los mecanismos de la adaptación del saber matemático a las prácticas escolares.

De este modo, la forma de enunciar una definición o un teorema depende del paradigma que se quiere reproducir, de la disciplina de aplicación del saber matemático, del uso de ciertos métodos de estudio de la matemática.

Referencias Bibliográficas

Agnesi, M. (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana* ... Tomo I, Publicac. Milano, Italia: nella Regia Ducal Corte,

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de analiticidad.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral R., *et al* (2000). *Desarrollo del pensamiento matemátic*o. México: Trillas.

Cantoral, R. (1998). La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: el caso del pensamiento y lenguaje variacional. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativ*a, *Relme-12, Santafé de Bogotá, Colombia.* (12, tomo I, pp. 41-48). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Castañeda, A. (2004). *Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica.* Tesis Doctoral. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México

Castañeda, A. (2002). Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 5(2), 27-44

Castañeda, A. (2000). *Estudio didáctico del punto de inflexión; una aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor SA.

Douady, (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En Gómez, P. (Ed.) *Ingeniería Didáctica en educación matemática.* (pp. 61-96). Una Empresa Docente. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

L'Hospital, A. (1696). *Analyse des infiniment Petits pour L'intelligence des lignes courbes* (primera reimpresión ,1988). Paris, France: ACL-Editions.

Stewart J. (1998). *Cálculo*. México: Thomson.

Van Dijk, Teun, (1998). *Ideología*. Expaña: Gedisa Editorial.

Youschkevitech, (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Arch. Hist. Exact. Sci.* 16, 37-85

La Socioepistemología en la Graficación del Discurso Matemático Escolar

Francisco Cordero
Cinvestav del IPN
México
fcordero@cinvestav.mx
Socioepistemología. – Nivel Superior

Resumen

Considerando varias investigaciones sobre la *graficación en el discurso matemático escolar* con la perspectiva socioepistemológica, se destaca cómo es que el estudio de usos y desarrollo de prácticas de la graficación responde a la demanda de hacer funcional al conocimiento matemático. En consecuencia orienta sobre nuevas concepciones de enseñanza y aprendizaje, necesariamente tensando aquellas perspectivas en enfocadas a las habilidades con aquellas, presumiblemente, enfocadas a las resignificaciones.

Introducción

Los sistemas educativos no han logrado hacer de la matemática un conocimiento funcional (en contra parte al conocimiento utilitario). Tal vez porque los modelos del conocimiento que ocupa la didáctica de la matemática están anclados al dominio matemático y en consecuencia a los conceptos del mismo. Sin embargo, el conocimiento, el pensamiento, la comprensión del mundo, a pesar de ser un aspecto necesario de la actividad humana, no logra por sí mismo modificar el objeto. Es algo así como concebir equivocadamente que tal aspecto sea la verdadera esencia de la vida humana. En ese sentido convenimos en dos aspectos: (a) que la matemática funcional es aquel conocimiento matemático que deberá integrarse a la vida para transformarla, reconstruyendo significados permanentemente (continuamente) en la vida. Esta funcionalidad no se podrá alcanzar en el sistema educativo sino se amplían los modelos de conocimiento que ocupa la didáctica de las matemáticas. Es necesario entender que la matemática se ha desarrollado porque ha estado al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, donde se ha resignificado a ésta. Para ello, debemos incorporar o crear modelos del conocimiento matemático que rindan cuenta de *lo que constituye su contenido* y poner al descubierto las causas reales del desarrollo social de tal conocimiento. Y (b) que el volumen y el carácter de los conocimientos adquiridos por el hombre viene determinado por el nivel de *desarrollo de las prácticas sociales*, es decir, por el grado de su dominio sobre el mundo exterior.

Con esas consideraciones, la problemática de enseñanza y aprendizaje de la matemática genera fenómenos didácticos en torno a la ausencia de marcos de referencia que ayuden a resignificar el conocimiento matemático. Por ello, *la práctica social es fundamental en la socioepistemología*, es un elemento teórico que orienta y norma las epistemologías en cuestión. Constituye el medio para estudiar el conocimiento matemático escolar. Este medio tiene como función señalar otras dimensiones que no son explícitas en la metáfora de la actividad matemática como son *las prácticas en lo social* y *las argumentaciones en lo situacional* (Buendía y Cordero, 2004). En este sentido daremos un ejemplo considerando varias investigaciones sobre la *graficación en el discurso matemático escolar* con la perspectiva socioepistemológica. Destacaremos cómo es que el estudio de usos y desarrollo de prácticas de la graficación nos acerca más a la matemática funcional, pero también nos orienta sobre nuevas concepciones de enseñanza y aprendizaje, necesariamente, tensando el problema de habilidades con el problema de resignificaciones.

El uso de las gráficas. Un ejemplo

Hemos encontrado evidencias sobre prácticas argumentativas gráficas en diversas situaciones, donde son resignificadas al debatir entre la *función* y *forma* de la graficación.

El "hallar la recta tangente", el "predecir la posición de un móvil" y el "dilatar una gráfica" son situaciones donde se resignifica el concepto de derivada, generando prácticas argumentativas gráficas diversas. Tales prácticas se desarrollan al debatir entre *la función* y *forma* de las gráficas. Por ejemplo, el límite de un cociente se resignifica a través de la *predicción*, la *graficación* y la *analiticidad*: la derivada y la recta tangente debaten contra la comparación de dos estados y la sucesión simultanea de las derivadas (Buendía y Cordero, 2004; 2004), pero también debaten contra la variación de parámetros y el comportamiento tendencial (Domínguez, 2003, Campos, 2003, Rosado, 2004). Sin embargo, semejante hecho no componen ningún eje didáctico, ni para las gestiones de situaciones de enseñanza y ni para el currículo escolar.

Por ello estamos proveyendo indicadores para el rediseño del discurso matemático escolar, por una parte, desarrollando situaciones didácticas donde la graficación juega el papel de argumentación matemática (Cordero, 2003; Rosado, 2004; Campos, 2003; Domínguez, 2003), y por otra parte, fundamentando epistemologías donde la graficación es apreciada como una práctica social que genera conocimiento del Cálculo (Cordero, 2003). Las investigaciones al respecto se han enfocado al estudio de uso de las gráficas en la obra matemática y en el discurso matemático escolar. El nivel de avance hasta el momento ha consistido en analizar ciertos aspectos de la obra de Oresme (1379) (Suárez, 2002) y de Euler (1748), y de los libros de matemáticas del Nivel Básico, Medio Superior y Superior (Flores y Cordero, 2004). A continuación señalamos una serie de resultados significativos al respecto.

a) Graficación-Modelación-Predicción. Se han logrado relacionar las prácticas de graficación, de modelación y de predicción, donde el comportamiento de las curvas o funciones anticipa tendencias de comportamiento tanto localmente como globalmente: la derivada es resignificada en la linealidad del polinomio (Rosado, 2004), la asintoticidad es resignificada a través de comparar las formas de comportamiento entre dos funciones ($\lim_{x\to\infty}(f-g)=0$) y comparar la "rapidez" de comportamiento entre dos funciones ($\lim_{x\to\infty}\frac{f}{g}=1$) (Domínguez, 2003), así como resignificar a las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes como un modelo de estabilidad (Solís, 2002), y el movimiento local es resignificado en el movimiento periódico (Buendía y Cordero, 2004).

b) Situación de la linealidad del polinomio. La situación destaca el uso de la graficación de los participantes, cuya epistemología modela la práctica de graficación y no el concepto de derivada (ver figura 1). La *función* de la gráfica en la situación consiste en generar el comportamiento tendencial determinado por la parte lineal del polinomio, lo que viene siendo la resignificación de la derivada. El procedimiento generado consiste en, primero, trazar la recta (parte lineal del polinomio) y después la curva buscando el comportamiento tendencial del polinomio con relación a la recta trazada. Tal procedimiento debate contra el trazo de la recta tangente, cuya *forma* consiste de una secuencia de conceptos: dibujar la gráfica de la función, señalar un punto sobre la gráfica y trazar la recta tangente en ese punto (Rosado, 2004 y Cordero, 2004).

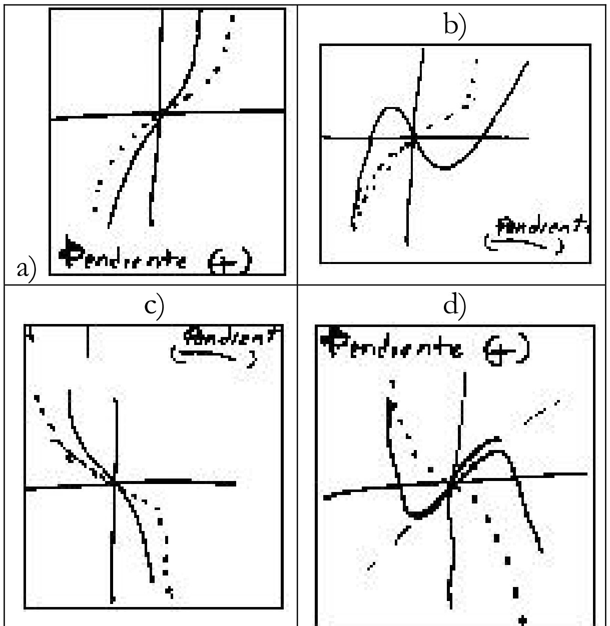


Figura 1.a. Las gráficas y las pendientes de la "parte lineal" del polinomio

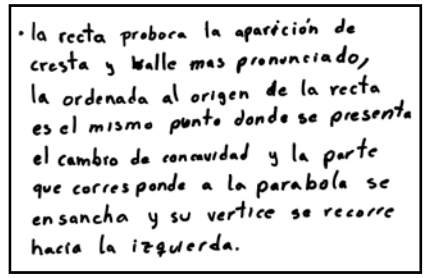


Figura 1.b. Descripción del comportamiento gráfico

Figura 1. Uso de la graficación en la linealidad del polinomio

c) El uso de las gráficas en Oresme. En Oresme, (*Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum: 1379*) encontramos la *función* y la *forma* de la gráfica diferente a la de las gráficas cartesianas (Suárez, 2002). Oresme se propuso representar a través de figuras geométricas (rectángulos y triángulos) el modo en que las cosas varían. Partió de la idea que *el instante de una cantidad continua es representado por un segmento rectilíneo y que la medida de los instantes es representada por la medida de esos rectilíneos de instante.* Además, considera que *toda cosa medible, excepto los números, se puede imaginar como una forma de cantidad continua.* La *función* y *forma* de las figuras (gráficas) no consistía en describir la posición de los puntos respecto de coordenadas rectilíneas, sino que las figuras mismas eran la cualidad de la cantidad continua, en ese sentido las figuras geométricas adquirían un significado global. Las propiedades de la figura podían representar propiedades intrínsecas a la misma cualidad. Tal vez por ello, Oresme resignifica las figuras geométricas para establecer diferentes tipos de variación (figura 2): usa un rectángulo para representar una variación uniformemente uniforme (ver figura 2.a); un triángulo o trapecio para representar una variación uniformemente deforme (ver figura 2.b); y una figura irregular para representar una variación deformante deforma (ver figura 3.c.

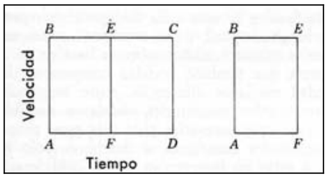
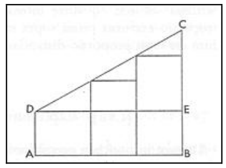
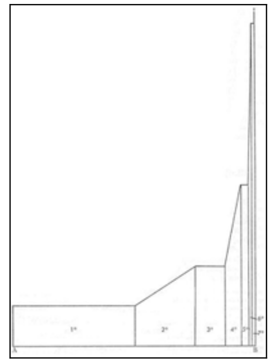
 Figura 2.a. Variación uniformemente uniforme	 Figura 2.b. Variación uniformemente deforme	 Figura 2.c. Variación deformante deforma

Figura 2. Figuras geométricas con cualidad de la cantidad continua

c) El uso de las gráficas en Euler. Euler, en su "Introducción al Análisis del Infinito" (1748), nos ofrece un uso de las gráficas para determinar que las propiedades analíticas de las funciones son intrínsecas a las *curvas*: la función de la gráfica consiste en caracterizar el comportamiento de la curva a través de las formas de las ramas que la componen. Por ejemplo, cuando determina la propiedad asintótica de las funciones, caracteriza a la asíntota con relación a las curvas (Domínguez, 2003). Para ello acude a funciones tales como $z=\frac{C}{t^k}$, para caracterizar el comportamiento de la curva a través de las formas de sus ramas (ver figura 3).

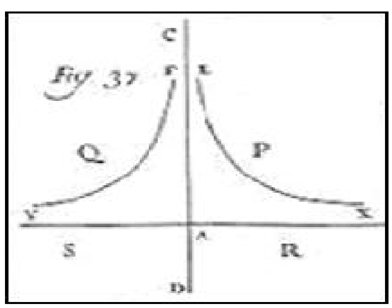


Figura 3. Gráfica de la función $z=\frac{C}{t^2}$

Sí $z=\frac{C}{t^2}$, la curva tiene dos ramas, *EX* y *FY* como en la figura 3, las cuales en los cuadrantes *P* y *Q* convergen a la línea recta *XY*. Lo mismo pasa si *k* es cualquier número impar, pero la convergencia de las ramas es tan rápida como tan grande es *k*. Euler define, por una parte, que cuando las curvas se aproximan a la línea recta del tipo *XY*, las cuales estarán cada vez más cerca de la línea recta, encontrándose sólo en el infinito, se les llaman curvas asintóticas. Y, por otra parte, define que cuando las dos ramas de la curva van al infinito y que cada una se aproxima a la misma recta, a ésta se le llama asíntota. Además, *k* no sólo da el número de ramas que convergen a la línea recta, sino también el patrón de comportamiento. Euler usa las gráficas como curvas compuestas de ramas con comportamiento y forma. En ese sentido la asintoticidad es un comportamiento al infinito *intrínseco* de las ramas de ciertas curvas. Esto alude a que el comportamiento tiene *forma* y en consecuencia pudiera ayudar a resignificar a la línea recta asíntota como asíntotas curvilíneas. Este aspecto es importante porque el estatus epistemológico de lo asintótico en el discurso matemático escolar advierte del privilegio de la asíntota de una función como una recta (Domínguez, 2003). Cabe señalar que los segmentos como los de la figura 3, *XY* y *CD* no son lo ejes cartesianos para ubicar en el plano a la gráfica de la función $z = \frac{C}{t^2}$, son los marcos de referencia para resignificar el comportamiento de las curvas.

d) Uso de las gráficas en los libros de texto. Las gráficas en los libros de texto pasan por diferentes *funcionamientos* y *formas* desde el uso de la hoja de papel en los niveles educativos básicos para establecer orientaciones y simetrías, el uso de las cuadrículas para establecer trayectorias y reproducirlas (Libros de texto gratuito: SEP 2003-2004; Flores, 2004), el uso del plano y de los ejes cartesianos, los privilegios del primer cuadrante, los sistemas autónomos del tiempo, las diferencias de usos entre las curvas y las gráficas de las funciones (Campos, 2003). Las gráficas cartesianas aparecen explícitamente, pero moderadamente, por primera vez en quinto y sexta año de Primaria. En Secundaria se perciben diferentes *funcionamientos* y *formas* de las gráficas. Por ejemplo, considerando la definición geométrica de la recta euclidiana es representada en el plano con ejes cartesianos para favorecer ciertos procedimientos para calcular las pendientes de las mismas rectas, pero también tales gráficas (rectas) son resignificadas para que a partir de cierta relación de datos numéricos se analice su distribución creando procedimientos para determinar si tal distribución es lineal (Flores y Cordero, 2004).

Los usos de las gráficas anteriormente vertidos significan que la graficación pueda llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un patrón o generalización deseable, es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación. La graficación en sí misma es un tipo de modelación que trasciende y se resignifica transformando al objeto en cuestión (Cordero, 2004). La argumentación gráfica en las diversas situaciones de uso permite el continuo, en un sentido epistemológico. Para que no se destruya se requiere alcanzar un estatus cultural de la argumentación gráfica. De aquí la conveniencia de pensar a la graficación como una práctica social y esto es lo que tendremos que saber desarrollar en el sistema educativo. Para ello, hemos logrado ubicar a la argumentación gráfica en una situación de transformación donde los comportamientos de las figuras geométricas, curvas, gráficas y funciones son resignificados generando procedimientos de variación de parámetros y construyendo procesos y objetos de instrucciones que organizan comportamientos (Cordero, 2004; Domínguez, 2003; Campos, 2003; Rosado, 2004; Buendía y Cordero, 2004; y Suárez, 2002).

Conclusiones

El estudio de usos y desarrollo de prácticas de la graficación nos acerca más a la matemática funcional, puesto que nos ofrece indicadores para que el conocimiento se integre y se resignifique permanentemente a la vida para transformarla. Pero para lograr que impacte en el sistema educativo se requiere modificar el modelo de conocimiento que por una parte ha estado enfocado a los conceptos y por otro lado, anclado al dominio matemático. Todo ello, ha soslayado a las prácticas que han generado los conceptos y deja de lado otros dominios de conocimiento que necesariamente intervienen para ampliar los sentidos del conocimiento matemático. El modelo del conocimiento enfocado a las prácticas sociales obligadamente tensará las actuales concepciones de enseñanza y aprendizaje, englobadas en el modelo de los conceptos como un *problema de habilidades para alcanzar los conceptos*, para abrir nuevas concepciones de enseñanza y aprendizaje, donde se construyan los medios adecuados para que se desarrollen las prácticas sociales que generan el conocimiento matemático, y que seguramente surgirán problemáticas en torno a las *resignificación del conocimiento matemático.*

Referencias Bibliográficas

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics 58*(3).

Campos, C. (2003) *La argumentación gráfica en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav, México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics education: a vision of its evolution, *Educational Studies in Mathematics 53*(3), 255-270.

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del cálculo integral. La noción de acumulación como una argumentación*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (en prensa). La modellazione e la rappresentazione grafica nella matematica scolastica. *La Matemática e la sua Didattica.*

Domínguez, I. (2003). *La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav, México.

Euler, L. (1990). *Introduction to Analysis of the Infinite* (Libro II). Springer-Verlag (Trabajo original publicado en 1748)

Flores, R. y Cordero, F. (2004). Uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. *Resúmenes de la Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, México, 249.

Oresme, N. (1988). *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum.* (P. Souffrin y J.P. Weiss. Trads.). París, Francia: Belles Lettres. (Trabajo original publicado en 1379)

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav, México.

Solís, M. (2002). Las nociones de predicción y simulación en ecuaciones diferenciales a través del comportamiento tendencial de las funciones. En F. Cordero (Ed.) *Serie: Antologías Número 2*. (pp.113-136). México.

Suárez, L. (2002). *Actividades de simulación y modelación en el salón de clases para la construcción de significados del Cálculo*. Manuscrito en preparación.

La Significación Física de la Integral a Partir de la Modelación de Fenómenos

Gildardo Cortés
Instituto Tecnológico de Acapulco, Conalep, Plantel Acapulco II, Guerrero
México
gildardo_59@hotmail.com
Socioepistemología – Nivel Medio

Resumen

Una pregunta que me plantean con mucha frecuencia los estudiantes es ¿qué significado tiene la integral?; con este trabajo pretendemos incursionar en la problemática referida a la formación de la significación física de la integral, para lograrlo partimos de la idea de que esa significación tiene que ver por un lado con las concepciones matemáticas "heredadas" por los profesores a sus alumnos y por otro con los procesos de matematización de fenómenos en diversos contextos. Hemos realizado un primer acercamiento exploratorio para recoger evidencias, que nos permita elaborar una secuencia basada en prácticas de modelación de fenómenos. Reportamos como es construida la significación física de la integral en el discurso. Un resultado consecuente, es una aproximación a la concepción de práctica social.

Desarrollo del tema

El tratamiento de fenómenos en la ciencia observable, requiere de cierto dominio de la matemática, vista como herramienta para modelarlos. En el contexto educacional de la matemática, resulta casi imposible encontrar un significado único de los modelos matemáticos, un solo modelo sirve para referirse a varios fenómenos y son diferentes los usos para predecir su devenir. Planteamos que es en las actividades, en particular las de modelación, en donde las herramientas utilizadas otorgan significado físico a los conceptos matemáticos. Por eso nos hemos interesado en investigar la problemática relativa a la "significación física de la integral", vista como un problema en el seno de la enseñanza de la matemática, tanto en ingeniería como en otras disciplinas.

Esta investigación se inscribe en la línea de investigación, que discurre sobre la relación de las prácticas sociales y la construcción social del conocimiento y, la perspectiva teórica que asume es la socioepistemología. Cordero, (1998) menciona que hay epistemologías, que enfocan categorías que llevan a pensar a la matemática como una herramienta para modelar, en tanto, que no se asignan objetos matemáticos a una realidad separada, sino más bien se reconoce, que hacer distinciones y formar construcciones, es una parte esencial de la modelación. De ahí que en nuestro enfoque, es fundamental el papel de las herramientas utilizadas en el ejercicio de las prácticas sociales, en nuestro caso, las prácticas de modelación y éstas a su vez otorgan significado a los conceptos matemáticos. Así, consideramos que la significación física de la integral está ligada a las actividades de modelación. Para obtener evidencias de nuestras afirmaciones recurrimos a un primer acercamiento exploratorio que nos permita elaborar diseños de secuencias cimentados en las prácticas sociales de modelación de fenómenos. El diseño a utilizar está basado en la ingeniería didáctica como metodología y en el diagrama diseñado por Arrieta (2003) y Cortés (2003) donde se establece una relación de las prácticas de modelación con las herramientas empleadas. La hipótesis predictiva del diseño de la secuencia consiste en que los alumnos construyen diversos significados de la integral, al participar en un

diseño de modelación de fenómenos. Las actividades hacen énfasis en la interacción, se plantea como actividades de modelación la confrontación y argumentación en la interpretación y transformación de un fenómeno. Para lograr nuestro objetivo fundamental, hemos elegido dos fenómenos físicos, el primero se refiere a la circulación de un fluido, y el segundo a la caída libre de un objeto, los cuales pueden ser modelados utilizando como una de las herramientas a la integral, de donde los actores construyen significaciones físicas de la integral.
La secuencia diseñada para la construcción de la significación física de la integral, contempla una fase exploratoria, la segunda fase es la puesta en escena de la secuencia y la tercera fase es un análisis a posteriori. Se han puesto en escena las secuencias tanto en el Conalep Acapulco II, como en el Instituto Tecnológico de Acapulco,
Presentamos, como un resultado consecuente de la fase exploratoria, un primer acercamiento a la concepción de las prácticas sociales, derivada de su estructuración, esto es, debemos entender como práctica social al conjunto constituido por las acciones, en contextos escolares y no escolares, donde se utilizan, diseñan y elaboran herramientas, que a su vez, sirven de base a la formulación y construcción de nociones matemáticas. Es en el ejercicio de prácticas sociales, en los diversos contextos, donde toma el carácter de funcionalidad la matemática. Las prácticas sociales son ejercidas con una intencionalidad implícita, para la transformación del entorno social.
En la resignificación de las nociones matemática, caracterizamos, en un primer intento, a las prácticas sociales a través de cinco elementos:

1. *Actores sociales en interacción. Reconociendo el carácter discursivo en la construcción social del conocimiento*
2. *Una situación social (diversos fenómenos observables)*
3. *Una noción matemática y sus diversas versiones (tabla, gráfica, ecuación, lenguaje natural, etc.)*
4. *Un contexto social (diversas comunidades de profesionistas y oficios)*
5. *Una intencionalidad implícita en un contexto histórico social (la intervención de los actores en su entorno).*

Arrieta (2003) afirma "...*Pero esta forma de entender el aprendizaje nos lleva a replantear nuestra noción de conocimiento: los conocimientos matemáticos son vistos como construcciones sociales surgidas de prácticas ejercidas por grupos sociales en contextos sociales específicos y reproducidos por comunidades...En este sentido para nosotros contexto social es una totalidad que da significado a las partes. Entonces estudiamos fenómenos de la construcción de conocimiento en contextos sociales donde las construcciones histórico - culturalmente constituidas, reconstruidas, adquieren particular significado...*"

Como el propósito de la matematización de un fenómeno natural o social, es la construcción de un modelo, se hace imprescindible considerar como parte central en esta investigación, la epistemología de la integral; es decir; ahondar sobre la historicidad de los modos en que los individuos hacen constructos, sobre los conceptos matemáticos aplicados, a situaciones en escenarios naturales, en ese sentido los constructos realizados en el aula por los estudiantes tiene que ver con los modos heredados de sus profesores en cursos anteriores de cálculo integral, por ejemplo, cómo hemos recibido de sus creadores los diversos métodos de cálculo, para el área de una figura "curva cerrada" o el volumen de un "cuerpo redondo". En ese sentido coincidimos con Douady (1995) "...*Las nociones, al igual que los teoremas, se pueden trabajar y modificar según las situaciones donde se necesitan. De allí se pueden desembocar en nuevas nociones, que a su vez se convierten en materia de trabajo, interpretación, modificación, generalización,... El hecho de relacionarlas es a su vez una fuente de significado para quienes las realizan...*". De ahí, que los modos de transmisión de una noción matemática y la forma de cómo se aplica en la ciencia observable, dan origen a los significados físicos de estas nociones, de igual forma sucede con la noción de integral y su significación física. De esto, las prácticas sociales de modelación, que pretendemos ejercer se apoyan en el uso de diversas nociones matemáticas, y estas, a su vez, producen diferentes modelos o versiones (numéricos, gráficos, algebraicos, etc.) para construir la significación física de la integral, haciendo predicciones sobre el comportamiento de los fenómenos abordados, para determinar su significación física. Así mismo la actuación del profesor como investigador, debe orientarse hacia el cuestionamiento de si los modelos o versiones existentes, resultan útiles para la descripción de los fenómenos, o modificar tales modelos, para crear versiones distintas, que describan lo más cercano posible a los fenómenos. Por eso en el diseño de la secuencia, hemos considerado las situaciones didácticas, que consiste en pedir al profesor, que provoque en los alumnos una serie de adaptaciones, mediante una elección prudente del problema a resolver, que en nuestro caso es la construcción de la significación física de la integral. En este proceso no se descarta la posibilidad de encontrar una serie de obstáculos, en virtud de que la modelación de un fenómeno natural o social, es bastante compleja, según Brousseau, (2001) [*...la construcción de los axiomas, apuntan hacia un aprendizaje férico, en donde la cantidad de conocimientos debidamente bien estructurados, y que son utilizados y transferibles, son utilizados únicamente en la medida en que están relacionados a otros conocimientos, así esta relación establece sus significados, su etiqueta y modos de aplicación…*]. En nuestro caso, la experiencia nos dice, que una noción matemática cuando fue bien forjada, según lo planeado por el profesor, es cuando tiene un valor significativo en su aplicación, entonces para el estudiante, ese conocimiento matemático perdura, sobre todo, en las situaciones sociales, en que tiene que hacer uso de tal conocimiento matemático. Consideremos el caso de aquellos estudiantes, que no pudieron continuar sus estudios en niveles superiores, se incorporan para laborar en diversas comunidades de profesionales, por ejemplo en la construcción, como auxiliares, ayudantes o asistentes, etc., algunos de ellos hacen uso del "Teorema de Pitágoras" para realizar actividades de supervisión en la construcción de muros, que estén perfectamente a "escuadra", es decir, que los muros formen ángulos de 90°, observamos, que dicho teorema es significativo por su aplicación; en otros casos como son las comunidades de albañiles, encontramos personas, que nunca asistieron a la escuela, de igual manera hacen uso del "Teorema de Pitágoras". Los reportes de Arango, (2003) arrojan evidencias al respecto, aquí lo verdaderamente importante en este último caso, es la forma en que fue adquirido el conocimiento matemático, ya que no lo aprendieron en la escuela, sino que les fue heredado de una generación de albañiles a otra generación, o bien de las comunidades de arquitectos con los que están relacionados interactivamente en el contexto de la construcción, de esto podemos decir, que una noción matemática tiene éxito, si tiene consistencia y perdura lo suficiente, de ahí toman un gran valor significativo las nociones matemáticas, a través del tiempo y espacio.

Las preguntas planteadas en la fase exploratoria de la secuencia fueron:

1. ¿En qué consiste la integral?
2. ¿Qué características tiene la integral?
3. ¿Cuál es primero, la definida o la indefinida?
4. ¿Cuántos significados conoces para la integral?
5. ¿Cuál es el significado físico de la integral?
6. ¿Existen otros significados?; si tu respuesta es "si" o "no", explica detalladamente tu argumento.

En el presente reporte, solo presentamos el análisis exploratorio de la pregunta cinco, que consideramos la pregunta central del cuestionario previo a la puesta en escena del diseño de la secuencia, para indagar sobre la concepción del significado físico de la integral heredada de cuatro profesores a uno de sus estudiantes del Conalep Acapulco II, las respuestas son mostradas en el cuadro comparativo 5.

Cuadro comparativo 5

¿Cuál es el significado físico de la integral?		
No	*Respuesta del profesor*	*Respuesta del alumno*
1	*La aplicación y explicación de los fenómenos naturales existentes en el universo.*	*Encontrar con que velocidad cae un objeto al ser lanzado al aire y a que tiempo*
2	*El área*	*Es una herramienta para facilitar los cálculos matemáticos*
3	*I) Se comporta como la ecuación de la velocidad con respecto a la rapidez.* *II) Se comporta como la ecuación de la distancia con respecto a la velocidad, etc.* *III) Se comporta como el trabajo de la fuerza en función de x y la diferencia de x, etc.* *En general se comporta como un fenómeno físico primitivo a la derivada, o sea, en función del tiempo o la variable x independiente.*	*Es despejar a la derivada para llegar a la integral*
4	*El área y volúmenes, cantidad de un material a utilizar.*	*Es un método para la resolución de problemas reales en diferentes ciencias.*

Conclusión

Un análisis de los argumentos que ofrecen los profesores para cada pregunta, nos dice que los diversos modos en que han de ser heredadas las nociones matemáticas a los estudiantes están por un lado en relación con las propias percepciones de los profesores sobre los conceptos, ofrecidas a sus estudiantes y por otro, con las lecturas de los diversos libros de cálculo, que los estudiantes por su cuenta realizan, por último entre otros múltiples factores un tercer elemento que deja una marcada influencia en el sentir de los estudiantes son las consultas a profesores inmersos en la investigación científica y de aquellos estudiantes de niveles avanzados, como es el caso de algunos estudiantes en el Instituto Tecnológico de Acapulco, que realizan esta práctica cuando sus inquietudes, producto de las dudas de un curso o una clase ordinaria no han sido satisfechas del todo. Al comparar los conceptos tanto del alumno como de su profesor referente a la cuestión número cinco encontramos lo siguiente:

1. *El profesor número uno considera que el significado físico de la integral consiste en la aplicación y explicación de los fenómenos, en tanto que su alumno ha heredado la parte referente a la aplicación, él considera que el significado físico consiste en encontrar la velocidad de un objeto que cae, en este caso hay una cierta compatibilidad en los significados físicos asignados a la integral, es posible pensar , que ambos le asignan en cierto modo como significado físico a la integral, el desplazamiento de un cuerpo a lo largo de una curva.*
2. *El profesor número dos tiene por significado físico de la integral el área, su alumno la considera una*

herramienta en los cálculos matemáticos. En este caso parece ser que el profesor le asigna como significado físico, el significado geométrico de la derivada, tal vez lo hace pensando en que la integral en algunos casos se presenta al estudiante como la operación inversa de la derivada, en ese sentido probablemente podemos pensar en el movimiento como alternativa para la significación física.

3. *El profesor número tres le asigna comportamientos semejantes a la ecuación de la velocidad, respecto a la rapidez, a la ecuación de la distancia respecto a la velocidad, o bien al trabajo de la fuerza en función de una variable x y la diferencia de esa variable x, en tanto que su alumno el significado físico que le asigna es confuso, el considera que consiste en despejar a la derivada para llegar a la integral. En este caso se evidencía el hecho de ver a la integral como operación inversa de la derivada por parte del alumno, en tanto que el profesor le asigna significados muy semejantes al significado físico de la derivada.*
4. *Por último el profesor número cuatro le asigna el significado de área y volúmenes, y de manera implícita la considera como una herramienta para calcular la cantidad de un material a utilizar, en cuanto a su alumno, le asigna el significado de método para resolver problemas reales en las diversas ciencias. En este caso se manifiesta la forma en que heredó el significado físico al estudiante, hay una cierta compatibilidad, esto es, el profesor la concibe como herramienta para calcular cantidad de materiales, su estudiante la considera un método para resolver problemas reales en los diversos contextos de la ciencia.*

En el resto de las preguntas, las respuestas son muy semejantes, tanto en el Conalep como en el Instituto Tecnológico de Acapulco, persiste una cierta compatibilidad tanto en el profesor como en sus alumnos. Desde la perspectiva socioepistemológica, creemos que solo en la acción construimos los significados de los conceptos matemáticos, y por supuesto la significación física de la integral, es decir, solo en la acción humana podemos comprender los procesos matemáticos de modelación de un fenómeno, esto es, la estructura que presenta un concepto matemático no es clara cuando se le muestra a los estudiantes, por eso es común, que los profesores pidan a sus estudiantes, que resuelvan una serie de ejercicios específicos de un tipo particular de integración, puesto que con la repetición de un algoritmo el estudiante logra apropiarse del proceso y mediante un análisis del mismo llega a inferir los mecanismos comunes de las estructuras, que presentan los conceptos matemáticos, particularmente el de la integral. En ese sentido es razonable cuestionarnos sobre el nivel de adecuación del modelo conceptual que ofrece la matemática en relación a la estructura de los fenómenos naturales y sociales en los diversos escenarios para fines de interpretaciones físicas, esto significa, que la matemática actual funciona siguiendo ciertas reglas convencionales preestablecidas e inflexibles; sin embargo, no siempre es posible modelar con precisión a la naturaleza usando leyes de la matemática, dado que ésta es cambiante, particularmente los fenómenos sociales. Esta situación aumenta sorprendentemente en la medida en que nos involucramos en problemas de mayor complejidad. Cada problema específico exige una conceptualización desde la perspectiva de proceso en un tiempo y espacio, luego esto produce una nueva visión, que germina solo en la acción de las prácticas sociales, en los contextos en donde fueron concebidas. Por eso a los estudiantes se les debe instruir sobre la construcción de conocimiento matemático, con el solo propósito de intervenir en la modificación de su entorno, luego la importancia de los aspectos socioculturales en las prácticas sociales radica en el sentir de los estudiantes, en el deseo de comprender cómo se ubica la acción mental de ellos en los diferentes escenarios desde la perspectiva cultural e histórica, para desarrollar los significados de los conceptos matemáticos, particularmente la significación física de la integral.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de una matematización en el aula.* Tesis doctoral no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.

Brousseau, G. (2001). *Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas* (L. Puig trad.) Université de Bordeaux, Francia.

Cordero, F. (1998). Cognición y enseñanza. La distinción y formación de construcciones en la didáctica de la matemática. *Antologías.* (Vol. 3). México.

Cortés, G. (2003). *Relaciones cuadráticas entre variables desde la perspectiva de matemáticas a partir de observaciones.* Tesis de maestría no publicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guadalajara, México.

Douady, R. (1995). La ingeniera didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (ed). *Ingeniería didáctica en educación matemática*, (pp. 61-96). México.

Arango, J. (2003). Las herramientas matemáticas en el ejercicio de las prácticas sociales en comunidades de albañiles. *VII Escuela de Invierno y VII Seminario Nacional en Didáctica de las Matemáticas.* Guerrero, México.

El Concepto de Función: Un Breve Recorrido Epistemológico

Rosa María Farfán y Mario A. García
Cinvestav-IPN
México
rfarfan@mail.cinvestav.mx, mgarciag@mail.cinvestav.mx
Epistemología – Nivel Superior

Resumen

Puede decirse que uno de los componentes fundamentales en la matemática escolar o especializada de nuestros tiempos es aquel concerniente al concepto de función. Su fragua ha sido el tiempo, y los fraguadores, los actores temporales que lo han moldeado, desde ideas primitivas de relación, pasando por prácticas de modelización de fenómenos naturales, hasta llegar a formar un objeto matemático imprescindible, de belleza única, de mucha sustancia concentrada en definiciones estáticas, que ocultan en sí mismas un impetuoso dinamismo.

Introducción:

Uno de los conceptos más importantes en matemáticas de cualquier nivel, es el de función ya que éste*, "tal y como se define actualmente en Matemáticas es un objeto muy elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 2000 años"* (Ruiz, 1998). Es de esta manera como la función es un terreno sobre el cual se ha fincado toda la matemática moderna y "*una buena parte de las Matemáticas ha sido construida generalizando cada vez más la noción de función"* (Godemet, 1971, p.65).

El siguiente documento intenta proporcionar un bosquejo puntual del desarrollo *epistemológico-histórico* de este concepto a través de momentos claves y analizando personajes contundentes, con el objetivo de entender las diversas concepciones históricas sobre las cuáles ha transitado tan importante objeto matemático.

Y así mismo mencionar algunos de los *obstáculos epistemológicos* a los que se ha enfrentado la humanidad para poder llegar a generalizar y hacer uso de éste, tal y como lo conocemos hoy en día.

Todo lo anterior tiene cabida al intentar proveer más elementos de análisis a la problemática en la cual se centran la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en nuestros días.

Desarrollo Epistemológico-Histórico.

Dos culturas que sobresalen en la antigüedad debido a sus impresionantes logros filosóficos y matemáticos que han legado a la humanidad, entre otros tantos, son la Griega y la Babilónica.
Tales culturas logran hacer uso de una intuición primitiva del concepto de función, de manera que los babilonios buscan regularidad en las tabulaciones de fenómenos naturales como el movimiento de los astros, para después intentar aritmetizar y lograr generalizar tales observaciones, ya que "s*i no hubiera una regla general subyacente sería difícil explicar la analogía entre los distintos problemas del mismo tipo"* (Boyer, 1986). Así también se propone la existencia de un

instinto de funcionalidad, "*función no sólo es fórmula, es también una relación que asocia elementos de dos conjuntos*" (Pedersen, 1974).

Por otra parte, los filósofos griegos consideran el cambio y el movimiento como algo externo a las matemáticas, lo cual lleva a hablar en términos de *incógnitas e indeterminadas* más que en términos de variables. "*Esto conduce a las proporciones y ecuaciones, y no a las funciones*" (Ruiz, 1998). Y es aquí, con fundamento en lo anterior, donde se puede afirmar que las nociones más negativas en la evolución del concepto de función fueron "*la proporcionalidad, la inconmensurabilidad y la gran disociación en el pensamiento entre número y magnitud*" (René de Cotret, 1985).

La Edad Media es un periodo durante el cual se provoca una clara separación entre el álgebra y la trigonometría como dos disciplinas con objetivos particulares, pero sin percibirse aportaciones importantes.

Sin embargo, una característica esencial de este periodo se observa en los intentos por dar una explicación cuantitativa racional a los fenómenos naturales a través de procesos de abstracción los cuales se verán fuertemente negados debido a la *disociación entre número y magnitud.*

La consecuencia de tal confrontación llevará a dar sustento poco después a la *modelización matemática* de estos fenómenos a partir de resultados experimentales, de tal manera que "*la historia nos va a mostrar que es unificando, fundiendo las dos concepciones, como se van a poner las bases de la noción de función*" (René de Cotret, 1985. p.58).

Es de esta manera como se miran los primeros indicios de la concepción de función y esto se hallará concentrado en dos corrientes; por un lado, Heytesbury y Swineshead en Inglaterra a través de la *teoría de la intensidad de formas*, expresada mediante un álgebra de palabras; por otro, Oresme en Francia con un foco en la geometría de gráficas, *"representando por una figura las intensidades de una cualidad de una magnitud continua que dependen de otra magnitud análoga"* (Ruiz, 1998), y desde aquí es posible percibir los principios de la noción de función, en el que, "*Oresme ha tallado el árbol del bosque que permitiría más tarde a Descartes y a Galileo confeccionar la rueda*" (René de Cotret, 1985. p.38).

Otro periodo interesante es aquel correspondiente a los siglos XV y XVI, siglos conocidos por los historiadores como "periodos auxiliares" ya que no se logra aportación sobresaliente al desarrollo del concepto de función, sin embargo, se sientan las bases de la simbología algebraica que permite una manipulación práctica y eficiente, esencialmente al diferenciar entre "variable" de una función e "incógnita" de una ecuación, (Ruiz, 1998) lo cual marcará el sendero simbólico que llevará a la estructuración plena de la noción de función.

Así también comienza a tomar forma la estructura de la trigonometría como una ciencia encargada de situaciones propias, se escribirán libros y el matemático Müller, (s.XVIII), obtendrá por vez primera las tablas de tangente y cotangente, sirviendo todo lo anterior para nutrir a las matemáticas de una nueva clase de función: la función trigonométrica.

En otro sentido, inmersos en matices de movimiento se observa una relación muy estrecha entre número y magnitud lo cual trae a consecuencia el surgimiento de la noción de logaritmo a través de los trabajos de Chuquet, Stiefel y Neper.

Galileo prosigue lo iniciado en el periodo anterior, sin embargo ahora no solamente es la abstracción, si no que definitivamente se llega a la modelización matemática de los fenómenos a través de resultados experimentales, mecanismo que ayuda a evolucionar notablemente el concepto debido a que "*Galileo tuvo el deseo de relacionar de forma funcional las causas y los efectos, y esta necesidad fue un factor esencial en la concepción de la variable dependiente*" (René de Cotret, 1985. p.13). Sin embargo, la notación en la que se expresan los resultados sigue estando fuertemente basada en un gran obstáculo epistemológico: la idea de proporción.

El siglo XVII, es protagonista de toda una revolución en matemáticas. Nace la geometría analítica como consecuencia de los trabajos de Fermat y principalmente de Descartes al renunciar a las concepciones griegas de número y magnitud y lograr fusionarlas, y que según Youschevitch (1976), es aquí donde por primera vez, y de una forma completamente clara, se sostiene la idea de que una ecuación en x e y es un medio para introducir una dependencia entre dos cantidades, de manera que permite el cálculo de los valores de una de ellas correspondiente a los valores dados de la otra (Ruiz, 1998).

A consecuencia de lo anterior, se inicia el estudio de las curvas y las expresiones algebraicas que las describen, lo cual da pie al desarrollo de la teoría de funciones, "*el cual se basa fundamentalmente en tres pilares: el crecimiento impetuoso de los cálculos matemáticos, la creación del álgebra simbólico-literal y la extensión del concepto de número*" (Youschevitch, 1976).

Así también, se ponen los cimientos de la estructura de la noción formal de función y del análisis, columna vertebral del estudio del movimiento, el cual se desarrolla por un lado en Inglaterra por Newton bajo dos formas: la primera mediante el método que él llama de las primeras y últimas razones, de las cantidades que nacen y se desvanecen y la segunda a través del método de las fluxiones. Simultáneamente, en Alemania por Leibnitz a través del cálculo de los diferenciales, quien por vez primera habla en términos de *función,* ya que según Youschevitch (1976), a falta de un término general entre él y Bernoulli, para representar las cantidades arbitrarias que dependen de una variable, va a conducir bien pronto al uso de la palabra función en el sentido de una expresión analítica, (Ruiz, 1998).

Siguiendo la línea histórica concebida anteriormente, llegamos al siglo XVIII, un periodo que definitivamente marca a la matemática, ya que es aquí en donde se analizan los fenómenos físicos a través de un objeto matemático de naturaleza eminentemente analítica que deja de ser la curva para llegar a ser la función, impregnada aún de las ideas infinitesimalistas de Leibnitz, la poderosa herramienta que este último ha legado.

Bernoulli y Euler, serán las figuras del siglo XVIII, con quienes la noción de función es considerada una expresión analítica, proponiendo el primero de ellos, la letra griega f para designar la característica de una función, escribiendo entonces: <<*fx*>>, lo que evolucionará con Euler, para escribirse como *f(x).*

Lo anterior es observable cuando el concepto de función es fundamental en la nueva disciplina que Euler estructura a través de conjuntar al Cálculo Diferencial de Leibnitz con el Método de fluxiones de Newton, de donde emerge el Análisis Matemático, disciplina que estudia los procesos infinitos.

Leibnitz da a conocer su trabajo sobre diferenciales en el *Acta Eruditorum* (1684 y 1686), y es hasta cinco años después cuando, Jakob y Johann Bernoulli, estudian el cálculo leibniziano e intentan dar a conocer el poder de esta nueva herramienta en la solución de problemas físicos en comparación con otros métodos de la época.

Es con el problema de la cuerda vibrante; problema que según Euler, "*queda totalmente determinado si se dan para un instante cualquiera, la forma de la cuerda y la velocidad en cada punto"* (Farfán, 1997), como se hace uso de funciones diferentes a las que se manejan en la época, llegando a incluirse a las funciones trascendentales *e, ln, z y las funciones trigonométricas*, y terminado con proporcionar una clasificación coherente con su *noción analítica de función* hasta este momento.

Precisamente aquí, Euler se verá en la necesidad de generalizar la definición de función, tomando en cuenta *funciones arbitrarias*, especiales, no derivables, con picos, a las que él llama *discontinuas o mixtas,* escribiendo a D´Alambert:*...considerando tales funciones que no se sujetan a la ley de continuidad se abre ante nosotros una nueva ruta de análisis...*(Farfán, 1997).

Por lo tanto, es posible afirmar que, "*quien reestructuró el cálculo leibniziano y lo convirtió en un cuerpo organizado fue Leonhard Euler, figura central de la matemática del siglo XVIII"* (Farfán, 1997), dándolo a conocer en su libro *introduction a l´analyse infinitesimale* en 1748, donde inicia definiendo sus objetos de estudio, las funciones: *una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, como quiera que lo sea, de dicha cantidad y de números o cantidades constantes..., y las cantidades sobre las que opera: ...Una cantidad variable es una cantidad indeterminada o, si se quiere, una cantidad universal que comprende todos los valores determinados...,*

Un valor determinado cualquiera puede expresarse por un número, y de aquí se sigue que una cantidad variable comprende todos los números, cualquiera que sea su naturaleza. Sucede con la cantidad variable como con el género y la especie en relación a los individuos; puede concebírsele como abarcando todas las cantidades determinadas.

Así, una tal cantidad (variable) abarca todos los números, tanto positivos como negativos, los números enteros y los fraccionarios, los racionales, los irracionales, y los trascendente; incluso no debe excluirse el cero ni a los números imaginarios (Euler, 1748a, p.2).

Es así como Euler será conducido a continuar el desarrollo posterior del concepto, explorando nuevos caminos que el análisis matemático recién descubierto ha proporcionado y lo cual será la punta de flecha en el estudio que más tarde Cauchy, Riemann y Weierstrass realizarán acerca de la continuidad de curvas.

Producto de lo anterior, será el impresionante desarrollo del análisis, "*pasando de una herramienta para la resolución de problemas en mecánica como quizás Newton lo contempló, a una disciplina con sus propios problemas, cada vez más inmersa en ella misma y en sus propios principios*" (Ruiz, 1998).

El siglo XIX se encuentra caracterizado por diversas generalizaciones observadas en los trabajos de Cauchy, (1827), Lobachevsky, (1834), Dirichlet, (1837), Riemann, (1858), al emplear al objeto matemático función como la médula del Análisis recién creado por Euler. Ellos describían a la función con la particularidad de ser una correspondencia de tipo muy general (Ruiz, 1998).

Esto producirá una gran formalidad al concepto por parte de Cauchy, quien intentará contener toda "la sustancia" de éste en definiciones abstractas, las que después perderán de vista las relaciones geométricas y las nociones de curva que guarda en sí mismo este objeto y que en el pasado fueron las que le dieron vida.

El siglo XX, es el que corresponde al uso pleno y a la exploración minuciosa del concepto basado formalmente en la noción general de función introducida por Dirichlet, y basta observar lo que Spivak (1978), escribe a este respecto: "*El concepto más importante de las matemáticas es el concepto de función. En casi todas las ramas de la matemática actual, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender, por lo tanto, que el concepto de función haya llegado a definirse con una gran generalidad*".

En libros clásicos de matemáticas de nuestros tiempos, es observable cómo se intenta favorecer más la relación que guarda este concepto con el intento por describir fenómenos naturales, de tal manera que "*en la actualidad se prefiere considerar el concepto de función como aplicación*" (Dieudonné, 1989, p.187).

Es evidente que la noción primitiva de función era mucho más intuitiva; la actual tiene un alto grado de formalización que la hace mucho más abstracta.

O como Freudenthal (1983, p.497) diría; "*aunque esta definición está construida de una manera lógicamente formalizada, sin embargo, se ha oscurecido su esencial significado como acción de asignación de variables, ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático*".

Consideraciones Finales

Acabamos de presentar una línea histórica con intencionalidad que nos permite admirar y analizar muy de cerca el desarrollo epistemológico de un concepto fundamental en matemáticas. Hemos podido presenciar las concepciones temporales de los actores y los mecanismos que permitieron la modificación de estas ideas a través del tiempo y del contexto social en el cual vivieron.

Y es así como el *recorrido epistemológico* anterior nos provee de un hilo conductor mediante el cual pretendemos entender diversos fenómenos didácticos que se presentan al seno de las instituciones, todo, sin perder de vista el foco de atención tan evidente como Rugarcía (2000), afirma "*es el momento de cuestionar en serio nuestros paradigmas educativos para concebir e intentar lograr un hombre nuevo, una nueva sociedad, otra cultura*".

Referencias Bibliográficas

Boyer, C. (1986). *Historia de las matemáticas*. Madrid; Alianza Universidad.

Chevallard, Y. (1989). *Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Etapes d´une recherche*. Marsella, Francia: IREM d´Aix-Marseille.

Dieudonné, J. (1989). *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica, Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht**,** Holland: Riedel.

Godement, R. (1978). *Álgebra.* Madrid: Tecnos.

Pedersen, O. (1974). Logistics and the theory of functions: An essay in the history of Greek mathematics. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences 24*(94), 29-50.

René de Cotret, S. (1985). *Etude historique de la notion de fonction: analyse épistémologique et expérimentation didactique.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad de Québec, Montreal, Canadá.

Rugarcía A. (2000). El culto al conocimiento y la formación de ingenieros. *Ingenierías 3*(7), 3-9.

Ruiz, H.L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Spivak, M. (1978). *Cálculo Infinitesimal*. Barcelona, España: Reverté.

Youschevitch, A.P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th Century, *Archive for history of exact sciences 16*, 36-85.

El Uso de las Gráficas en los Libros de Texto

Rebeca Flores y Francisco Cordero
Cinvestav-IPN
México
rbflores@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx
Socioepistemología – Nivel Superior

Resumen

En este escrito reportamos avances de una investigación en la que se analiza el uso de las gráficas en el discurso matemático escolar, a través de los libros de texto de matemáticas de la escuela básica (primaria y secundaria), a la luz de la aproximación socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa. Del análisis se desprende un marco de referencia que nos permitió comprender el uso de las gráficas en los libros de texto y categorizar los usos con respecto a su funcionamiento y forma que tendrá que ser considerado para analizar la resignificación de las gráficas en escenarios de "gráficas cartesianas".

Introducción

La disciplina Matemática Educativa atiende problemáticas relacionadas con la transmisión de saberes en el área del conocimiento de las matemáticas. Una de estas problemáticas consiste en haber reconocido que en los niveles educativos medio y superior se privilegia a ultranza el contexto algebraico. Esta situación niega el desarrollo de la construcción del conocimiento matemático según investigaciones epistemológicas (Campos 2003). Se requiere lograr equilibrios entre los diferentes contextos. La graficación, en ese sentido, ha sido un campo de investigación comprendiéndola como una práctica como nos lo advierte el marco teórico que nos ocupa.

Muchas veces el análisis de los fenómenos didácticos está enfocado a los aspectos conceptuales del saber y no así a aquellas prácticas que le dan sentido a ese saber. Creemos que se pasa por alto la influencia del discurso matemático escolar en los fenómenos didácticos. En tal discurso se manifiesta un debate entre un modelo racional adoptado por la ciencias y los sentidos de los participantes en el sistema didáctico. Entender las problemáticas que nos ocupan desde el marco teórico socioepistemológico, indica estudiar cómo vive el conocimiento en el sistema didáctico y por ende en el discurso matemático escolar. Dicho discurso constituye una concepción de enseñanza que está normada por el contrato escolar y el pragmatismo que se deriva de éste. Se ejerce la enseñanza-aprendizaje, por un lado, considerando a la matemática como un conocimiento acabado y por el otro, tratando a los conceptos matemáticos en la didáctica como actos repetitivos o de memorización. Estos hechos han definido la enseñanza tradicional de las matemáticas, cuya característica esencial es que se ha limitado al plano del lenguaje (modelo racional de la ciencia) y ha dejado de lado el papel de las acciones (los sentidos de los participantes) (Cordero 2003). Lo que implica, entender cómo vive la graficación en el discurso matemático de los libros de texto, es decir, entenderla como un conocimiento en sí mismo a través de su propio uso (Flores y Cordero, 2004). En ese sentido, se lleva acabo el análisis de los libros de texto en el nivel básico para la educación primaria y secundaria.

El caso de los libros de texto gratuitos de matemáticas del nivel básico para la educación primaria.

En el análisis preliminar de los contenidos en los libros de texto gratuitos de matemáticas del nivel básico para la educación primaria, distribuidos por la Secretaría de Educación Pública (SEP), se logra categorizar ciertos usos de las gráficas con relación a actividades curriculares correspondientes a los diferentes grados escolares. Los libros de texto de matemáticas analizados fueron los del ciclo escolar 2003-2004

En el transcurso de la investigación se han formulado interrogantes tales como: ¿A qué se le llama gráfica en los diferentes grados escolares del nivele básico?; ¿Cuáles son los tipos de gráficas y sus usos? ; ¿Cuándo aparece el plano y las curvas cartesianas? Para ir formulando respuestas, convenimos en establecer dos momentos del uso de las gráficas en los libros de texto con la finalidad de tener un marco de referencia que de cuenta del desarrollo del uso de las gráficas en el discurso matemático escolar.

- ***Momento de síntoma de gráfica.*** En este momento, en un sentido curricular, no es explícito el concepto de gráfica en el contenido de los libros, sin embargo, aparecen actividades alusivas a las gráfica cartesianas con preferencia en el primer cuadrante, como mapas y planos para localizar puntos (Fig. 1), cuadrículas para ubicar y trazar trayectorias (Fig. 2), así como también, se usa una variedad de retículas para la producción de figuras (Fig. 3), y finalmente se usan tablas con barras con ciertos indicadores que implican conteo y cardinalidad (Fig. 4). Este momento aparece en todos los grados escolares.


Fig. 1.

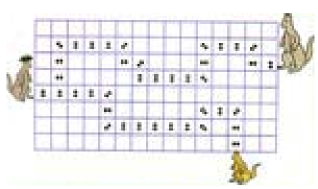


Fig. 2

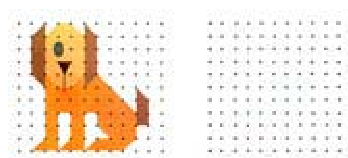


Fig. 3


Fig. 4

- ***Momento de la gráfica***. En este momento, en un sentido curricular, es explícito el concepto de gráfica cartesiana a través de actividades con tablas y gráficas de barras (Fig. 5 y 6), así como también con puntos en planos con ejes cartesianos para establecer sus coordenadas (Fig. 7) y finalmente con curvas contigüas para analizar la distribución de puntos (Fig. 8). Todo ello aparece a partir del tercer grado escolar.


Fig. 5

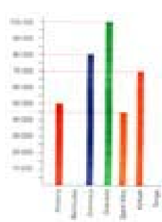


Fig. 6

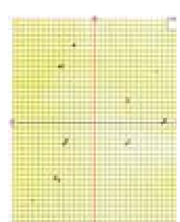


Fig. 7

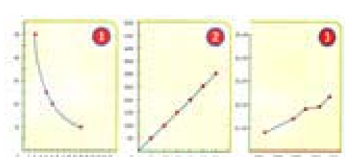


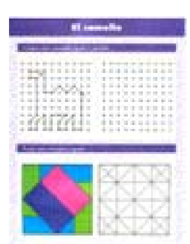
Fig. 8

Los dos momentos ofrecen usos de las gráficas cuyas *forma*s son normadas por las *funciones* de éstas en las actividades. Por ejemplo, en las figuras 2 y 8 aparecen gráficas cuyas funciones en las actividades consisten, para la primera, trazar una trayectoria para después reproducirla comparándola con la trazada, y para la segunda, a partir de ciertos valores numéricos analizarlos a través de la distribución de puntos en el plano cartesiano. Estas funciones debaten con formas establecidas como la presencia o ausencia de retículas, de los ejes cartesianos o las escalas, y de fórmulas. Tal situación provee diferentes categorías de uso de las gráficas que presentamos a continuación.

Las categorías indican el patrón de uso de las gráficas en los libros de texto del nivel básico. Cada una de las categorías son caracterizadas por tres aspectos: tareas alusivas, ubicación y descripción de las tareas (ver Tabla).

- Categorías. Se determina el patrón de uso de las gráficas por medio de la *función* y *forma* de la gráfica en cuestión.
- Tareas alusivas. Se elige una imagen de la tarea alusiva a la categoría para evidenciar la *forma* de la gráfica usada.
- Ubicación de la tarea. Se ubican las tareas alusivas para crear un marco de referencia curricular que permita señalar aspectos del desarrollo del uso de las gráficas.
- Descripción de la tarea. Se describe el contenido de la tarea para analizar los significados y procedimientos de uso de las gráficas.

Tabla. Categoría de usos de las gráficas

Categorías	Tarea Alusiva	Ubicación de la tarea	Descripción de la tarea
Reproducción de figuras. El patrón de tareas consiste reproducir figuras en cuadros en blanco o con retículas cuadras, rectangulares o punteadas.		Las actividades correspondientes suelen llamarse “El camello” y se encuentra en el libro de texto del primer grado de primaria, en la quinta parte, página 156.	La tarea está compuesta de dos partes. En la primera se le solicita al alumno, reproducir cierta figura formada en su mayor parte por líneas rectas en una retícula punteada; y en la segunda parte, se pide reproducir mosaicos poligonales en una retícula triangular.
Reproducción y comparación de trayectorias. Compone un patrón de tareas en el cual se plasman y reproducen trayectorias. La comparación entre las trayectorias es el procedimiento para		Las actividades correspondientes a esta tarea suelen llamarse “Los caminos del pollo” y se encuentra en el libro de texto del segundo grado de primaria, en el bloque tres,	La tarea se compone de dos partes. En la primera se le pide al alumno comparar ciertas trayectorias, en retícula cuadriculada, la cual esta compuesta de huellas plasmadas en cada cuadro de la cuadrícula; en la segunda parte, se le pide la reproducción de las trayectorias.

la reproducción, provisto por las retículas cuadradas, triangulares o punteadas.		página 92.	

Ubicación y desplazamiento. El patrón de tareas consiste en realizar ubicaciones y desplazamientos en planos, mapas o planos cartesianos de móviles y puntos.		Se titula "El pueblo donde vive Luis" y se encuentra en el libro de texto del tercer grado en el bloque uno, página 8.	La tarea se compone de tres partes. En la primera se le solicita al estudiante describir el mapa que se les presenta; en la segunda se le pide al estudiante ubicar móviles después de cierto desplazamiento y en la tercera describir cierta trayectoria.
Análisis de información. El patrón de tareas consiste en recopilar, organizar, comparar e interpretar, datos e información, en tablas y gráfica de barras.		Las actividades correspondientes suelen llamarse "Naciones poco pobladas" y se encuentra en el libro de texto del cuarto grado de primaria, en el bloque dos, página 70-71.	La tarea consta de cuatro partes. En la primera, se le presenta al alumno una tabla y gráfica de barras y se le cuestiona al respecto; en la segunda y tercera partes, se le pide vaciar los datos en una gráfica con indicadores (compuesta de figuras) y en la tercera se le solicita interpretar cierta información de ellas.
Distribución de puntos. El patrón de tareas consiste en realizar representaciones en tablas y gráficas de puntos que se distribuyen y varían de cierta manera.		Las actividades correspondientes suelen llamarse "¿Proporcional o no proporcional?" y se encuentra en el libro de texto del Quinto grado en el bloque cinco, página 166-167.	La tarea se compone de tres partes. En la primera, se le solicita al alumno relacionar tres gráficas dadas con tres situaciones por la manera de describir la variación de los puntos; En la segunda, se le pide al estudiante elaborar gráficas contiguas con respecto a tablas dadas; Yen la tercera, se le presentan y se cuestiona al alumno con respecto a las gráficas de variación proporcional directa.
		Se titula "Se puede predecir el futuro" y se encuentra en el libro de texto del	La tarea se compone de dos partes. En la primera se le presenta una tabla con datos de una situación que varía de cierta forma y se le cuestiona al

		sexto grado en el bloque cinco, página 188-1889.	estudiante al respecto; en la segunda se le pide al estudiante plasmar los datos anteriores en una gráfica poligonal sobre una cuadrícula y se le cuestiona con respecto a la variación.

A continuación mostramos en el siguiente esquema las categorías que se presentan en cada uno de los grados escolares del nivel básico.

Esquema 1. Categorías de uso de las gráficas en los textos de primaria

- Categorías
  - Primer Grado
    - Reproducción y comparación de trayectorias
    - Análisis de información
    - Reproducción de figuras
  - Segundo Grado
    - Reproducción y comparación de trayectorias
    - Análisis de información
    - Reproducción de figuras
    - Ubicación y desplazamiento
  - Tercer Grado
    - Análisis de información
    - Reproducción de figuras
    - Ubicación y desplazamiento
  - Cuarto Grado
    - Análisis de información
    - Reproducción de figuras
    - Ubicación y desplazamiento
  - Quinto Grado
    - Análisis de información
    - Ubicación y desplazamiento
    - Distribución de puntos
  - Sexto Grado
    - Análisis de información
    - Reproducción de figuras
    - Ubicación y desplazamiento
    - Distribución de puntos

El esquema provee indicadores del uso de las gráficas en el discurso matemático escolar de los libros de texto de matemáticas del nivel básico para la educación primaria. Dicho uso se desarrolla a través de dos momentos: el *síntoma de gráfica* y el de *gráfica*. El *primer momento* aparece en los libros de matemáticas de todos los años escolares: el síntoma gráfico privilegia procedimientos usando retículas y datos en tablas que posteriormente serán resignificados como primer cuadrante y ejes de referencia.

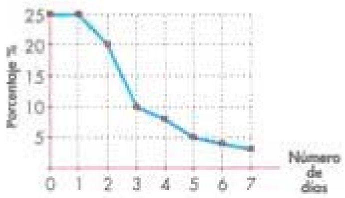


Fig. 9

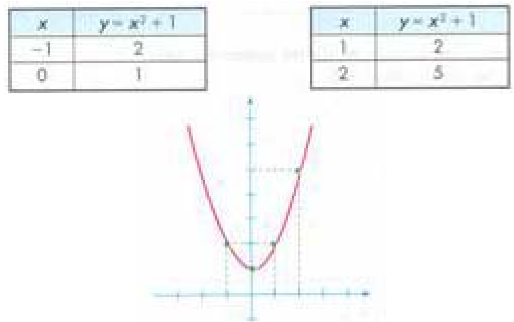


Fig. 10

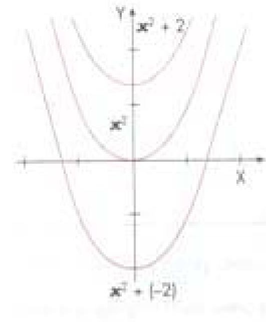
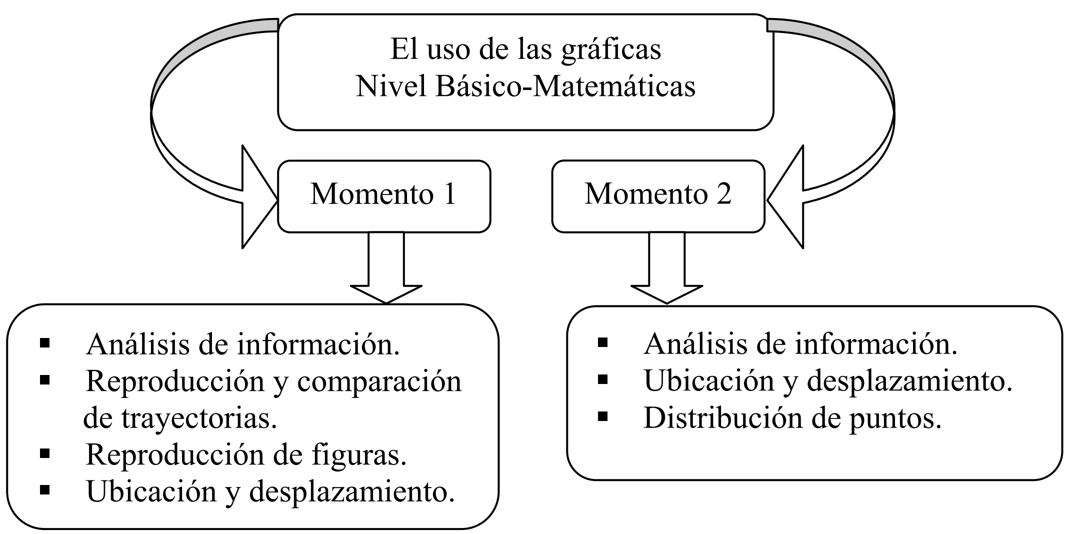


Fig. 11

El *segundo momento* solo aparece hasta el tercer año y continuando hacia el sexto año, con el uso de gráficas de barras y gráficas contigüas en planos cartesianos sin retículas. Estos momentos son encontrados también en los libros de textos gratuitos de la Secundaria distribuidos por la SEP. Las figuras 9, 10 y 11, son los prototipos de gráficas cuyo desarrollo de sus usos estarán expresados mediante los dos momentos anteriormente descritos. Sin embargo, los síntomas y las gráficas comprenden el marco de referencia para abrir, posiblemente, otro momento donde la *función* y *forma* de la gráfica serán trastocadas por las tablas numéricas y las fórmulas algebraicas.

Conclusiones

El avance de la investigación provee que el uso de las gráficas, en los libros de texto gratuitos de matemáticas del nivel básico, se vale de dos momentos, los cuales despliegan categorías. Todo ello compone un marco de referencia del uso de las gráficas (ver esquema 2) que tendrá que ser considerado para analizar la resignificación de las gráficas en escenarios de "gráficas cartesianas".



Esquema 2. Marco de referencia del uso de las gráficas en los libros de primaria

Referencias Bibliográficas

Campos, C. (2003). *La argumentación gráfica en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Flores, R. y Cordero, F. (2004). Uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. *Resúmenes de la Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, p. 249, México.

Cordero, F. (2002). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral. La noción de acumulación como una argumentación*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Secretaria de Educación Pública. (2003). Libros de texto gratuito de Matemáticas, Nivel Básico, Serie Ciclo Escolar 2003-2004.

Secretaria de Educación Pública. (2000). Libros de texto gratuito de Matemáticas, Nivel Secundaria, Serie 2000.

Modelación de la Evolución de la Levadura: Un Estudio de las Prácticas Sociales del Ingeniero Bioquímico

Adriana Galicia y Jaime Arrieta
Instituto Tecnológico de Acapulco
México
agsosa2001@yahoo.com.mx
Socioepistemología – Nivel Superior

Resumen

En éste artículo, hacemos un análisis de la interacción de estudiantes de ingeniería bioquímica en la construcción de lo exponencial a partir de la modelación de la evolución de levaduras en el laboratorio de microbiología, tomando como premisa que ésta actividad es una practica social que se realiza en comunidades de ingenieros bioquímicos.
Nuestra atención se centra en la riqueza del papel discursivo de los actores y su interacción, ya que a través del discurso, los actores construyen, debaten, concensan e interpretan los significados.
El trabajo realizado es una exploración que nos muestra ya evidencias para el diseño de una secuencia didáctica, y nos permite conocer algunos elementos a considerar para la puesta en escena de dicha secuencia.

Introducción

El presente trabajo de investigación está inscrito en la naciente línea de investigación: " Las prácticas sociales en la construcción social del conocimiento" que se viene desarrollando en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, asi mismo forma parte de los trabajos de investigación que se están desarrollando como parte de las actividades del proyecto: "Laboratorio de Ciencias" en el Instituto Tecnológico de Acapulco.
Tradicionalmente en el sistema educativo hemos considerado el proceso del aprendizaje como una actividad ubicada en el aula, separada de otras actividades sociales, por ejemplo de comunidades de profesionistas, proceso en el que se considera al aula como el único espacio donde el que sabe, el profesor, dota de conocimientos al que aprende, el alumno, sin que se consideren algunos aspectos como la experiencia propia del estudiante y el aprendizaje desde su perspectiva, desestimando así la participación activa del estudiante.
En el ámbito de la enseñanza de las matemáticas resulta aún más complejo el vincular la actividad escolar con la actividad social."El alumno se convence que la práctica del aprendizaje de las matemáticas es un verbo que no se conjuga con las demás prácticas sociales" (Galicia, 2004).

Existe evidentemente una problemática social e histórica en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, aún cuando paradójicamente, gran parte de la matemática se ha construido a partir de la interacción con diferentes fenómenos, que actualmente hemos desestimado en el aula de matemáticas.

Es poco común que se aborde la enseñanza de las matemáticas desde un enfoque químico-biológico y podemos mencionar al menos tres razones, por ejemplo, el desinterés por el aprendizaje de las matemáticas por parte del estudiante, el que la mayoría de los profesores de matemáticas no son profesionistas de formación en las áreas químico-biológicas, por lo que abordar la enseñanza de las matemáticas desde ésta perspectiva significaría mayor preparación de los temas a tratar y por otra parte, la poca demanda que tiene el estudio de las áreas químico-biológicas a nivel nacional.

Sin embargo, consideramos que es precisamente en el estudio de éstas áreas del conocimiento donde podemos identificar mayor dificultad por parte de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas.

El cuestionamiento: ¿y las matemáticas para que me van a servir?, es recurrente entre los estudiantes de cualquier área del conocimiento, consideramos que dicho cuestionamiento es mas patente en estudiantes de áreas químico-biológicas

No es por lo tanto, la enseñanza de las matemáticas desde éste punto de vista, un asunto habitual, mas sin embargo, intentamos estudiar la construcción de modelos a partir de fenómenos químico-biológicos y de ésta forma realizar algunos aportes al respecto.

Consideramos que la construcción de herramientas a partir de las prácticas sociales, en nuestro caso particular, la construcción de lo exponencial a partir de la evolución de la levadura, rescata la característica funcional del conocimiento en el estudio de la ingeniería bioquímica, es decir no habrá solo de responder a necesidades de la vida diaria, sino que el conocimiento habrá de integrarse en la vida profesional del individuo para que ésta sea transformada e incida en un beneficio social.

Con éste trabajo emprendemos nuestras primeras exploraciones desde las cuales intentamos rescatar, para la educación matemática, a la experimentación como actividad y al laboratorio como escenario.

¿Cómo abordar la problemática?

El trabajo se sustenta en las llamadas prácticas sociales y la problemática que nos ocupa requiere, como necesidad básica, el dotar a nuestra investigación de una aproximación sistémica que nos permita incorporar las cuatro componentes fundamentales de la construcción del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y las formas de transmisión vía la enseñanza. A esta aproximación múltiple, se le ha denominado formalmente acercamiento socioepistemológico (Cantoral y Farfán 2001).

En la actividad dentro del aula, consideramos que el alumno debe construir sus argumentos, defenderlos, discutir hasta encontrar su verdad y en consenso con sus compañeros y con el profesor como moderador de ésta retórica, se establezca el hecho científico. Es decir, estamos proponiendo el concebir a la ciencia no como algo acabado y externo al estudiante, sino más bien como algo que es construido en el discurso desde la perspectiva del alumno y no del profesor ó del autor del texto, así coincidimos con Candela cuando habla de que "...enfrentar al alumno con la "evidencia" a través de la observación y de las actividades experimentales es y ha sido probablemente, el elemento más significativo de la enseñanza de la ciencia desde diversas perspectivas psicopedagógicas"(Candela ,1999).

Nuestro interés se centra en el ejercicio de las prácticas de modelación por los actores, las herramientas que utiliza, los argumentos que esgrime para defender sus versiones y los concensos a los que llegan para intentar construir lo exponencial articulando los modelos numérico y gráfico con el fenómeno biológico.

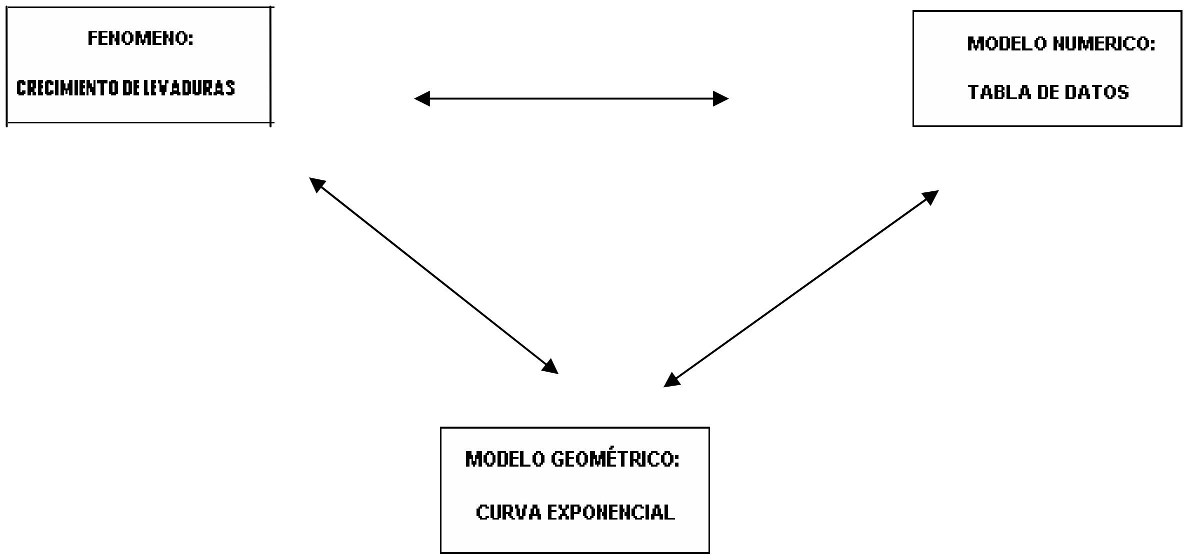


Figura 1.-Las fases de la modelación: construcción de los modelos, su tratamiento y la articulación de los modelos y los fenómenos

Hacemos uso de la ingeniería didáctica como metodología, tomando como base las prácticas sociales. El trabajo esta fundamentado en la "la numerización de los fenómenos": las prácticas de modelación que parten de la recolección de datos numéricos de un fenómeno para construir modelos numéricos y su uso se toma como central. Estas prácticas ponen en el centro el uso de modelos numéricos (Arrieta ,2003).

¿Cual es nuestra pretensión?

Nuestro interés es que el alumno construya conocimiento matemático, en particular, la construcción de lo exponencial como herramienta al ejercer la práctica de crecimiento microbiano.

Para ello nos ubicaremos en su espacio, es decir en uno de los escenarios en el que el alumno se identificará profesionalmente, entre matraces, medios de cultivos y microorganismos: El laboratorio de microbiología.

La puesta en escena

Para la puesta en escena, partimos de la tesis de que lo exponencial es construido por el humano al experimentar el desarrollo de colonias de levaduras, en interacción con los demás humanos. En ésta exploración, el papel del profesor es la de moderar la retórica que es generada en el aula por los alumnos.

Se organizaron tres equipos de cinco alumnos, cada equipo contó el número de microorganismos cada hora, durante 30 horas. Se instaló una audiograbadora en cada equipo para grabar los argumentos de los alumnos, así como con una videograbadora para obtener una mayor perspectiva del escenario.

Los 15 participantes son alumnos que cursan cuarto semestre de la carrera de ingeniería bioquímica en el Instituto Tecnológico de Acapulco, asistieron a la sesión de trabajo por invitación y en periodo vacacional, es decir dicha actividad fue voluntaria y sin ninguna valoración en su calificación. Se organizaron tres equipos de cinco integrantes cada uno

La interacción discursiva

Los alumnos interactúan entre ellos, con el afán de encontrar su verdad, generando así, sus recursos argumentativos y contribuyendo a la construcción social del conocimiento. Como resultado de ésta interacción presentaremos sólo algunos de los episodios que consideramos interesantes.

En búsqueda de las características de lo exponencial

Verónica:Los datos vienen de menor a mayor
Eric:Tienen que ir aumentando ¿no?
Verónica:Como va pasando el tiempo tiene que ir aumentando
Aurora:¡Aja!, se van desarrollando
Karina:Mira, si te fijas aquí, no nos va subiendo de mucho (al inicio)
Aurora:¡No pues sí!
Karina:Y a ellos después de que a nosotros nos dio 0.036 a ellos les da 0.061
Eric:¡Ése…el cambio es muy grandote!
……………….………………………………………….
Profesora:¿Qué características tiene la tabla?
Eric:En las primeras lecturas se van casi duplicando los microorganismos
Aurora:Pero a partir de la cuarta tiene un valor muy ascendente
En éste primer episodio, los alumnos analizan las características de la tabla numérica que han construido, es decir, se encuentran numerizando el fenómeno, descubriendo características de lo exponencial.

Encontrando la relación lineal

Profesora:¿Ustedes sacaron diferencias?
Joaquin:Es que…de la 5 a la 6 hay una diferencia de 0.2 , en la siguiente diferencia de 6 a 7 existe un incremento proporcional de microorganismos
Profesora:¿Que harán con esos datos?… ¿porque no juegan con todos los datos de su tabla?
Karina:(Eso de seguro es para saber algo)
Verónica:Como cuando haces una regla de tres
Aurora:A ver,… grafiquemos las diferencias, a ver si es recta

Aurora:Sí, si sale recta
Verónica:¡Pues sí!
Joaquin:¡Asi se inventó la electricidad!
Todos:¡Je!.. ¡je!.. ¡je!
Aurora:Entonces esta va a ser microorganismos contra diferencias
Profesora:¿Cómo son esas diferencias con la columna de microorganismos?
Julieta:¡Son proporcionales!

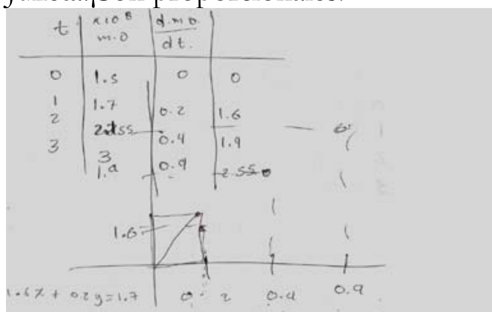


Figura 3.-Anotaciones de Verónica

Los estudiantes intentan, en éste episodio, analizar las diferencias del número de microorganismos de tal forma que dan cuenta de la proporcionalidad que existe entre los datos, esbozando dicha relación de forma gráfica, sin que en algún momento se les diera tal indicación.

El crecimiento es limitado

Kenia: En los dos últimos puntos de la gráfica, se observa que casi no hay mucha diferencia
Profesora:¿Por qué cree que sea eso?
Kenia:Empieza a permanecer una línea recta a los 24 y 25 en la línea del tiempo
Profesora:¿A ver por qué creen que suceda eso?
Joaquín:Lo que pasa es que… ¿Cómo pudiera explicarle?
Profesora:Intentalo
Joaquin:Lo que pasa es que es como si los microorganismos tuvieran sus hijitos y éstos también tuvieran hijitos y así… hasta que se mueren
Profesora:¿Se mueren?...¿Porqué?
Joaquin:Porque es la ley de la vida
Profesora:Que pasa con el alimento ó sustrato
Victor:Se acaba, porque no vimos que se le agregara más, los matraces tenían la misma concentración de sustrato y se inocularon con microorganismos
Profesora:¿Y si agregáramos más sustrato, que pasaría?
Todos:¡Ah!, pues vuelven a desarrollarse
Profesora:Bien, pues como el pH y la temperatura son óptimos para el desarrollo de éstas levaduras, sólo el sustrato nos limitará el crecimiento.
En éste capitulo, luego de haber analizado casi toda la curva del comportamiento del desarrollo de las levaduras, los estudiantes discuten las limitantes y logran incluso, predecir el comportamiento si se llegase a modificar una variable.
En la transcripción de estos episodios, podemos observar cómo es que la práctica social es la plataforma epistemológica para la contribución del estudiante en el discurso científico escolar, evidenciando su riqueza argumentativa

Los participantes, al practicar ésta modelación, están cambiando su identidad, se están preparando para incursionar en comunidades de profesionistas, por otro lado, pudimos evidenciar por los comentarios de la experiencia adquirida en el laboratorio, aspectos tan importantes como el lograr relacionar la instrucción matemática con el estudio de su profesión y mas aún, pudimos darnos cuenta que incluso éste tipo de actividades en la clase de matemáticas es motivante para los estudiantes, como podemos observar en las anotaciones siguientes.

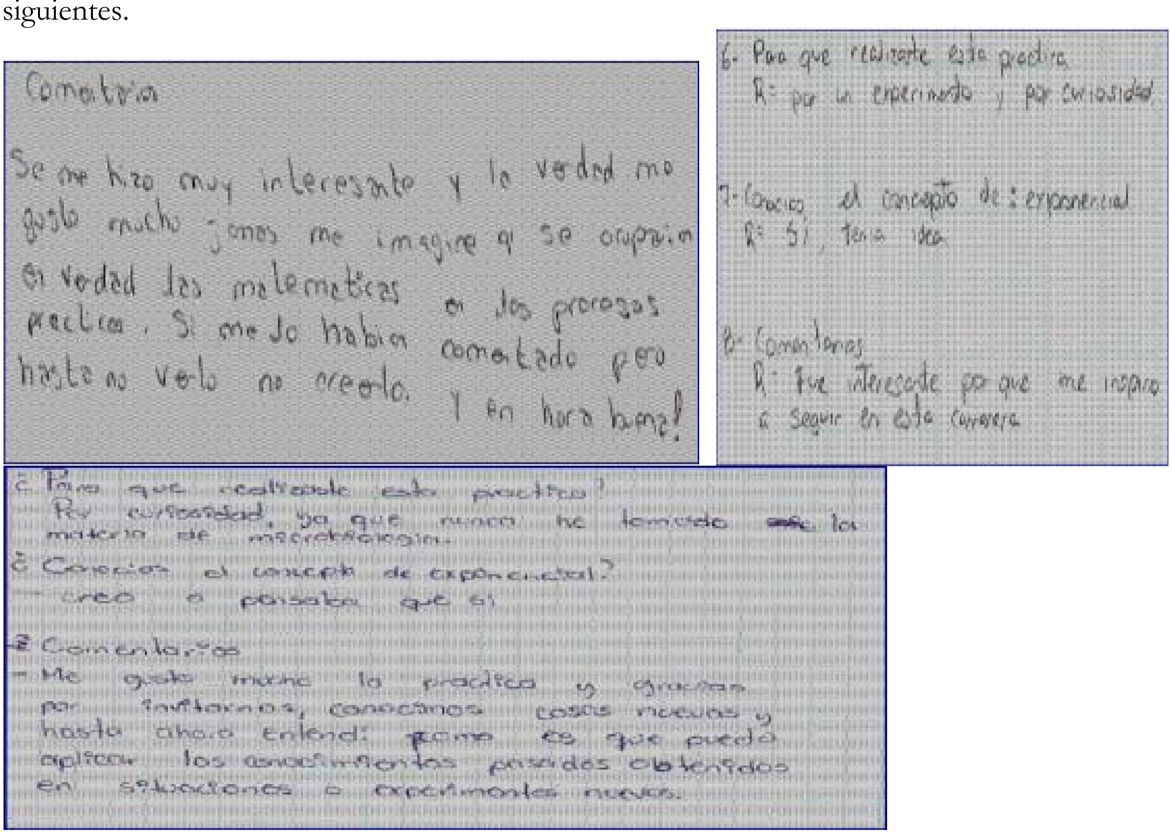


Figura 4.-Impresiones anónimas por los estudiantes, del trabajo en el laboratorio

Indudablemente, con ésta actividad es posible avanzar en la respuesta al cuestionamiento: ¿y las matemáticas para que me van a servir?.

Conclusiones

Los participantes caracterizan, a partir de la observación del fenómeno, lo que es lo exponencial en una tabla de datos articulándola con el modelo gráfico. Al analizar los datos en la tabla, encuentran la relación lineal, estableciendo, además, diferentes formas de predicción. Los alumnos hacen uso de los conocimientos matemáticos previos para la construcción de una herramienta: lo exponencial.

Cabe hacer mención que la duración del desarrollo de la práctica lejos de ser un inconveniente es una ventaja, ésta actividad durante varias horas en el laboratorio, para el alumno, es habitual y en cuanto a la preparación previa, tampoco es un gran inconveniente, ya que en el laboratorio de microbiología se cuenta con alumnos que cursan las asignaturas de microbiología sanitaria y no es mayor dificultad contar con su apoyo, además de que se cuenta con el material y reactivos necesarios y como lo constatan las evidencias, consideramos que es en su espacio, donde el alumno debe construir el conocimiento y para un ingeniero bioquímico, el laboratorio es su escenario.

Este trabajo, es una primera exploración del actuar de los alumnos ante la observación de un fenómeno en el laboratorio de microbiología, dejando a un lado la participación protagónica del profesor, así mismo nos aporta evidencias para el diseño de una secuencia didáctica que nos permita construir lo exponencial articulando el modelo biológico con los modelos numérico, gráfico y algebraico.

Referencias Bibliográficas

Arrieta,J (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.

Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso*. México: Paidós Educador.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2001). *La sensibilidad a la contradicción: un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja*. México: Paidós Educador.

Galicia,A.(2004). *La construcción de lo exponencial a partir de las prácticas sociales de modelación.* Tesis de maestría no publicada Universidad Autónoma de Guerrero. México.

¿Son las Prácticas Sociales Fundamento para la Democratización de la Matemática?

Carlos García
Universidad Autónoma de Guerrero
México
carlos_agp@hotmail.com
Estudios Socioculturales – Nivel Superior

Resumen

En este artículo se presentan las bases del proyecto de investigación que tiene como propósito recurrir a las prácticas sociales como vínculo para la democratización. En primer término se establecen las cualidades propias de las prácticas sociales, particularmente de aquellas relacionadas con la construcción social del conocimiento. Se establecen algunos ejemplos al respecto, caracterizándolos y analizando sus alcances. A continuación se observa de manera general los acercamientos a la noción de democracia, vinculándolos con la educación y específicamente con la educación matemática.

La propuesta del presente proyecto es analizar la potencialidad de las prácticas sociales en la construcción del conocimiento matemático como un factor de vinculación entre la matemática educativa y la democratización (García, 2003). Esta premisa induce la necesidad de establecer los conceptos clave que involucra de manera explícita e implícita, a saber, las prácticas sociales, el conocimiento matemático, la democratización, la educación matemática crítica, sólo por mencionar algunos de ellos.

Desde el punto de vista de nuestra discusión, consideramos a las prácticas sociales como ubicadas en el seno de las comunidades y ubicadas en el tiempo. Estas comunidades desarrollan actividades, herramientas, lenguaje y significados propios, los cuales son aceptados voluntariamente o mediante coerción, y permanecen o se modifican de acuerdo a la propia evolución de la comunidad. Por otra parte, las prácticas sociales actuales de cada comunidad están influidas por el pasado histórico que ha experimentado la sociedad a lo largo del tiempo. Es fundamental entonces, desde el punto de vista del presente proyecto, establecer esas dos dimensiones como parte de la dinámica social.

Particularmente las prácticas sociales que nos interesa analizar, son aquellas que propician o han propiciado el desarrollo del conocimiento matemático en un *sentido amplio*. Este *sentido amplio* trasciende al desarrollo matemático que actualmente se toma como válido en el discurso matemático escolar y da cabida a propuestas emergentes de la matemática educativa. Estas propuestas emergentes incluyen dos puntos de vista que han aportado resultados importantes desde la visión sociológica y antropológica. Primeramente, las aportaciones al respecto realizadas por Lave(1996, 1998), quien ha estudiado cuestiones cognitivas sociales desde comunidades escolares y no escolares. De manera específica la caracterización de la actividad matemática realizada fuera del ambiente escolar que resulta eficiente pero que no es validada por la institución escolar. Por otra parte, las dificultades de los procesos de transferencia de los conocimientos escolares hacia otros contextos. El segundo punto de vista acerca de las prácticas sociales nos remite a los resultados de D'Ambrosio quien ha consolidado los resultados de la etnomatemática la cual establece cuestionamientos directos a la matemática considerada como "oficial" y en consecuencia a los mecanismos de enseñanza institucionales. Este cuestionamiento parte de las actividades que realizan comunidades étnicas, laborales, etc., que se traducen en resoluciones de problemas complejos de forma diferente a las propuestas por la institución. Esto conlleva a cuestionar la forma en que se acerca la matemática a los estudiantes como una imposición de dominio cultural, político y social.

Este contexto ampliado ofrece la posibilidad de analizar los procesos escolares desde el entorno social en el que se desarrollan a la vez que se pueden multiplicar las posibilidades de estudio al incorporar la experiencia de otras comunidades con una ubicación distinta en espacio y tiempo. Es importante citar algunos ejemplos del giro que ofrece el analizar la matemática educativa desde el punto de vista de las prácticas sociales. Para ello discutiremos tres ejemplos, el primero de ellos corresponde al cálculo de áreas, la idea de medir a respondido a diferentes necesidades, una de ellas la ubicamos en la época de los babilonios, en la cual las necesidades comerciales y tributarias implicaban la determinación de superficies irregulares, las equivalencias y el desarrollo de herramientas adecuadas para este caso. Si bien este problema de cuadratura desembocó en el método de exhausión desarrollado por los griegos, retomado en el renacimiento y validado por la comunidad matemática en las sumas de Riemman, la génesis babilonia considera limitantes culturales importantes. Particularmente las herramientas matemáticas desarrolladas por los babilonios correspondían en primer término al conocimiento de las áreas de cuadrados, triángulos y trapecios, en segundo término al registro de áreas en tablillas de arcilla. Estas particularidades históricas fueron suficientes para sobrevivir a las relaciones comerciales y tributarias de la época. El procedimiento seguido por esta comunidad correspondió al seccionamiento de la superficie con estas figuras conocidas, lo cuál, desde nuestro punto de vista proporciona un acercamiento mas familiar al tema de cuadraturas que el ofrecido inclusive por los griegos y ya no digamos la *estructura formal* del discurso escolar actual.

Un segundo ejemplo lo ubicamos en las formas de cálculo con operaciones básicas. En este sentido, podemos citar dos momentos, el primero de ellos corresponde a los huesos de Napier y los quipus Incas como facilitadotes de la multiplicación y el registro numérico respectivamente. Actualmente Ferrari et. al. (2004) realiza un estudio al respecto con estudiantes de niveles básicos de educación obteniendo resultados alentadores. El segundo momento lo ubicamos en las prácticas de agrupación señaladas por Lave y D'Ambrosio. El primero de ellos en adultos al realizar cálculos y el segundo en grupos étnicos y de comerciantes. Cabe señalar al respecto que en el contexto histórico los egipcios ofrecían formas de agrupación, que facilitaban los cálculos, similares a los ejercidos por las comunidades actuales. El tercer ejemplo corresponde a los estudios realizados por Arrieta (2003) en comunidades de ingenieros. Estos estudios han permitido mostrar elementos de las prácticas sociales que ejercen estas comunidades en particular y la forma en que estas pueden influir en el contexto escolar.

El estudio de las prácticas sociales abre un panorama extenso de discusión, sin embargo, es importante centrar la atención en la pregunta central y que sirve de título a este reporte ¿son las prácticas sociales fundamento para la democratización de la matemática? En este sentido entran en juego dos aspectos de similar importancia al que de manera breve hemos presentado: democracia y educación matemática crítica.

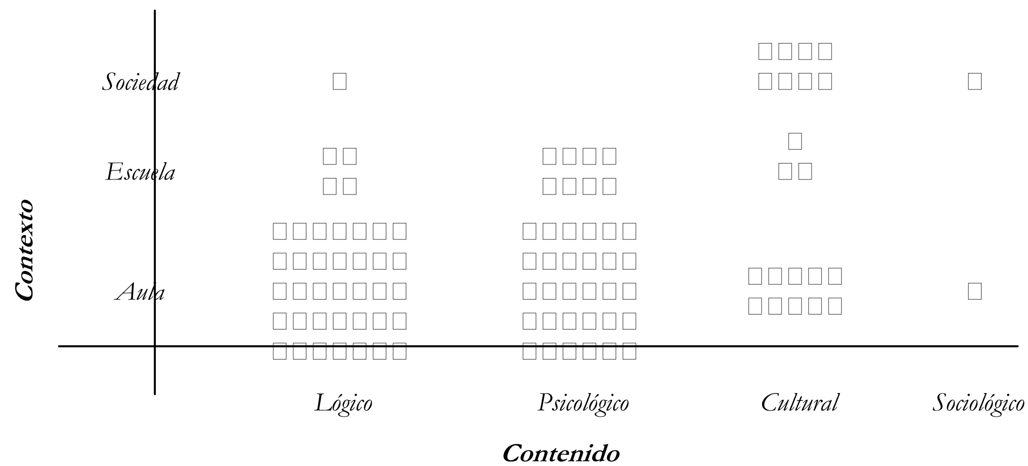
Uno de los elementos clave del proyecto es el concepto de democracia, el cual ha mutado durante el desarrollo de la historia humana. La discusión de esta noción nos remonta a la antigua Grecia, en la cual tenia el sentido del gobierno por el pueblo, sin embargo, el "pueblo" se refería exclusivamente a los ciudadanos quitando este derecho a una parte importante de los habitantes como por ejemplo los esclavos. Palma (1990), por su parte ubica tres momentos cruciales de la evolución de la democracia. Este autor reconoce a la democracia en el sentido de *libertad* manejado en Inglaterra S. XVIII, democracia en el sentido de *igualdad* propuesta por Rosseau y señala que esta visión fue adoptada y adaptada posteriormente en las propuestas Marxistas, la democracia como *la confrontación de las diferencias*, esta última visión maneja los conceptos de diversidad, conflicto y tolerancia. Finalmente señala la democratización como *proceso dinámico y contradictorio*, en la cual entran en juego y de manera compleja el derecho a la libertad, la igualdad y la tolerancia multicultural.

Nuevamente la discusión a este tema es amplia, pero esta modesta síntesis que he tratado de establecer con el debido respeto al trabajo de Palma, nos permite tener bases para observar las tendencias políticas y económicas en las que actualmente América Latina esta inmersa. El ambiente de globalización neoliberal puede llevarnos al absurdo de confundir el sentido de la *democracia* con el funcionamiento de las *pseudomocracias* de nuestro siglo. Sin embargo por el momento no es preciso ahondar en el sentido económico y político aunque es inevitable señalarlo al tocar el tema de la educación.

Es evidente el papel crucial que juega la educación para el desarrollo de países y sociedades, tan es así que en muchos casos se considera un asunto de seguridad nacional, el principio de Mao *el conocimiento es poder*, nunca ha perdido su vigencia. El tema educación y democracia tiene diferentes vértices los cuales es necesario interpretar sistémicamente para profundizar en el entendimiento de sus implicaciones. Citemos por ejemplo a Flecha y la fuerte crítica que realiza al modelo educativo actual tachándolo de darwiniano al señalar que solo ofrece posibilidades selectivas al más apto. Freire por su parte hace una crítica señalando al modelo educativo como una efectiva y poderosa institución imperialista de dominación. Vale la reflexión a este respecto desde nuestra actividad docente y de investigación acerca de diferentes tópicos como son la discriminación, la intolerancia, las dictadura, las actitudes acríticas, la segregación etc., que seguramente se encuentran en nuestro entorno escolar y social y que en ocasiones estamos demasiado acostumbrados a ello y en consecuencia lo pasamos por alto y en muchas de las ocasiones lo promovemos. Nuestros sistemas escolares son reflejo de la sociedad y la sociedad es un reflejo de nuestro funcionamiento escolar. La enseñanza de la matemática no escapa a esta realidad y desempeña diferentes papeles en su dinámica de funcionamiento.

En este orden de ideas la educación matemática crítica ha hecho señalamientos que permitan entender este fenómeno y trata de establecer vínculos que permitan acercar la matemática educativa y la democracia. Los principios de la educación matemática crítica tienen como antecedente filosófico las propuestas, cuestionamientos y fundamentos surgidos en la escuela de Frankfurt. Estos principios han sido llevados al campo de la educación por diversos investigadores teniendo diferentes salidas. Ejemplo de ello son las investigaciones en el campo del discurso en el aula realizados por Young (1993) o los estudios realizados por Kemmis. Sin embrago, en el campo de la matemática educativa los principales resultados han sido desarrollados desde hace varios años en Copenhague por Skovsmose, Nielsen, la colombiana Valero y la sudafricana Vithal quienes han integrado grupos de investigación al respecto desde diferentes vertientes. A continuación señalaré algunos de ellos, los cuales son significativos en el contexto de las prácticas sociales y democracia.

Uno de los cuestionamientos de este grupo de investigación corresponde a las líneas de investigación en matemática educativa que actualmente se realizan en diferentes países. La metodología que utilizaron fue de carácter documental y la realizaron basados en los artículos publicados en las revistas JRME, ESM, RDM, FLM, Suma, IJMEST, las cuales fueron revisadas en sus fascículos publicados durante el período enero-octubre de 2000, obteniendo los datos que aparecen en el siguiente diagrama. Es importante señalar la escasa importancia en las investigaciones de contenido sociológico y cultural y en los contextos escuela sociedad, mientras que existe una privilegiación de las investigaciones en los contextos lógicos y psicológicos en el contexto del aula.



Esta perspectiva considera al estudiante dentro desde una perspectiva social compleja en el que el estudio de la matemática es solamente una parte de ella. De tal manera que destaca el papel crucial que tienen dos momentos en el desempeño actual de un estudiante en la clase de matemáticas: su *bagaje cultural*, particularmente el relacionado con el estudio de la matemática y su *visión a futuro*. Dentro del bagaje cultural del estudiante no solamente se consideran las bases matemáticas adquiridas en el ambiente escolar, sino también aquellas que ha adquirido en sus actividades cotidianas y considerando sin lugar a dudas, los hábitos, costumbres y tradiciones familiares. Por su parte, la visión a futuro considera la forma en que el estudiante se observa en el futuro, las posibilidades laborales, económicas culturales y sociales que considera viables. Estos dos elementos interfieren de diversas formas en el desempeño actual de los estudiantes, y estos tres factores se influyen mutuamente.

Se cuestiona a la educación matemática tradicional ya que esta sigue el paradigma del ejercicio. En contraposición, se propone la integración de escenarios de investigación (Skovsmose, 2000), los cuales contrastan con la idea del aprendizaje por la ejercitación.

	Paradigma de ejercicios	Escenarios de investigación

Referencia a las matemáticas *per se*	(1)	(2)
Referencia a una semi-realidad	(3)	(4)
Referencia a la realidad	(5)	(6)

Algunos ejemplos son los siguientes: para (2), las investigaciones como el reconocimiento de patrones y regularidades. En (4), los problemas con datos inventados, para el caso de (6), alguna discusión sobre un problema de la comunidad que implique la matemática, solo por mencionar algunos ejemplos.

El concepto de ciudadanía es fundamental en esta perspectiva en este sentido la educación matemática se centra en el estudiante como miembro de una sociedad.

Skovsmose (1998) señala cuatro aspectos de vinculación de la educación matemática y la democracia. La arqueología matemática se centra en las funciones sociales de las matemáticas y como identificar las matemáticas en uso. Las competencias matemáticas (matemacy), se refieren a las diferentes clases de competencias matemáticas incluyendo las diferentes formas de reflexión (orientadas a la matemática, orientada a los modelos, orientada a los contextos y las orientadas al mundo real). La interacción deliverativa considera al salón de clases como una microsociedad y se refiere a la naturaleza de los procesos de enseñanza-aprendizaje. Vithal (2003), hace énfasis en el conflicto como una fuente rica de construcción de argumentos y significados en las aulas. Si bien la multiculturalidad establece nuevos retos ante esta situación, el conflicto es intrínseco al ser humano y el analizarlo y establecer las posibilidades de crecimiento mutuo en la dialéctica, permitirá establecer los alcances en el campo del estudio de la matemática.

Al analizar los diferentes aspectos relacionados con las prácticas sociales, la educación matemática crítica y la democracia, observamos un amplio campo de desarrollo de investigación. Parece pertinente considerar las prácticas que son propias de la comunidad, particularmente las relacionadas con la matemática en el sentido amplio, como medios que permitirán consolidar los procesos de una auténtica democratización de nuestro entorno educativo y social. Coincidimos en que el estudio de la matemática tiene un poder formativo que impacta en nuestro medio social, por lo que este proyecto de investigación busca detectar el papel que pueden jugar las prácticas sociales a la contribución en la formación de ciudadanos críticos con capacidad de decisión.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de una matematización en el aula*. Tesis Doctoral, Cinvestav, México.

Ferrari, M., López, R., García, C. (2003). Propuesta didáctica de la función logaritmo fundamentada en la construcción geométrica de Agnesi. *Resumenes de la VII Escuela de Invierno y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*: Universidad Autónoma de Guerrero.

Ferrari M. (2004). *História de la calculadora: quipús Incas y huesos de Napier*. Semana nacional de la Ciencia y la Tecnología. Cetys 116. Acapulco Guerrero.

Flecha R. (2001). Las nuevas desigualdades educativas. *Nuevas perspectivas críticas en educación.* Paidós Educacdor. España.

Freire, P. (2002). *Pedagogía de la Autonomía. Saberes necesarios para la práctica educativa.* México: Siglo veintiuno.

García, C. (2003). ¿Son las prácticas sociales fundamento para la democratización de la matemática?. R*esumenes de la VII Escuela de Invierno y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*: Universidad Autónoma de Guerrero.

García, C. y Pineda A. (2003). Causas del desinterés en los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas. R*esumenes de la VII Escuela de Invierno y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*: Universidad Autónoma de Guerrero.

Lave, J. (1992). La *cognición en la práctica.* España: Paidós.

Lave, J. y Wenger, E. (1998). Situated *Lerning. Legitimate Peripheral Participation*. Cambridge, Inglaterra: University Press.

Palma D. (1990) *Educación y Democracia*, en Osorio (Ed.) Educación de adultos y democracia. Madrid, España. Editorial Popular OIE Quinto Centenario.

Skovsmose, O y Nielsen, L. (1996). *Critical Mathematical Education, en Internacional Handbook of Mathematics Education*. Bishop, A. (Ed.) Part 2, pp. 1257-1288

Skovsmose, O. (1998). *Linking Mathematics Education and Democracy: Citizenship, Mathematical Archaeology, Mathemacy and Deliverative Interaction*. Center for Forskining I Matematiklaerinng, Skriftserie. Copenhagen, Denmark

Skovsmose, O. (2000). Lanscapes of Investigation: uma proposta do investigador Ole Skovsmose. *BOLEMA 14*, pp. 66-91: Universidad de Sao Paulo: Rio Claro Brasil.

Skovsmose, O. y Valero, P. (2002). *Proceedings of the Third Internacional MES Conference.* Copenhagen: Centre for Research in Learning Mathematics.

Yajot, O. y Spirkin, A. (S.F.). *Curso de filosofía Marxista, Materialismo dialéctico y materialismo histórico*. Ediciones Quinto Sol: México, D.F.

Young, R. (S.F.) *Teoría crítica de la educación y discurso en el aula.* Temas de educación. Ministerio de Educación y Ciencias. España: Paidos.

La Construcción Social de la Noción de Variable[1]

Enrique Javier Gómez, Crisólogo Dolores y Gustavo Martínez
CICATA- IPN, CIMATE-UAGRO
México
ejgo@prodigy.net.mx, cdolores@cimateuagro.org, gmartinez@cimateuagro.org
Pensamiento Variacional – Nivel Medio, Superior

Resumen

Este documento centra su atención en la noción de *variable* como elemento básico de la construcción de conceptos relacionados a fenómenos de variación y cambio. Partimos de que la *variable* no es una idea construida como un objeto o proceso aislado, sino que surge necesariamente de la relación de al menos dos entidades cambiantes que en la mayoría de los casos una de ellas es la variable tiempo. Pretendemos realizar el estudio de la *variable* desde diferentes dimensiones: la epistemológica, la cognitiva, la didáctica y la sociocultural, para poder tener elementos que nos permitan determinar qué procesos favorecen la construcción de esta noción y asimismo realizar su caracterización.

Antecedentes

El presente trabajo de investigación se inserta en el campo de la Matemática Educativa, en particular tiene relación con los procesos cognitivos que tienen lugar en la enseñanza y aprendizaje de la matemática de la variación y el cambio.

En el plano histórico, el motor que guió el desarrollo de la matemática de las variables en el siglo XVII fue el problema del movimiento "*La matemática de magnitudes variables constituye el reflejo matemático de un problema fundamental, el problema del movimiento…*" (Wussing, 1990, p. 105). El estudio de problemas de movimiento (caída libre, lanzamiento de un objeto, movimiento de los planetas), el hallazgo y el desarrollo de un cálculo que permitiera el dominio matemático de estos fenómenos, origina el tránsito de la matemática de magnitudes constantes a la matemática de magnitudes variables. El desarrollo de la matemática da un salto cualitativamente superior, pues el movimiento como propiedad esencial de la materia es incorporado a la matemática en forma de variables, trascendiéndose así concepciones estáticas acerca de la naturaleza y del universo (Dolores, 1996, p. 1). Es de esta forma como la variable toma un papel importante en la descripción de fenómenos de variación y cambio.

Los conceptos básicos sobre los cuales está construida la matemática del cambio, son sin duda el concepto de variable y función. Tradicionalmente la variable ha sido presentada como un objeto matemático y la función como una relación especial entre esos objetos. En el siglo XVII, L' Hospital da una definición de variable, *se llaman cantidades variables aquéllas que aumentan o disminuyen continuamente; y por el contrario, cantidades constantes las que permanecen siendo las mismas mientras las otras cambian* (L' Hospital, 1998, p. 27). Nótese que en esta definición la idea constante es concebida en relación con las cantidades que cambian, el autor puede determina que son constantes cuando las compara con las cantidades que cambian: si permanecen siendo las mismas mientras que las otras cambias entonces son constantes. En esta definición queda manifiesta la necesidad de un referente de comparación parar poder determinar si algo cambia o no cambia. Si cambia es menester

[1] Este artículo es producto de las investigaciones auspiciadas por el proyecto: GUE-2002-C0-7626, financiado por el Fondo Mixto CONACYT-Gobierno del Estado de Guerrero, México.

tener en cuenta con respecto. Si no cambia también es necesario tener en cuenta respecto de qué.
De acuerdo con lo que se comparte hoy día en matemáticas la *variable* se concibe como algo que cambia continuamente y las relaciones especiales entre las variables se denominan función. Las relaciones entre las variables se establecen al estudiar fenómenos de variación, las fórmulas son una de las herramientas para operativizar a las variables, ya que éstas nos ayudan a cuantificar los cambios que experimentan. De ahí la importancia del conocimiento de la noción de variable y función como elementos básicos en el estudio de fenómenos de variación y cambio.

Investigaciones acerca de la noción de variable considerando el aspecto cognitivo en el ámbito escolar han sido diversas,. Los alumnos tienen diferentes formas de interpretar los símbolos literales (Kuchemann, 1980), los resultados muestran que los estudiantes no tienen una concepción clara del significado que la literal representa, ello conlleva a la creación de concepciones diferentes a las establecidas, originando obstáculos en la enseñanza y aprendizaje de la matemática de la variación y el cambio. Kuchemann estudia el significado que los alumnos le asocian a la letra en el contexto algebraico, encontrando seis formas de interpretación. De entre ellas destaca *la letra como variable* donde el alumno después de un proceso de trabajo con símbolos algebraicos es capaz de interpretar que la literal x representa un rango de valores y describir el grado con el cual los cambios de un conjunto se determinan por los cambios de otro.

Por otro lado los estudiantes que se inician en el estudio del álgebra tienen dificultades en la interpretación del significado de los símbolos que esta asignatura utiliza y por ende considerar a la x en este contexto como número generalizado (Kieran et al., 1990). Tal es caso del signo igual que en la escuela primaria es usado para anunciar un resultado, en el álgebra debe ocurrir un cambio interpretativo, además de la igualdad expresa el carácter simétrico y transitivo (Ibidem), estas discontinuidades que se presentan del tránsito de la aritmética al álgebra por el uso de una simbología poco usual para el alumno puede originar obstáculos en la enseñanza de esta disciplina.

Estudios exploratorios en ambientes computacionales Logo (Kieran, 1990; Ursini, 1996), demuestran que la necesidad de utilizar símbolos por parte de los estudiantes para generalizar una relación entre cantidades y expresar esa generalización en lenguaje formal en el contexto algebraico, favorece el tránsito de la aritmética al álgebra de manera menos difícil, además de desarrollar la comprensión de la noción de variable.

El estudio de la aplicación del razonamiento covariacional en la modelación de eventos dinámicos en el ámbito escolar (Carlson et al., 2002), señala que los estudiantes tuvieron dificultad en la construcción de imágenes de una razón de cambio continuo, particularmente en la representación e interpretación de una razón creciente y decreciente para una situación física. Por ejemplo en el bosquejote la gráfica del llenado con agua (velocidad constante) de una botella y asociar la variable volumen con la variable altura; esto evidencia en los alumnos la falta de coordinación de dos variables en el estudio de fenómenos físicos.

Por otra parte un estudio exploratorio en el estado de Guerrero sobre las ideas asociadas a la variable con alumnos del nivel medio, medio superior y superior (Vicario, 2002), muestran la escasa presencia de la idea de variable concebida como magnitud, es decir asociada a una representación geométrica (longitud, área, volumen). Se tiene una concepción de variable asociada a las literales y afloran concepciones alternativas en el plano gráfico y conjuntista al plantear situaciones de variación; los estudiantes manifestaron dificultades en la comprensión de la noción de variable en los problemas que se les plantearon.

Los trabajos de investigación analizados sobre la variable son abordados desde diferentes puntos de vista. Kuchemann realiza un estudio cognitivo para determinar el significado que representa una letra para el estudiante. Por su parte Kieran et al y Ursini en un contexto algebraico y computacional, analizan la interpretación del significado de los símbolos que le asocian los alumnos al transitar de la aritmética al álgebra y poder llegar a concebir a x como un número generalizado. Carlson et al en su estudio evidencia las dificultades que tienen los estudiantes en la modelación e interpretación de eventos dinámicos, demostrando la falta de un razonamiento covariacional. En la mayoría de los trabajos de investigación presentados conciben la variable como una literal, un símbolo que después de cierto proceso en situación escolar se le asocia a un número generalizado.

El presente trabajo de investigación pretende abordar el estudio de la noción de *variable* desde un punto de vista relacional. Es decir no concebimos la construcción de la noción de variable como un objeto aislado, independiente, sino que la noción de variable a nuestro juicio emerge de la relación de al menos dos entidades cambiantes que en la mayoría de los casos una de ellas es la variable tiempo.

Planteamiento del problema

Las dificultades manifiestas en los alumnos, sobre la comprensión de la noción de *variable* en la aparición de concepciones relacionadas a esta noción (Kuchemann, 1980; Kieran et al., 1990; Ursini, 1996; Vicario, 2002) distan de las aceptadas en matemáticas, además las deficiencias que se presentan en la representación e interpretación de fenómenos de variación que involucran relaciones entre *variables* (Carlson et al., 2002), ha sido un obstáculo para el entendimiento de conceptos matemáticos, como es el caso de la *variable*.

La función se concibe como una relación especial entre las *variables*. Dichas relaciones pueden producirse al estudiar fenómenos de variación cuando se trata de cuantificarlos y es en este proceso cuando la *variable,* mediante la abstracción adquiere la forma de objeto matemático facilitando su manipulación. Las fórmulas posibilitan la operatividad en la cual queda expresada la relación de al menos dos *variables*, de ahí la importancia del conocimiento de la noción de *variable* como elemento básico de la construcción de conceptos relacionados a los fenómenos de variación y cambio. Por tales razones es necesario caracterizar la noción de *variable*, en principio entender cómo se construye, para posteriormente determinar qué procesos favorecen su construcción en condiciones escolares y así poder contribuir al mejoramiento del proceso enseñanza y aprendizaje de la matemática de la variación y el cambio.

Objetivos de la investigación

Para realizar esta investigación nos proponemos los siguientes objetivos:

1) Identificar los procesos que se ponen en juego en la construcción social de la noción de variable.

2) Caracterizar la construcción social de la noción de variable desde el punto de vista covariacional.

Preguntas de investigación

Para el logro de los anteriores objetivos nos planteamos los siguientes cuestionamientos:

- ¿Cómo construye el sujeto esta noción?
- ¿Cómo se adquiere esta idea en situación escolar?
- ¿Cómo se construye esta noción en el plano social?

Elementos teóricos

La condición natural del hombre como ser social, vivir en sociedad, le permite resolver sus necesidades básicas, compartir intereses comunes comunicando sus formas de pensar y proceder en las actividades que realiza o realizan en grupos sociales, es decir interactuar con sus semejantes, esta forma de compartir experiencias, observando, analizando y comunicando, es una forma de construcción del conocimiento.

La construcción social del conocimiento se produce con la actividad humana y en particular la construcción del conocimiento matemático con la actividad matemática que se realiza en distintas instituciones de la sociedad,

> *"El conocimiento es el producto o cristalización de determinado quehacer humano y queda siempre caracterizado por las actividades de las que surge y por las que permite realizar. Tanto el conocimiento como la actividad matemática son construcciones sociales que se realizan en instituciones (comunidad), siguiendo determinados contratos institucionales"* (Bosch, 2000, p. 1).

En este sentido la actividad matemática es realizada por comunidades de matemáticos encargados de la producción y difusión de este conocimiento, el análisis y la descripción de esta actividad nos proporcionará elementos para caracterizar la construcción social del conocimiento matemático y en particular de la noción de variable.

En la actualidad existen posiciones teóricas que conciben al proceso de construcción del conocimiento desde puntos de vista diferentes, por ejemplo el enfoque constructivista que maneja una posición individualista donde el sujeto se apropia del conocimiento en interacción con el objeto de conocimiento en una situación concreta. Por el otro lado están los enfoques que ponen atención a lo que ocurre en situaciones escolares, dándole importancia a la interacción social "*la construcción del conocimiento no es un proceso individual aislado, sino un proceso social de creación conjunta*" (Arrieta, 2003).

Por otro lado en situación escolar, la ciencia en el aula es construida en interacción entre profesor y alumnos en el discurso escolar,

> "… la ciencia es una construcción social sujeta a ciertos procesos discursivos específicos que incluyen tanto las versiones sobre ciertos temas de organización del discurso. Las maneras de hablar, de argumentar, de analizar, de observar, de

> construir con palabras el resultado de la experiencia, de validar un conocimiento y de establecer una verdad. Así las propias investigaciones son consideradas piezas del discurso textual y argumentativo" (Candela, 1999, p. 32).

La construcción social del conocimiento en situación escolar se produce mediante las interacciones entre profesor y alumnos, experimentando, especulando, compartiendo, confrontando, argumentando, convenciendo, rechazando, validando, debatiendo, negociando, consensando, etc. utilizando el lenguaje como medio de comunicación.

De lo anterior podemos tener una primera aproximación de que la construcción social del conocimiento y en especial el conocimiento matemático es un proceso que realizan los grupos sociales en particular, la comunidad de matemáticos dedicados a la actividad matemática con fines específicos de producción, transformación y difusión de este conocimiento en beneficio de la sociedad.

Hipótesis de la investigación

Consideramos que la variable no es una idea que se construye referida a un objeto o proceso aislado sino que emerge de la relación de al menos dos entidades cambiantes que en la mayoría de los casos esa entidad cambiante es la variable tiempo.

Metodología de la investigación

Los objetivos que se proponen en este proyecto de investigación se pretende sean logrados empleando métodos cualitativos de análisis documental. Para realizar esta investigación será necesario analizar la noción de variable desde diferentes dimensiones: la *epistemológica* que nos permitirá conocer cómo se construyó históricamente esta noción, la *cognitiva* para saber cómo los individuos se apropian de este conocimiento, la *didáctica* nos ayudará a conocer cómo se transfiere y cómo vive la noción de variable en la escuela y la *sociocultural* nos permitirá conocer cómo se comporta esta noción en el plano social. Todo esto nos proporcionará elementos para poder determinar qué procesos favorecen la construcción de esta noción y posteriormente realizar su caracterización. Por lo que en esta investigación se plantea:

- Realizar un análisis de la información documental sobre la construcción social de la noción de variable.
- Considerar los resultados de las investigaciones que se han realizado al respecto.
- Aplicar métodos cuantitativos y cualitativos durante el desarrollo de esta investigación.
- Diseñar y llevar a cabo observaciones y experimentos sobre la construcción de esta noción.

Para lograr la caracterización de la construcción social de la noción de variable será necesario constatar el punto de vista histórico epistemológico de esta noción con la situación escolar, aplicando métodos cuantitativos y cualitativos para recabar información al respecto. Se hará uso de la ingeniería didáctica como método de investigación en el diseño de un conjunto de secuencias de clase, la ingeniería didáctica se caracteriza por ser un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza (Artigue, 1995), posee cuatro fases: análisis preliminar, concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, la experimentación y la fase de análisis a posteriori y evaluación.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las practicas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Disertación doctoral no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (Ed.). (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la Investigación y la Innovación en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bosh, M. (2000). Un punto de vista antropológico: *La evolución de los "instrumentos de representación" en actividad matemática.*. Obtenido en Junio 7, 2005 del sitio web de la Universidad de Granada: http://www.ugr.es/local/seiem/IV_Simposio.htm

Candela, A. (1999). *La ciencia en el aula.* México: Paidós.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe y Larsen, Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. *Journal for Research in Mathematics Education 33*(5), 352-378.

Dolores, C. (1996). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato.* Disertación doctoral no publicada, ISP "Enrique José Varona", Cuba.

Kieran, C., Booker, G., Filloy, E., Vergnaud, G. y Wheeler, D. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition* (pp. 96-112). Cambridge, E.U.A: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Kuchemann, D. (1980). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school 7*(4), 23-26.

L'Hospital. (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas.* México: Mathema.

Ursini, S. (1996). Experiencias pre-algebraicas. *Educación Matemática 8*(2), 33-40.

Vicario, M. (2002). *Un estudio sobre la noción de variable en estudiantes de nivel medio y superior.* Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Wussing, H. (1990). Conferencia 7. Las ciencias naturales, especialmente la matemática, en la época de tránsito del feudalismo al capitalismo, segunda parte. *Conferencias sobre historia de la matemática.* La Habana: Pueblo y Educación.

Contrastes Epistemológicos del Binomio de Newton y la Serie de Taylor en Dos Variables en los Fenómenos Físicos

Hipólito Hernández
CIMATE - Universidad Autónoma de Chiapas
México
polito_hernandez@hotmail.com
Epistemología – Nivel Superior

Resumen

En esta investigación presentamos elementos de análisis a través de los contrastes epistemológicos desde diferentes planos, para lo cual revisamos textos vigentes de álgebra, cálculo, física, textos de difusión de antaño, revisión del origen del binomio de Newton y la serie de Taylor. En estos contrastes observamos que los contenidos y los fenómenos físicos están descontextualizados de las prácticas sociales. También, permite ver que la noción de variación y de predicción, en tanto a práctica social, actúa como eje central en la reconstrucción del cálculo y física escolar.

Introducción

En este trabajo se revisaron textos de álgebra, cálculo, métodos numéricos y textos de física, con la finalidad de ver cómo están estructurados en cuanto al binomio de Newton, la serie de Taylor, las diferencias finitas y los fenómenos físicos. También se revisaron textos de antaño de difusión del cálculo, por ejemplo el de Lacroix (1797) y Díaz Covarrubias, (citado en Camacho, 2002), así como el origen del binomio de Newton y la serie de Taylor desde un punto de vista de las prácticas sociales que emergen de estos saberes matemáticos. Partimos de estas revisiones para hacer contrastes epistemológicos en los diferentes planos: epistemología del origen del binomio de Newton y la serie de Taylor contra la epistemología de Cauchy, textos de difusión de antaño contra los textos vigentes, textos vigentes contra el origen del binomio de Newton y la serie de Taylor, textos de difusión de antaño contra el origen del binomio y la serie de Taylor, todo lo anterior, es con el objetivo de relacionar el conocimiento matemático y la práctica social en tanto unidad de análisis. Estos resultados nos arrojan elementos de análisis para hacer una reconstrucción del cálculo y física escolar.

Problemática

En el discurso matemático actual en la enseñanza de la matemática, física y ciencias de la ingeniería que forman parte del plan de estudios de la carrera de ingeniería civil, los contenidos matemáticos en estas disciplina son abordados con métodos analíticos del cálculo de una o de dos variables a través del concepto de límite, es decir con un acercamiento de Cauchy. En los cursos, y textos de álgebra o cálculo, el binomio de Newton es expresado de la forma $(a+b)^n$ y utilizado sólo en un ambiente algorítmico sin considerar su origen y su contexto social. En el discurso de física, el binomio de Newton es sólo utilizado como una herramienta de aproximación, cuando es desarrollado como una serie de potencias fraccionarias o negativas de algún fenómeno físico, por ejemplo: $(1+z)^n \approx 1+nz$, así mismo la serie de Taylor y las diferencias finitas (Zill, 1993; Aleksandrov y Kolmogorov, 1976) son transposiciones de dos saberes matemáticos (Chevallard, 1997) que están desvinculados entre uno y otro, así como del contexto físico, es decir, no existe una integración de estos contenidos matemáticos en los planes de estudios vigentes y en los textos actuales que a la vez son recomendados en la matemática escolar vigente. En los textos escolares de física e ingeniería (Benson, 1999) consultadas en nuestro medio, eventualmente aparecen en forma implícita ideas estrechamente vinculadas a las nociones de la serie de Taylor, por ejemplo: $f(x+\Delta x)$ para funciones de una variable independiente, o bien $f(x+\Delta x, t+\Delta t)$ para funciones de dos variables independientes, aunque no aparece en forma explícita la noción de variación y de predicción en los fenómenos físicos. En el contexto anterior hemos abordado la pregunta de investigación siguiente ¿Qué prácticas sociales emergen en la transición del binomio de Newton y la serie de Taylor? tanto de una variable como de dos variables. El discurso de la matemática escolar vigente en las disciplinas mencionadas parece inhibir las ideas de variación y predicción de los estudiantes, puesto que el cálculo escolar es visto como una estructura formal que antecede al análisis (Cantoral, 2001).

Marco teórico

En la figura 1, se muestra en forma esquemática como visualizar las relaciones de las dimensiones que conforman una aproximación socioepistemológica a la matemática educativa: la dimensión epistemológica, la dimensión cognitiva, la dimensión didáctica y la dimensión social, cada dimensión tiene su propia teoría en cuanto a su marco teórico, pero tienen características comunes entre ellos al interactuar en los procesos didácticos a partir de la actividad humana (prácticas sociales) que realizan conjuntamente profesor - alumno en el aula y fuera de ella. En la investigación de Buendía y Cordero (2002) hacen énfasis que no sólo los aspectos cognitivos están en juego en la construcción de objeto matemático sino en la práctica social que conduce a la adquisición del conocimiento, donde el propósito de la matemática educativa es la de esclarecer y evidenciar la existencia de relaciones entre el conocimiento y prácticas sociales, es decir, enfatizar la componente social sistemáticamente con otras dimensiones: epistemológica, cognitiva, didáctica del conocimiento matemático. La aproximación socioepistemológica, es el resultado de la conjunción de estas dimensiones, como marco teórico, en particular en este trabajo, se busca los contrastes epistemológicos del binomio de Newton y la serie de Taylor con la finalidad de relacionar el conocimiento matemático y las prácticas sociales en tanto unidad de análisis.

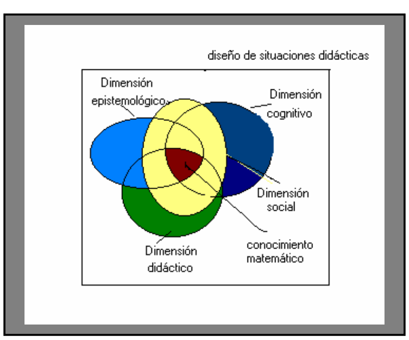


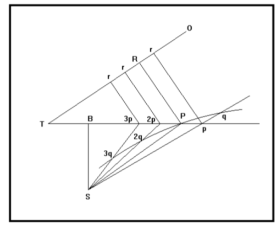
Figura 1. Relación entre las componentes de la aproximación socioepistemológica

Epistemología del origen del binomio de Newton y la serie de Taylor

En el estudio de Hernández (2003) del movimiento bajo la óptica de los marcos epistémicos de Aristóteles, Galileo y Newton, se observa que: en el marco epistémico de Aristóteles deja entre ver que está inmersa la noción de variación, en las descripciones cualitativas que en esa época se cuestionaban en las causas reales del movimiento. En el marco epistémico de Galileo establece su primera relación funcional en la cual aparece la noción de variación, predicción y cuantificación, puesto que al pasar de un estado de movimiento a otro, existe una variación de la variable independiente y de la variable dependiente (tanto discretas como continuas), de la misma manera al establecer una relación de distancia-tiempo, en esta transición entre la variable independiente y dependiente emerge la noción de variación cuando el movimiento es con velocidad constante, pero también proporciona la base de la noción de *variación de la variación* al pasar de un estado de movimiento a otro con velocidad variable, en esta parte aparece el germen de la serie de Taylor pero no de forma muy clara, posteriormente con el marco epistémico de Newton se vislumbra mucho más las nociones de: variación, predicción, cuantificación del movimiento, puesto que se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidas las condiciones iniciales (Muñoz, 2000; Piaget y García, 1994). En la investigación de Cantoral, (2001) dice que el proceso de cambio en la naturaleza se registra en la variación de las variables, precisa el reconocimiento del praediciere en los procesos de predicción de corto y largo alcance, se sustenta en otro mecanismo de funcionamiento en la construcción de conocimiento: el movimiento general y los fenómenos de flujo en particular poseen herencia, con esto queremos decir que el estado ulterior $P + PQ$ del fenómeno de variación depende completamente de las circunstancias que caracterizan al estado de facto *P*, la evolución de un sistema está completamente determinado por sus variaciones primeras. Esta conexión entre estados precisa como sustento primario el reconocimiento de "el praediciere" asociada con la variación y cambio en la naturaleza. En el caso del movimiento de un fluido, P es el estado inicial del fluente continuo, en la cual queremos predecir el estado $P + PQ$ del fenómeno, entonces: $P \to P + PQ$, donde PQ es la variación de la variable independiente, con esta idea y en la necesidad social de predecir, conocer, adelantar, Newton descubrió el binomio que hoy en día lleva su nombre y fue dado como: $(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + etc$ (1)

Según Edward (1937), Taylor publica su serie, basado en el *argumento de interpolación* de Gregory–Taylor y usando las diferencias finitas se llego a; $y = y_0 + n\Delta y_0 + n(n-1)/2\Delta^2 y_0 + n(n-1)(n-2)/6\Delta^3 y_0 + \ldots + n\Delta^{n-1} y_0 + \Delta^n y_0$. En esencia, Taylor quiso tomar el límite como $\Delta x \to 0, cuando, n \to \infty$ y x es fija, para construir $y = y_0 + (x - x_0)\dot{y}_0/\dot{x}_0 + (x-x_0)^2 \ddot{y}_0/2(\dot{x})^2 + (x-x_0)^3 \ddot{y}_0/6(\dot{x})^2 + \ldots$. Esta fórmula es la serie de Taylor original e interpreta la razón de fluctuación como derivada. En síntesis el binomio de Newton y la serie de Taylor son vistas como instrumento de predicción en un contexto de variación.

En seguida presentamos un ejemplo, que consiste en la determinación de las trayectorias de los cometas, Newton (1728) dice que una vez resuelto este problema tendrá por fin, un método para determinar exactamente las trayectorias de los cometas. Mediante la regla de la falsa posición puede saberse por fin, si los cometas completan la órbita en tiempos dados y en qué períodos de tiempo se completan las revoluciones de cada uno. Para aplicar el método se antepone el lema:



Dadas en posición, dos rectas OR, TP, cortarlas con una tercera RP formando el ángulo recto TRP, de tal modo que si la recta SP se traza hasta un punto dado S, venga dado el sólido contenido por dicha recta SP y el cuadrado de la recta OR terminada en un punto dado O.
La elección de la suma o la resta se discierne de la observación del esquema. Si por casualidad fuese necesaria una ulterior corrección, repítase la operación. Aritméticamente así: Supongamos el esquema hecho, y sea la línea *TP* hallada gráficamente de la longitud correcta de las *OR*, *BP* y *SP* serán:

$\sqrt{SP + 2BPe + ee} = SP + \frac{BP}{SP}e + \frac{SB^2}{2SP^2}ee,....,etc$. En este método está presente la noción de predicción y variación, además se observa que están implícitos los términos del binomio y la serie infinita de Taylor en el desarrollo de la raíz cuadrada.

Epistemología de Cauchy

En la enseñanza del cálculo escolar vigente subyace una epistemología de Cauchy, fundamentado en las definiciones de función, de continuidad, de límite, así como el estudio de las series infinitas donde fija claramente la convergencia, es decir, anclado en su teoría de las funciones analíticas que dieron pie al análisis matemático. En particular la integral de Cauchy (Cordero,1994) dice que bajo la concepción de las funciones y continuidad las cuales determinan el contexto de la integral, y la estrategia, que relaciona la definición de la integral con la concepción primitiva, consistió en mirar el dominio de la función, específicamente las cantidades variables, de las cuales establece una correspondencia entre ellas. En esta epistemología Muñoz (2003) comenta que el concepto de integral se reduce a la definición de integral de Cauchy en tanto objeto de enseñanza y al estudiante se asocia como sujeto cognoscente se le obliga a interactuar con la definición en tanto objeto de conocimiento. Lo cual muestra que ésta epistemología no esta centrada en la predicción.

Epistemología de los textos de difusión del cálculo de antaño

En la obra de difusión de Lacroix, (1797) aparece la serie de Taylor para funciones de una variable y la serie con y fija, $f(x+h,y) = f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}h + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\frac{h^2}{2!} + etc.$ análogamente para x fija se tiene otra serie. Por lo tanto, la serie de Taylor para dos variables queda como: $f(x+h,y) = \sum_{k=0}^{n}\left[h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial x}\right]^k f(x,y) + etc.$

Estas ecuaciones están anclados a una epistemología parecida a la Lagrangiana, que consiste en la noción de variación y la creencia de que toda función se puede expresar como una serie de potencia.

En la obra de difusión de Díaz Covarrubías (citado en Camacho, 2002) en la enseñanza del cálculo se centró en los fenómenos físicos y en la definición de variables en donde la noción de cantidad adquiere toda su esencia, consideró como cantidades susceptibles de adquirir diversos valores. Con esta definición inició la construcción del cálculo infinitesimal en México. En la práctica, la validez del programa de Díaz Covarrubias, solo es posible si se analizan separadamente cada uno de los términos que integran la serie: $f(x+h) = f(x) + \frac{dy}{dx}h + Bh^2 + Ch^3 + ...etc.$ donde prescinde, en caso necesario de las potencias mayores de uno de los valores de h, no para evanecerles o aplicarles un límite, sino por su inutilidad práctica dentro del problema real o físico. En el análisis que hace del concepto de límite se reafirma su resistencia al mismo.

Epistemología de los textos vigente: álgebra, cálculo, física e ingeniería

En los textos escolares actuales de álgebra elemental, Baldor (1988), Klinger (1978) tratan al binomio desde potencia 2 hasta de *n* potencia entero positivo y es dado como: $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + ...b^n$ (2)

Debe notarse que el desarrollo de un binomio con potencia negativo o fraccionario no tiene último término, puesto que el coeficiente nunca es igual a cero. "El desarrollo del binomio de (*a* + *b*) para exponentes fraccionarios o negativos, es válido únicamente si el valor de *b* está entre el de *a* y el de –*a*", esto es, $b < |a|$. En los textos de cálculo con un enfoque más al análisis matemático como Kuratowski (1985), el binomio de Newton es expresado a través de la misma ecuación (2). Tanto en los textos de álgebra elemental, superior y los de cálculo no aparece la noción variación y de predicción.

Por otra parte en el texto de física universitaria Benson (1999), las dos caras de la placa de aire, que originalmente estaban en presiones x y $x + dx$, se desplazan a $x + s(x,t)$ y $(x + dx) + s(x + dx, t)$. En este problema está presente implícitamente la noción de variación y la predicción asociada al uso de una serie infinita.

Contrastes epistemológicos

1. En el contraste de la Epistemología de Newton y la epistemología de Cauchy, podemos decir, que la epistemología de Newton se basa en las prácticas sociales de ese momento, en este caso: predecir, adelantar y modelar, un fenómeno natural, en la metáfora del flujo de agua, mientras que la epistemología de Cauchy se basa en el análisis del límite, continuidad y convergencia de funciones y centrado en el dominio de la función en la cual es inherente la fundamentación del cálculo (Análisis Matemático).

2. Epistemología de textos de difusión de antaño contra la epistemología de los originales de Newton y la serie de Taylor. En algunas obras de matemáticas (texto de cálculo) como por ejemplo: La obra de Lacroix, la obra de Díaz Covarrubias continuaron durante algunos años con el acercamiento de Lagrange en donde que toda función era posible desarrollarse en serie de potencias, en donde muestra la construcción de la serie de Taylor en una y en dos variables anclado a la noción de variación pero difiere en la centración de la noción de predicción. Es por esto, que debemos de explorar la epistemología del acercamiento Lagrangiano, puesto que

se localiza un robusto cuerpo conceptual que podría dar pie a nuevos acercamientos didácticos y que pueden estar inmersos en los estudiantes en una situación escolar.
3. Epistemología de textos de difusión de antaños contra la epistemología de textos vigentes. Del apartado anterior observamos que el discurso escolar de los textos de difusión de antaños es en base al acercamiento Lagrangiano, centrado en los fenómenos físicos, esta epistemología es diferente con los textos vigentes de cálculo en la cual esta basado con un acercamiento de Cauchy, en donde privilegian el análisis con una mirada en el dominio de las funciones, y el estudio de las series infinitas centradas en la convergencia.
4. Epistemología de los textos vigentes de matemáticas contra la epistemología de los originales. El binomio escrito por primera vez en Newton como en la ecuación (1) y el binomio que aparece en los textos dado como en la ecuación (2) son equivalentes pero conceptualmente distintos, puesto que la epistemología que Newton usó es diferente a la que hoy enseñamos, en esa época obedeció a un programa emergente, como alternativo al campo de la ciencia, en ello buscaba modelar, anticipar, predecir fenómenos naturales con la matematización con base en la metáfora del flujo del agua. En los textos actuales de álgebra elemental y superior así como de cálculo el binomio de Newton está expresado como la ecuación (2) en donde la discusión gira en torno a los coeficientes binomiales, es decir, no aparece ni implícitamente la noción de predicción, ni de variación. En los textos actuales de cálculo, la serie de Taylor está basada en un discurso escolar apoyado en una epistemología de Cauchy, es decir, el Cálculo a través del concepto de límite donde el eje de la discusión es la convergencia de la serie. En los textos de física y de ingeniería aparecen eventualmente ideas vinculadas a las nociones de predicción y de variación de una forma implícita. Sin embargo hemos puesto en evidencia que la serie de Taylor funciona como un instrumento de predicción y no como un objeto de convergencia.
El análisis anterior nos está proporcionando referentes importantes, centrados en la noción de predicción en tanto a practica social, con el fin de rediseñar el cálculo en las instituciones escolares, el cual es el objetivo fundamental de la socioepistemología.

Referencias Bibliográficas

Alksandrov A., Kolmogorov A. y Laurentiev M. (1976). La matemática: su contenido, método y significado. México: Alianza Editorial.

Baldor, A. (1988). *Álgebra*. México: Publicaciones Culturales.

Benson, H. (1999). *Física Universitaria*. Vol. 1. México: CECSA

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. España: Alianza Editorial.

Bronshtein, I. y Semendiaev, K. (1977). *Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes*. Moscú: Mir.

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Camacho, A. (2002). Difusión de conocimientos matemáticos a los colegios mexicanos del sigloXIX. De la noción de cantidad al concepto de límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 5(1), 5-26.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Aique.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados (un estudio del discurso matemático escolar)*. Tesis de Doctorado en matemática educativa. Cinvestav, México, D.F.

Edward, C.H. (1979). *The historical development of the calculus*. USA: Spriger-Verlag.

Hernández, H. (2002). Una epistemología de la matemátización del movimiento: caso de predicción y variación con las diferencias finitas y la serie de Taylor. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* 17(2), 594-600. Cuba.

Klinger, F. (1979). *¿El álgebra? ¡Pero si es bien fácil!* México: Marcombo.

Kuratowski, K (1975). *Introducción al cálculo*. México: Limusa.

Lacoix, S.F. (1797). *Tratés Du Calcul Différentiel Du Calul Intégral*. Francia.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 3(2), 131-170.

Muñoz, G. (2003). Génesis didáctica del cálculo integral: el caso de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 17(2), 415-421. Cuba.

Newton, I. (1728). *Sistema del Mundo*. México: Ediciones Sarpe, colección los grandes pensadores.

Piaget, J. & García, R. (1996). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: Siglo XXI.

Zill, D. (1993). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*. México: Iberoamérica.

Los Logaritmos a Partir de la Covariación de Sucesiones

Marisol Hernández y Marcela Ferrari
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
México
mhs021084@yahoo.com.mx
Socioepistemología – Nivel Medio

Resumen

En este artículo se presenta una propuesta para la introducción al tema de los logaritmos; dicha propuesta se presenta con una secuencia la cual es realizada bajo el marco de la socioepistemología (Cantoral, 2004) y la metodología de la ingeniería didáctica (Artigue, 1995; Douady, 1995). En esta secuencia se trabajan sólo dos propiedades de los logaritmos, las cuales se abordan con cinco actividades.

Aquí se pretende dar parte del análisis preliminar que se hizo, para poder diseñar la secuencia matemática, junto con el análisis a priori y los resultados de algunas exploraciones que se han llevado a cabo. Dentro de la descripción del análisis preliminar se quiso recalcar el problema que se detectó al abordar el tema de los logaritmos y por el cual se da esta propuesta.

Nuestra propuesta surge a partir de un problema que se observó en la enseñanza de los logaritmos y sus propiedades; esto se ha visto en textos de matemáticas, nivel bachillerato, en los cuales dan una definición "es el exponente al que hay que elevar un número llamado base para encontrar un número". Luego de dar la definición, se dan algunos ejemplos de notación y se les dan las propiedades enunciadas como teoremas; los cuales se demuestran utilizando la definición y las leyes de los exponentes. Una vez demostrados los teoremas, se les dan una serie de ejercicios en los cuales sólo se tiene que sustituir un valor para encontrar el valor pedido. En general el alumno es sometido a una algoritmia que inhibe dotarlo de significado. En esta propuesta pretendemos que, con la realización de la secuencia, construya la idea de lo que son los logaritmos y dos de sus propiedades; sin embargo esta secuencia sólo se diseña para la introducción a dicho tema.

Una parte muy importante de esta propuesta es el uso de la covariación, ya que para nosotros, la relación entre una sucesión (progresión) geométrica y una aritmética permite hablar de logaritmos, y esta relación es precisamente la covariación (Ferrari, 2004).

Estas ideas están sustentadas en los trabajos de Napier (1616) y de Briggs (1620), entre otros, ya que ellos fueron unos de los primeros en relacionar dichas progresiones; Napier decía que la relación entre cualquier progresión geométrica con una aritmética formaba un sistema logarítmico.

Por su parte Briggs trabajó y criticó las ideas de Napier, ya que construyó ejemplos de relaciones entre progresiones geométricas y aritméticas las cuales no facilitaban los cálculos, por ejemplo:

	A	B	C	D
1	1	5	5	35
2	2	6	8	32
4	3	7	11	29
8	4	8	14	26
16	5	9	17	23
32	6	10	20	20
64	7	11	23	17
128	8	12	26	14
numeri proportion-ales.	Logar.	Logar.	Logar.	Logar.

Sin embargo, Briggs también hizo un gran aporte al proponer utilizar la base 10 y el par 1,0. (Figura 1)

A	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*
1	0	0000	1	0	000000	1	0	00000000
10	1	1000	3	1	047712	2	1	03010299
100	2	2000	9	2	095424	4	2	06020599
1000	3	3000	27	3	143136	8	3	09030899
10000	4	4000	81	4	190848	16	4	12041199
100000	5	5000	243	5	238561	32	5	15051499
1000000	6	6000	729	6	286272	64	6	18061799

Figura 1

Material que se usa para la secuencia

Para la presentación de la secuencia se utilizan una especie de fichas de dominó en las cuales se observa, en la parte superior, una progresión geométrica y en la inferior una aritmética (como se muestra en la figura 2); esto es con el fin de que relacionen las dos progresiones y no las tomen como cosas separadas y además que se lleven una idea de que son pares ordenados de la función logaritmo.

…	1/2	1	2	4	8	16	…
	-1	0	1	2	3	4	

Figura 2

Fases de la secuencia y análisis a priori

Como ya se mencionó nuestra propuesta se presenta con una secuencia que a su vez está divida en tres partes

- Observar las progresiones
- Observar las propiedades
- Usar las propiedades

La primera parte de la secuencia se aborda con tres actividades, en las cuales precisamente el objetivo es que observen cuales son las progresiones que contiene nuestras fichas, es decir que encuentren el patrón de dichas fichas y las puedan relacionar.

En la actividad 1, se les dan las fichas que en la parte inferior contiene los números del 1 al 6, pero se les dan desordenadas y lo que se les pide que hagan es precisamente que las ordenen como ellos crean conveniente, también se les pide que den una explicación de su forma de ordenarlas.

Lo que pretendemos es que las ordenen de manera ascendente (como la figura 2), para que así puedan reconocer el patrón de las fichas. Sin embargo se cree que los estudiantes tratarán de encontrar diferentes formas para ordenar las fichas; alguna forma podría ser como fichas de dominó o buscando la manera de que los números coincidan sumándolos o restándolos.

En la segunda actividad se les dan seis fichas en blanco, esto es porque se les pide que extiendan la serie de fichas de la primera actividad, es decir, que las fichas que ellos construyan continúen la secuencia de las fichas que ya tienen, tanto para la izquierda como para la derecha. Esta actividad implica el uso de números negativos y fracciones, por lo tanto se cree que habrá dificultades para extender la serie hacia la izquierda; sin embargo si en la actividad uno, observaron bien las dos progresiones, no habrá gran dificultad para extender la serie hacia la derecha.

La tercera actividad es muy similar a la segunda, sin embargo aquí se les presenta una pequeña confusión, es decir, de la serie que ya tienen se toman algunas fichas y se les presentan salteadas y ordenadas, junto con seis fichas en blanco, esto es para que extiendan la serie con fichas salteadas; aquí tendrían que observar un nuevo patrón para continuar la secuencia de las fichas, es decir, tendrán que observar los números por los cuales se multiplica y se suma, respectivamente.

Las actividades dos y tres, son para reforzar las ideas de la actividad uno, en fin, las tres actividades son para reconocer bien las dos progresiones, aun cuando tengan las fichas salteadas, para poder realizar bien las demás actividades.

La segunda parte de la secuencia, la cual es de observar las propiedades, se aborda con la actividad cuatro que a su vez se divide en dos partes, en las cuales se trabajan las propiedades del producto y del cociente. Para llevarla a cabo se les dan tercias de fichas (como se observa en la figura 3), en las cuales una está en blanco y se les pide que la construyan. Para esto se les dice que sólo tienen que multiplicar los números de la parte superior y tienen que buscar, en el conjunto de fichas que tienen de las actividades anteriores, la ficha que corresponde y así comenzarán a percibir la relación entre multiplicar y sumar.

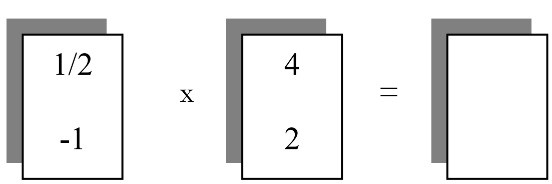


Figura 3

Como ya se dijo esta actividad se divide en dos partes, en la primera se trabaja la propiedad del logaritmo del producto y en la segunda se trabaja la propiedad del logaritmo del cociente; estas partes a su vez se dividen en tres incisos cada una.

En un primer inciso de esta actividad, se les dan tres tercias con números pequeños, junto con fracciones y números negativos, para que las fichas que tengan que construir las puedan encontrar en el conjunto de fichas que ya tienen y puedan observar lo que ocurre con la parte inferior de las fichas. También es para que ellos mismos verifiquen sus resultados de las actividades anteriores, es decir, si se equivocaron al extender la serie a la izquierda, en esta parte podrían darse cuenta de su error, sin que la persona encargada de la secuencia los corrija.

En el segundo inciso se les hace una pregunta directa, la cual es para ver si observaron lo que ocurre con los números inferiores de las fichas.

En el tercer inciso se ponen otras tres tercias de fichas pero ahora con números más grandes, esto para que descubran que es más fácil sumar abajo, buscar la ficha correspondiente, y encontrar el número superior sin tener que multiplicar. De manera análoga se trabaja la propiedad del logaritmo del cociente.

En esta parte de la secuencia no se cree que haya grandes dificultades, ya que se tiene el conjunto de fichas como ayuda para resolver con facilidad esta actividad.

En fin con esta actividad se pretende que el alumno construya algunas ideas de las propiedades y de cómo con ellas se pueden facilitar los cálculos.

Para hallar la solución de la tercera parte de la secuencia, uso de las propiedades, se tiene que hacer uso de las otras dos partes de la secuencia, esta se aborda con una actividad que a su vez se divide en dos incisos. En el primero de ellos se les dan otro conjunto de fichas, el cual nos muestra algunos pares de la función logaritmo en base tres, dicho conjunto contiene las fichas con los números inferiores del 0 al 5, excepto la ficha 3,1, la cual precisamente ellos tienen que construir.

Para poder resolver este inciso tendrían que hacer uso de la primera parte de la secuencia, es decir, tendrían que ordenar e identificar el patrón de las progresiones, para así hallar la ficha pedida.

En este primer inciso no se cree que haya gran dificultad para saber que la ficha que falta es la 3,1.

En el segundo inciso se les da una ficha, la cual sólo tiene el número inferior (como muestra la figura 4) y lo que tienen que hacer es encontrar el número superior correspondiente.

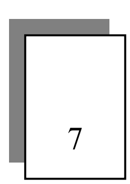


Figura 4

Para esto tendrían que hacer uso de la segunda parte de la secuencia, es decir, hacer uso de alguna de las propiedades para así poder encontrar el número buscado.

Para este caso la ficha se podría construir de dos maneras diferentes, es decir, con las fichas de los números inferiores 5 y 2 ó 4 y 3, sumar estos números y multiplicar los números superiores correspondientes, sin tener que hacer una multiplicación reiterada. Sin embargo se cree que existe la posibilidad que resuelvan este inciso de esa manera.

Como se dijo, en esta última parte se conjuntan las dos primeras partes de la secuencia, entonces esta parte es para reforzar las ideas construidas anteriormente.

Resultados de algunas exploraciones

En esta parte se darán los resultados relevantes de algunas exploraciones que se han llevado a cabo.

Una primera exploración se hizo con alumnos de quinto semestre de la Licenciatura en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero.

Se aplicó a un equipo de tres personas, esto se hizo con la finalidad de ver si se entendían los enunciados y ver cómo funcionaba un primer diseño de la secuencia (el cual no es el descrito en el apartado anterior). Como la secuencia que se les aplico no es la que se esta trabajando, sólo se podría rescatar la primera actividad.

En dicha exploración con este equipo, nos sorprendió mucho que en la primera actividad hubo mucha más discusión que la que habíamos imaginado, ya que buscaron diferentes formas para ordenar las fichas; buscaron una forma de tal manera que los números coincidieran, y también trataron de encontrar una forma de sumar o restar algo para encontrar el número siguiente.

La segunda exploración se hizo con alumnos de la maestría de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, esta exploración se hizo ya con el diseño descrito en el apartado anterior y fue con la finalidad de que ellos como profesores criticaran la secuencia, sobre todo para que vieran los enunciados y dar su opinión sobre si los alumnos de bachillerato (para los cuales va dirigida la secuencia) podrían entenderlos.

Con el fin de que conocieran la secuencia a fondo, se les pidió que la resolvieran y después dar sus sugerencias, comentarios, etc.

En la realización de la secuencia no hubo dificultades; en cuanto a las críticas, sólo surgió una, esta fue referente a la actividad cuatro, ya que dijeron que se repetía un inciso (el uno con el tres), pero se les explico que era para reforzar las ideas anteriores.

Por otra parte, sobre la claridad de los enunciados de las actividades, opinaron que no había problema.

La última exploración se realizó con alumnos del bachillerato y a continuación se darán algunos resultados interesantes.

En la primera actividad, para ordenar las fichas, se basaron en la progresión aritmética y después de ordenarlas en forma ascendente, querían descubrir lo que ocurría con los números de la parte superior de las fichas, lo cual generó una discusión, pero llegaron a un acuerdo, es decir, que se tenia que multiplicar por dos para encontrar el número siguiente.

En la actividad dos, tuvieron un poco de dificultades para extender la serie hacia la izquierda, sin embargo recordaron como era el patrón de las progresiones y empezaron a buscar los números que lo cumplían.

Al llegar a la actividad cuatro, verificaron sus resultados, es decir, vieron la ficha que contenía el ½ y el -1 y descubrieron que habían extendido bien la serie hacia la izquierda. También esta actividad la resolvieron sin dificultades y al llegar a la pregunta de lo que pasaba con los números inferiores, no dudaron y dijeron que se sumaban; por consiguiente, resolvieron fácilmente el tercer inciso.

En la actividad cinco, en el primer inciso ordenaron sin dificultad y pudieron descubrir cual era la ficha que faltaba. En cambio en el segundo inciso encontraron el número faltante con una multiplicación reiterada y no hicieron uso de la propiedad del logaritmo del producto.

Cabe recalcar que estos alumnos eran del primer semestre de bachillerato y no conocían el tema de logaritmos, sin embargo pudieron resolver la secuencia con los elementos con que ellos contaban.

Referencias Bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Baldor, A. (1984). *Álgebra.*. México: Publicaciones Cultural.

Briggs, H. (1620). *Aritmética Logarítmica* (I. Bruce, Trad.). Obtenido en marzo 2004, del sitio web http:/ /www.history.mas.st-andrews.ac.uk/Miscellaneous/Briggs/index.html

Caballero, A., Martínez, L. y Bernardez, J. (1971). *Matemáticas tercer curso*. México: Esfinge.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemlógica. En L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. (Vol. 17, Tomo I, pp. 1-9). México.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ferrari, M. (2004). La covariación como elemento de resignificación de la función logaritmo. En L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. (Vol. 17, Tomo I, pp. 45-50). México.

Napier, J. (1616). *A description of the admirable table of logarithms*. Londres, Inglaterra: Nicholas Okes.

Lehman, C. (2001). *Álgebra*. México: Limusa.

Las Prácticas Sociales de Modelación y la Emergencia de lo Exponencial

Miguel Ángel Hernández y Jaime Arrieta
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
México
mahernando@hotmail.com
Socioepistemología – Nivel Medio, Superior

Resumen

El presente trabajo se inserta en la línea de investigación que intenta explicar las relaciones entre las prácticas sociales y la construcción social del conocimiento. Sostenemos que es en el ejercicio de las prácticas sociales donde los actores construyen herramientas que han de constituirse en su conocimiento y éstas a su vez modifican las prácticas. En este trabajo hemos elegido a las prácticas sociales de modelación y su relación con la construcción de lo exponencial como herramienta. Modelando el enfriamiento del silicón los actores construyen modelos y con ellos realizan predicciones, articulando los diferentes modelos con el fenómeno. Se hace énfasis en el análisis epistemológico y como es que lo exponencial se construye al ejercer la modelación.

Introducción

El presente trabajo de investigación se inserta en la línea que trata la relación entre las prácticas sociales y la construcción de los conocimientos. Planteamos como tesis central que es en el ejercicio de algunas prácticas sociales donde las matemáticas surgen como herramientas. En este trabajo, las prácticas sociales a considerar son las de modelación en relación con la emergencia de lo exponencial.

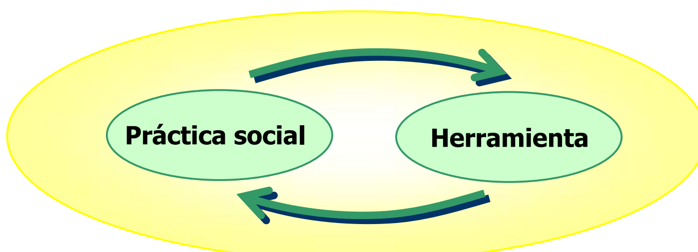


Figura 1. Al ejercer las prácticas sociales los actores construyen sus herramientas que a su vez han de modificar las prácticas.

La perspectiva teórica que adoptamos es la socioepistemología, que considera a los sistemas sociales como sistemas complejos donde los humanos aprenden al ejercer prácticas. En el sistema escolar, que es el lugar que se atiende, confluyen dimensiones que sistémicamente relacionadas conforman un todo. Las dimensiones que son consideradas en este todo tienen que ver con la naturaleza social del conocimiento, su formación histórico cultural, la producción y reproducción social del mismo, esto es, la dimensión epistemológica; la cognitiva, con relación a las interacciones que da lugar el proceso de aprendizaje, las interacciones entre los actores y las interacciones con el mundo; las formas de intervención en los procesos escolares, la didáctica; que adquieren sus particularidades en contextos sociales concretos (Arrieta, 2003).

Cantoral y Farfán, en un intento de caracterizar a la socioepistemología, escriben que es una "aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión socio cultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza" (Cantoral y Farfán, 2002).

En otras palabras, en la socioepistemología confluyen cuatro dimensiones, lo epistemológico, relativo a las prácticas que dan origen a las construcciones de los conocimientos; lo cognitivo, a los procesos de construcción de los conocimientos por los alumnos; lo didáctico, que se relaciona a las formas de intervención en los sistemas escolares; y lo social, acerca de como se desarrollan y viven en nuestro entorno las prácticas que dan lugar a los conocimientos.

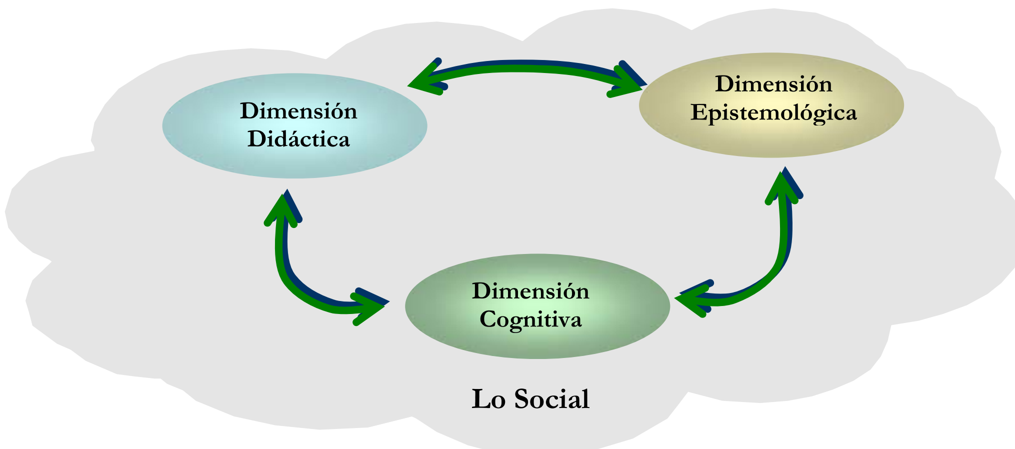


Figura 2. Dimensiones de la perspectiva teórica

Bajo esta perspectiva, la clase de matemáticas, debiera servir como un espacio para el ejercicio de prácticas, donde los estudiantes y profesores participen en la construcción de sus conocimientos.

Para el diseño de aprendizaje consideramos como base a la ingeniería didáctica adecuada o extendida a nuestra perspectiva; por ejemplo, nuestros diseños se centran en las prácticas sociales en lugar de tomar como fundamental a los objetos y/o conceptos matemáticos. Además privilegiamos el desarrollo del discurso entre los actores, las confrontaciones mediante las cuales se llegan a consensos, esto en el ejercicio de una practica, en nuestro caso la de modelación de un fenómeno.

Tres características son fundamentales en el enfoque teórico con el que se aborda esta propuesta (Arrieta, 2003).

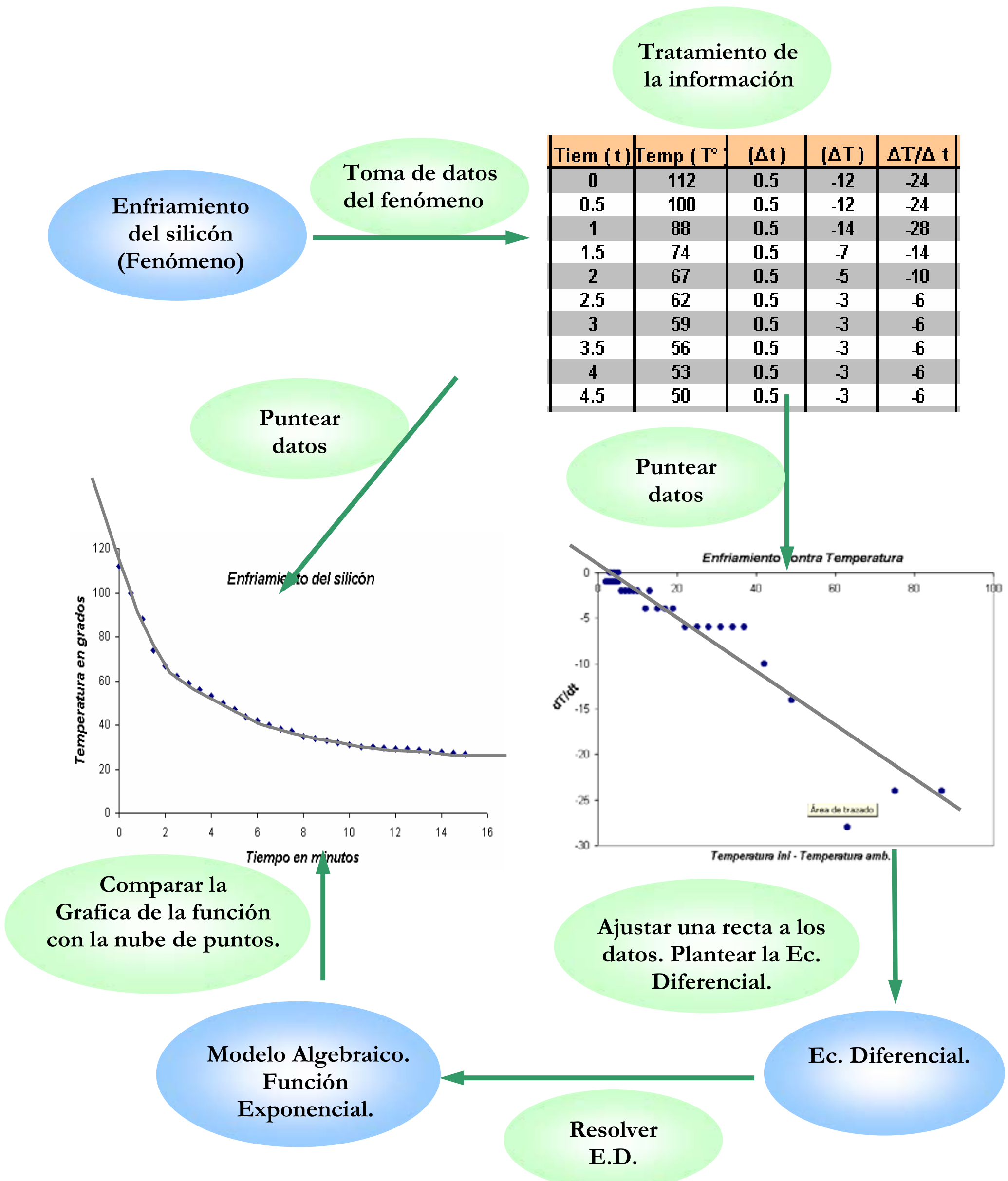
- La primacía de las prácticas sobre los objetos. Es en el ejercicio de las prácticas donde los artefactos son utilizados con intenciones situadas en un contexto, es decir, se interactúa con herramientas.
- El carácter situado de dichas prácticas. El contexto viene a ser una componente inseparable de las prácticas.
- El carácter discursivo en la construcción social del conocimiento, las interacciones. Los humanos participan en el mundo construyendo sus conocimientos, sus realidades y sus herramientas, interactúan con el mundo y con otros humanos.

Diseño de la secuencia

La práctica propuesta para ser base del diseño de aprendizaje es la modelación del enfriamiento del silicón. El objetivo fundamental es construir un contexto donde los estudiantes y profesor, interactivamente, en el aula, construyan argumentos, herramientas y significados a partir de la modelación de un fenómeno, los aspectos a considerar dentro del modelo serán: la construcción del modelo, el tratamiento (las predicciones con los modelos) y la articulación de los diferentes modelos con el fenómeno.
El material que se utiliza para la realización es: un termómetro o sensor de temperatura, pistola de silicón y barras de silicón.

En forma breve describimos las fases de la secuencia.

1. **La experimentación y la toma de datos**. A partir de la toma de datos del enfriamiento del silicón (alrededor de 15 minutos con intervalo de medio minuto entre lecturas) se construye un modelo numérico (tabla de datos). Se debe de registrar la temperatura ambiente antes de realizar la práctica.
2. **Las características de la tabla**. Los actores plantean conjeturas al analizar las características de la tabla de datos y realizar predicciones con ella. Así, por ejemplo, plantean que en la tabla de datos, el enfriamiento es mayor al inicio y después va disminuyendo. Otra hipótesis, podría ser, que el enfriamiento es proporcional a la diferencia de temperatura del silicón y del ambiente. Para esto, nos auxiliamos del cálculo de los incrementos de la temperatura (ΔT) y del tiempo (Δt), así como de la razón de estos incrementos $(\Delta T / \Delta t)$, es decir del enfriamiento del silicón.
3. **El modelo gráfico Temperatura-enfriamiento**. Una forma de argumentar acerca de las conjeturas del punto dos, es por medio de la graficación. Para esto podemos graficar una nube de puntos, entre el enfriamiento (razón de cambio de temperatura contra tiempo) contra temperatura (o la diferencia de las temperaturas del silicón y del ambiente). De acuerdo a las características de esta nube de datos podemos ajustarlos por el método gráfico, es decir le pegamos una recta a la nube de puntos obtenida y la ajustamos modificando los parámetros de la ecuación de la recta.
4. **La ecuación diferencial como modelo**. A partir de la actividad de la fase anterior planteamos la ecuación diferencial $\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$ como modelo del fenómeno. Resolviendo la ecuación diferencial obtenemos el modelo exponencial $T(t) = Ce^{kt} + T_0$, haciendo usos de los valores iniciales obtenemos los valores de C y de k.
5. **La comparación del modelo exponencial y la nube de puntos tiempo-temperatura**. Graficamos la nube de puntos tiempo y temperatura y la comparamos con la gráfica de la solución de la ecuación diferencial.
6. **La articulación de los modelos y el fenómeno**. Por último, articulamos los diferentes modelos con el fenómeno.
7. Lo anterior lo podemos expresar mediante la red de herramientas y prácticas de la figura 3. Esta red es a lo que llamamos lo exponencial, en esta red las aristas lo componen las práctica y los nodos las herramientas y el fenómeno.



Tiem (t)	Temp (T°	(Δt)	(ΔT)	ΔT/Δ t
0	112	0.5	-12	-24
0.5	100	0.5	-12	-24
1	88	0.5	-14	-28
1.5	74	0.5	-7	-14
2	67	0.5	-5	-10
2.5	62	0.5	-3	-6
3	59	0.5	-3	-6
3.5	56	0.5	-3	-6
4	53	0.5	-3	-6
4.5	50	0.5	-3	-6

Figura 3. Lo exponencial como una red de prácticas y herramientas

Resultados preliminares de la puesta en escena y conclusiones

El diseño ha sido puesto en escena en diferentes escenarios, a continuación mostramos algunos episodios, de la puesta en escena en el Instituto Tecnológico de Acapulco con estudiantes de tercer semestre de Ingeniería Bioquímica, donde se muestra las construcciones discursivas alrededor de la modelación del enfriamiento del silicón.

Caracterizando la tabla de datos

Zarid: Al inicio la temperatura va bajando muy rápido ¿no?

Rubí: ¡Sip! 112, 100, 88, 74

Julián: Va en intervalos grandes

Julián: Ya después va bajando muy poco

Zarid: ¿Por que se enfría tan drásticamente?... O sea… ¡en intervalos diferentes!

Rubí: Lo que pasa es que…, si es más caliente se enfría más.

Omar: Si pues, es lógico, cuando haces paletas, las metes al congelador y al principio baja mucho porque el congelador esta muy frío y la paleta esta caliente,… a nuestra temperatura.

Julián: Es como dicen, las paletas se derriten más rápido en Acapulco que en México, porque hace más calor aquí.

Zarid: ¿Pero eso que tiene que ver?

Omar: Si, porqué la diferencia de temperaturas es mayor en México que en Acapulco, entonces se calienta más la paleta y se derrite.

Daniela: Con esto se puede llegar a una formula ¿no? Ve el enfriamiento y la diferencia de temperatura. El enfriamiento que sería la disminución...

Marisol: ¿Es proporcional?

Julián: Aja! es proporcional a la diferencia de temperaturas.

Rubí: El enfriamiento es directamente proporcional al… , entonces sería la temperatura final menos la temperatura inicial.

Daniela: Pues vamos a ver si es cierto, si son proporcionales debe salir una línea recta

Marisol: ¡Ok!

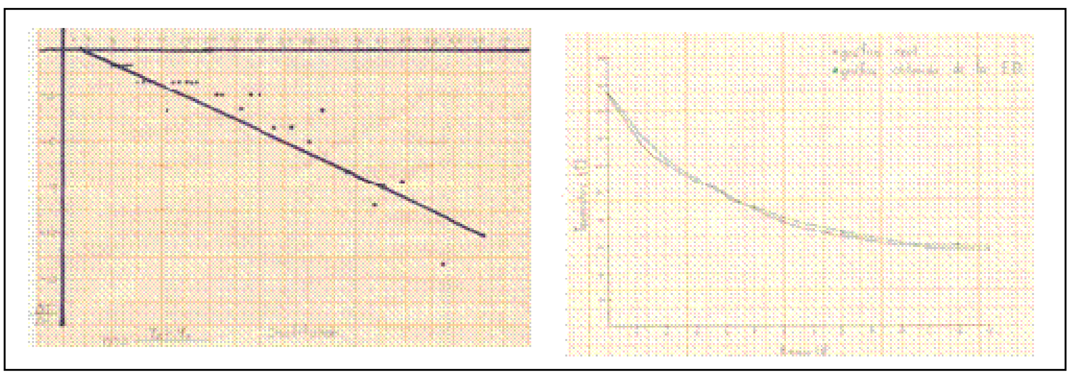


Figura 4. Producciones de los actores, del lado derecho se muestra la gráfica temperatura-enfriamiento, a la izquierda la gráfica tiempo –temperatura

La ecuación diferencial como modelo del enfriamiento del silicón

Rubí: Esta es una Ecuación diferencial, la podemos resolver como en clase de ecuaciones diferenciales,… no sé,… ¿Cómo? Maestro, como le hago aquí.

… (El profesor se acerca).

Profesor: Muy bien, pues pueden separar las variables e integrar.

Daniela: ¿Si se puede?

Profesor: Pues intenten.

….

Rubí: No puedo, aquí me queda muy feo (se dirige a Omar y muestra lo que ha hecho *K=dt(T)-dT(*borrón T_0*))*.

Omar: Estas mal, primero pasa esto para acá (le señala el término $T - T_0$) y luego aplicas ley de sándwich

Daniela: No, sé a mi me la enseñaron con *x* y *y*.

Rubí: ¡Ajá!. (Rubí intenta seguir las indicaciones de Omar).

Es notable como a través de la actividad propuesta llegan a establecer un modelo diferencial para el fenómeno, sin embargo, tienen dificultades para resolver la ecuación diferencial, aún cuando este tema ya ha sido estudiado en Matemáticas III y se emplea uno de los métodos más "simples". Hacemos notar que Rubí es una estudiante que tiene un buen desempeño escolar, obteniendo calificaciones por arriba del promedio.

No es posible tener la temperatura de 3 grados

Profesor: Pero en 3° centígrados ¿que paso?

Omar: No pues, necesito encontrar la formula para saber cuanto vale en 3° centígrados.

Profesor: A ver una pregunta: ¿a medida que pasa el tiempo la temperatura podrá estar a – 20°?

Omar: Mmmm... ¡No creo!! ... bueno… no ¡francamente no creo!... metiéndola al congelador... ¡ni así!

Profesor: Con esas condiciones ¿podrá estar a 3°?

Rubí: ¡Entonces esos nunca va a pasar!

Denisse: No puede quedar a tres grados, solo que éste lo enfríes, éste no puede quedar a tres grados si éste no lo enfrías, o sea, al caso como lo estamos viendo no es posible

Leonel: O sea, tres grados no puede ser posible porque la temperatura ambiente está a 25 grados y no puede pasarse. Entonces cuando el tiempo sigue pasando se va acercando a 25, tiende a 25 ¿no?

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Disertación doctoral no publicada, Cinvestav, México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2002). Sur la sensibilité a la contradiction en mathématiques; l'origine de l'analyse complexe. *Recherches en Didactique des mathématiques 22*(2).

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4*(2), 118-119.

Ferrari, M (2003). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. En J. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol 16, Tomo I, pp. 61-67). Chile.

Galicia, A. (2004). *La numerización de los fenómenos: modelos exponenciales*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Entorno Sociocultural y Cultura Matemática en Profesores del Nivel Superior de Educación: Estudio de Caso: El Instituto Tecnológico de Oaxaca. Una Aproximación Socioepistemológica

Javier Lezama y Luz María Mingüer
CICATA- IPN
México
Luzma16@hotmail.com
Socioepistemología – Nivel Superior

Resumen

En este estudio identificamos como problema de investigación, el análisis de un fenómeno sociocultural que denominamos "*cultura matemática*" entre los profesores de una institución en particular, el ITO en Oaxaca, México. Este problema fue abordado desde la óptica que ofrece la aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa. Nuestro objetivo: Identificar en la *cultura matemática* de los profesores del ITO, el papel que las influencias socioculturales juegan en su conformación, a través de un análisis de su naturaleza y complejidad.

Extenso

En este estudio nos propusimos abordar un fenómeno sociocultural de implicaciones importantes para la educación: La *cultura matemática* de los profesores de matemáticas. Esta investigación parte de un interés central en la formación docente y profesional de profesores de matemáticas del nivel superior de educación. Se reconoce que en este nivel de educación, los profesores son profesionales que dominan distintas áreas del conocimiento -leyes, administración de empresas, administración pública, contadores, ingenieros arquitectos, médicos, biólogos, etc.- pero que no poseen conocimientos sistematizados para abordar los fenómenos de la enseñanza y del aprendizaje de los conocimientos profesionales que les son propios. Este es el caso de los profesores de matemáticas del Instituto Tecnológico de Oaxaca, en su mayoría ingenieros, cuyo "bagaje académico" consta, entre el conjunto de materias que conforman su plan de estudio, de 4 o 5 cursos de matemáticas (cálculo diferencial, cálculo integral, álgebra lineal, métodos numéricos, ecuaciones diferenciales); por otro lado, su experiencia docente se compone de los diversos estilos "de enseñar matemáticas" de sus propios profesores y de las enseñanzas aportadas por los diferentes cursos o Programas de formación docente en los que el profesor haya incursionado, es importante señalar que dichos cursos generalmente se encuentran enmarcados en la didáctica tradicional[1].

Haciendo una reflexión más profunda acerca de los contenidos del "bagaje académico" mencionado, nos damos cuenta de que en él, también se encuentra comprendido un gran

[1] En este estudio entendemos por *didáctica tradicional*, aquella definida en el marco del modelo educativo centrado en la enseñanza del profesor, que prevalece aún en nuestros días. Este modelo enfoca toda su atención hacia el aspecto didáctico del desempeño del profesor (la enseñanza), sin tomar en cuenta los procesos de aprendizaje del estudiante, haciéndolo jugar un rol pasivo (basado en la memorización), en él el estudiante no se hace conciente de sus procesos de construcción de conocimiento y por consecuencia fomenta una dependencia de su profesor, con respecto al conocimiento.

número de significaciones socioculturales[2] acerca de la matemática, de su enseñanza y de su aprendizaje, mismas que fueron construidas en el transcurso de la existencia de cada profesor.

Reconocemos que en las sociedades existen influencias de tipo sociocultural que afectan todos las etapas de desarrollo del ser humano y que son determinantes en la conformación de una forma específica de ver el mundo y de relacionarse con él, a partir de esto podemos entender que en un grupo social, la percepción colectiva de las matemáticas también sea configurada por dichas influencias.

La matemática, su enseñanza y su aprendizaje, son temas que generan cierto consenso en la sociedad, lo que significa que una gran mayoría de esta comunidad otorga su consentimiento a una opinión generalizada acerca de estos temas; surgen entonces de este grupo social conocimientos, ideas, opiniones, creencias, actitudes, que permean y perduran (permanecen vigentes) en los diferentes medios: familiar, social y escolar y que constituyen influencias socioculturales que inciden en la conformación del "bagaje académico" del profesor.

También es importante mencionar que la matemática está implícita en todas las actividades comunes y cotidianas de los seres humano, aún cuando no se esté conciente de esta situación, el ser humano es esencialmente social y a partir de ello requiere de las matemáticas para desenvolverse en todos los medios, desde aquellos que pueden ser muy primitivos, pasando por los rurales hasta llegar a los urbanos. De la matemática se requiere para constituir las estructuras mentales básicas, que permitirán al niño el descubrimiento y la comprensión de su entorno social.

La matemática no es únicamente escolar, ella se encuentra localizada en diversos ámbitos de la sociedad presentándose como una matemática utilitaria, como una matemática de laboratorio o como una matemática escolar (Chevallard, 1997).

A partir de lo anterior queda establecido que la matemática forma parte de la cultura de todos los pueblos, puesto que es imposible entender la organización de una sociedad si no se han desarrollado conceptos matemáticos básicos, mismos que son aprendidos desde el nacimiento – por medio de estímulos tempranos- hasta la muerte. Se desprende que el individuo va configurando un acervo de conocimientos matemáticos y de ideas, opiniones, actitudes, creencias y prácticas de uso relacionadas con la matemática a lo largo de su existencia. Un ejemplo pueden ser las primeras nociones que un niño muy pequeño va "aprendiendo" (a partir de los estímulos externos) que le permiten ubicar a los objetos de su interés, cerca, lejos; así mismo aquellas que le permiten dar dimensiones a los objetos, lo grande, lo pequeño; un poco más adelante el aprendizaje de la idea de proporción, de estimación, de número; enseguida la práctica de las operaciones fundamentales; diversas prácticas de uso de las matemáticas, como calcular la cantidad (kilogramos) de semillas sembradas en una superficie, o cosechada en esa misma extensión, la cantidad de ladrillos necesarios para construir una barda, o la optimización de un cubo de madera para esculpir una figura religiosa; entre cada una de estas acciones, se "aprenden" ideas acerca de las matemáticas, como por ejemplo: son difíciles, son útiles, me dan notoriedad, me aburren; de lo anterior de desprenden las actitudes hacia las matemáticas: me interesan, las detesto, me gustaría conocerlas mejor, etcétera. Es importante hacer notar que el aprendizaje de

[2] En el marco de esta investigación consideramos "las significaciones socioculturales" como el conjunto de interpretaciones personales que todo individuo hace de la colección de los fenómenos coordinados y en interacción que surgen en un conglomerado social definido por una cultura específica.

todas las acciones enumeradas se lleva a cabo en un medio que no es necesariamente escolar, sino más bien sociocultural.

Buscando una expresión que abarcara en toda su extensión, al fenómeno sociocultural que inicialmente designamos como el "bagaje académico" con el que cada profesor enfrenta su quehacer docente, encontramos que el término c*ultura matemática* se adapta de manera conveniente pues de la misma manera que la *cultura* de un individuo, desde un punto de vista antropológico, la *cultura matemática* también está íntimamente ligada a todo ser humano que vive en sociedad. En este contexto podemos decir que la c*ultura matemática* se conforma en una realidad constituida por fuerzas multidireccionales que provienen de las influencias socioculturales que rodean al individuo y que acompaña su existencia, moldeando su percepción del mundo y por consiguiente, de lo que es la matemática, su enseñanza y su aprendizaje.

La *cultura matemática* se va configurando de forma paulatina por medio de una sucesión de construcciones de conocimiento matemático y de conocimiento social vinculado a la matemática, a su enseñanza y a su aprendizaje. De tal forma que todo individuo que vive en sociedad tiene una opinión, conciente o inconscientemente, acerca de las matemáticas, mientras más las utilice de forma intuitiva o formal tendrá más elementos en su *cultura matemática,* lo cual va constituyendo un terreno fértil para la comprensión de nuevas nociones matemáticas.

Según Nanda, (1987), la cultura se aprende mediante una intensa red de comunicaciones entre las personas que conforman un grupo social. Para que el ser humano pueda sobrevivir necesita de la transmisión social de conocimientos, la tradición cultural humana es traspasada de generación en generación a través de un proceso de aprendizaje llamado socialización.

Reconocemos que la *cultura matemática* se traspasa mediante el aprendizaje de conocimientos matemáticos y de conocimiento social vinculado a la matemática: ideas, opiniones, creencias, y prácticas de uso de las matemáticas existentes en comunidades caracterizadas por una cultura específica. El traspaso del conocimiento matemático puro se ubica, por lo general, en el medio escolar, y el traspaso del conocimiento social vinculado a las matemáticas, se realiza en los medios familiares y sociales y están definidos por los rasgos culturales de esas comunidades.

En nuestro caso podemos decir que la *socialización del conocimiento matemático* es la multiplicidad de formas cómo se transmiten los conocimientos matemáticos y las ideas sociales vinculadas a las matemáticas.

Considerando que hasta ahora ha predominado una concepción de *cultura matemática*, que involucra únicamente al conocimiento matemático, haciendo referencia al grado de erudición en esta materia que un individuo pueda poseer; nosotros, en el marco teórico que la aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa ofrece, identificamos que en el término *cultura matemática,* además del conocimiento matemático puro, existen múltiples significaciones de origen sociocultural que definen la forma en la que el individuo concibe a las matemáticas y se relaciona con ellas.

En el término *cultura matemática* está implícita una gran diversidad de vivencias relacionadas con la matemática, que están registradas en la memoria conciente o inconciente de todo ser humano que vive en colectividad. Estas vivencias surgen de tres ámbitos sociales que cubren (en su totalidad) los espacios en los que nace y se desarrolla todo individuo: El medio familiar, el medio social y el medio escolar.

Por lo tanto, en esta tesis resaltamos la importancia y vamos a la búsqueda de las características que poseen las influencias socioculturales que intervienen en la conformación de la *cultura matemática* de los profesores del ITO, realizando un análisis de su complejidad sistémica, de su naturaleza y de su acción.

Como una explicación tentativa al fenómeno que abordamos en este estudio, reconocemos que la *cultura matemática* es un conjunto de conocimientos y de vivencias determinadas íntegramente por el medio sociocultural en el que se desarrollaron los profesores de matemáticas del ITO.

En este estudio identificamos como problema de investigación, el análisis de un fenómeno social que denominamos "*cultura matemática*" entre los profesores de una institución en particular, el ITO en Oaxaca, México. Y perseguimos como principal objetivo un análisis profundo de los diferentes tipos de influencias socioculturales que intervienen en la conformación de la *cultura matemática* de los profesores del ITO a través de un estudio de su complejidad sistémica, de su naturaleza y de su acción.

El marco teórico

El marco teórico que da significado y sentido a nuestra problemática lo constituye la aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa, que se caracteriza por definir en el centro de su estructura, a una corriente de pensamiento que otorga una importancia preponderante a la influencia que ejerce el contexto sociocultural sobre la construcción de conocimiento matemático.

Para esta aproximación teórica, la acción de las influencias socioculturales juega un papel determinante en el rumbo que elige la mente humana para llegar a construir conocimiento matemático; de forma tal que la aproximación socioepistemológica considera lo sociocultural como un fenómeno sistémico en el que *lo social* y *lo cultural* se encuentran íntimamente ligados e interrelacionados entre sí y dan cabida a la totalidad de manifestaciones que puedan surgir de un conglomerado social identificado por una cultura específica.

Lo social y *lo cultural* son conceptos claves dentro de la sociología y fundamentales para la investigación sociológica pues son nociones que nos permiten explicar "las *aparentes regularidades de las acciones humanas y los hechos de la vida colectiva*"[3]. Estas regularidades de las acciones humanas y hechos de la vida colectiva definen al conjunto de fenómenos sociales que quedan englobados en la idea de *lo sociocultural.*

Para la aproximación socioepistemológica el estudio profundo del entorno sociocultural y la manera como éste se manifiesta, conduciendo el pensamiento del hombre social en los momentos en los que se construye conocimiento matemático, es de primordial importancia. No olvidemos que una de las principales finalidades de la matemática educativa es llegar a incidir en el discurso matemático del profesor, en este caso, la herramienta que nos permite analizar y más tarde recuperar todos aquellos elementos que

[3] Ely Chinoy, *La sociedad una introducción a la sociología ,*Fondo de cultura económica. México,1994, p.35

surgen del entorno sociocultural vinculados a la construcción de conocimiento matemático, es la aproximación socioepistemológica.

La tesis doctoral de R. Cantoral, constituye el fundamento de la corriente de pensamiento que en este momento se conoce como la aproximación socioepistemológica, y por su naturaleza, representa el marco teórico contextual por excelencia en el que el fenómeno de la *cultura matemática* que aquí se aborda, puede ser analizado y comprendido en toda su dimensión sociocultural.

En el análisis de esta tesis doctoral denominada "*Un estudio de la formación social de la analiticidad*" resaltan aspectos en los que el autor recurre al estudio minucioso de los contextos socioculturales vigentes en los momentos históricos en los que se construyó conocimiento matemático, que remarcan las diversas posibilidades que la aproximación socioepistemológica provee al campo de la matemática educativa para abordar todo tipo de investigación que lleve implícita la construcción de conocimiento matemático en contextos escolares o fuera de ellos, en épocas pasadas o contemporáneas.

El procedimiento empleado por R. Cantoral, nos señala una manera de intuir para más tarde descubrir la presencia de una idea o noción cuya existencia no se manifiesta de manera explícita, sino que, para descubrirla, es necesario emprender un análisis y una búsqueda avanzada de las influencias socioculturales que predominaron en ese momento histórico y que determinaron las condiciones y orientación que el pensamiento científico de la época llegó a tomar.

En el marco de la aproximación socioepistemológica establecemos que en el centro de nuestro interés se encuentra el reconocimiento de varios hechos: primero, que el fenómeno de la *cultura matemática* es considerado como el cúmulo de conocimientos matemáticos y además, de conocimiento social vinculado con la matemática: ideas, opiniones, creencias, prácticas de uso de las matemáticas, etc.; segundo, que la *cultura matemática* es considerada como el conjunto de construcciones sucesivas de conocimientos matemáticos y de conocimientos de origen social vinculados a la matemática, a su enseñanza y/o a su aprendizaje; tercero, *la socialización del conocimiento matemático* es entendida como la multiplicidad de formas como el conocimiento matemático es transmitido de individuo a individuo y de generación en generación constituyendo una serie de acciones necesarias en la transmisión de los conocimientos que conforman la *cultura matemática.*

Método

En el método está comprendido el trabajo de campo, recolección y construcción de datos y el proceso general de análisis de datos. El trabajo de campo: la selección de informantes para la obtención de datos, fue al azar, escogiendo entre el grupo de profesores que conforman la academia de ciencias básicas del ITO.

La recolección y construcción de datos**:** nuestra fuente principal de información fue obtenida a través de una técnica conocida como entrevista no estructurada en profundidad, para aplicar esta técnica definimos un listado de preguntas que constituyeron una guía solamente, ya que las entrevistas no se sujetaron a una estructura formalizada de antemano con el objeto de obtener información fluida y espontánea acerca de aquellas vivencias de los profesores que se encuentran relacionadas con la matemática a lo largo de su existencia. La entrevista inicia y gira alrededor de una pregunta: "*A lo largo de tu vida, ¿qué consideras que* *haya favorecido o desfavorecido tu gusto por las matemáticas, en la casa, en la escuela, en la calle? ¿Recuerdas hechos significativos?"*

Dependiendo del curso que la entrevista tomó, fueron surgiendo paulatinamente las intervenciones del entrevistador para abarcar todos los temas registrados en la guía. Nuestros datos cualitativos son las construcciones narrativas a través de las cuales obtenemos una información rica en significados semánticos acerca de las relaciones con la matemática que los profesores entrevistados vivieron a lo largo de su vida en tres ámbitos socioculturales: la vida familiar, la vida escolar y el medio social.

En nuestro trabajo el análisis de nuestros datos fue concebido como el conjunto de operaciones, reflexiones y comprobaciones realizadas a las transcripciones de las entrevistas, con el objetivo de identificar sistemáticamente las influencias socioculturales que afectaron la conformación de la *cultura matemática* de cada uno de nuestros entrevistados, así como la realización de un análisis en el que se manifieste su complejidad sistémica, resaltando la naturaleza de su origen, su acción, y los efectos de esta acción. Nuestro análisis es entendido como un proceso intuitivo y maleable cuya meta fue, encontrarle significado y proyección a los datos obtenidos y así lograr obtener una información estructurada y congruente con el marco de referencia.

Dentro de los enfoques de análisis procedimentales, cuya idea es la organización de las tareas analíticas a través del establecimiento de fases de trabajo; nosotros escogimos el propuesto por Miles y Huberman (1994): Este establece tres tareas básicas para el proceso de análisis de datos cualitativos: reducción de datos; disposición y transformación de datos; y obtención de conclusiones.

Conclusiones

Los aportes que la aproximación socioepistemológica de la *cultura matemática* nos permitió vislumbrar son los siguientes:

Primero: dejar establecido que la *cultura matemática* de un individuo es reconocida como una sucesión de construcciones de conocimiento matemático y de conocimiento social vinculado a la matemática, a su enseñanza y a su aprendizaje.

Segundo: que la *cultura matemática* es concebida como un fenómeno en el que, además del conocimiento matemático puro, existen múltiples significaciones de origen sociocultural que definen la forma en la que el individuo concibe a las matemáticas y se relaciona con ellas.

Tercero: identificar las influencias socioculturales que intervienen la conformación y definición de *la cultura matemática.*

Cuarto: analizar la naturaleza y acción de las influencias socioculturales que intervienen en la conformación de la *cultura matemática* de los profesores del ITO.

Quinto: identificar el fenómeno de *la socialización del conocimiento matemático* en la conformación de la *cultura matemática* de los profesores del ITO.

Referencias Bibliográficas

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. y Ferrari, M. (2001). Una visión Socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. *Serie Antologías*. (*1)*, 249-291. Programa Editorial. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Red de CIMATES.

Cantoral, R. (2001). La Socioepistemología: Una mirada contemporánea del quehacer en Matemática Educativa. *Serie Antologías. (1),* 331-333 Programa Editorial. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Red de CIMATES.

Cantoral, R (1998). La aproximación Socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa: El caso del pensamiento y lenguaje variacional. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa RELME-12,* 12 (1) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Nanda, S.(1987) *Antropología Cultural*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Camilleri, C. (1985) *Antropología cultural y educación*. UNESCO, Suiza.

Chevallard, M. (1997). *El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Ed. Horsori. I.C.E. Universitat Barcelona.

D'Amore, B. y Martín, B. (2000). Sobre la preparación teórica de los maestros de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 3(1), 33-43.

Sutherland, R. (1996). *Cultura y cognición: el caso de las matemáticas y la ciencia. Investigaciones en matemática educativa.* 1-16. Grupo Ed. Iberoamericano.

González, J. (2001*). Introducción a las fuentes de la epistemología.* México: Porrua.

Rockwell, E. (1995*). La escuela cotidiana.* México: Fondo de cultura económica.

Wertsch, J. (1993). *Voces de la mente.* Un enfoque sociocultural para el estudio de la acción mediada. Aprendizaje Visor. Gráfica Rógar. Fuenlabrada. Madrid.

Vigotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje.* España: Cognición y desarrollo humano.

Wertsch, J. (1988). *Vigotsky y la formación social del la mente.* España: Cognición y desarrollo humano.

Bishop, A. (2002). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. México, Buenos Aires, Barcelona: Temas de educación Paidós.

Rodríguez, G. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa.* Málaga, España: Aljibe, S. L. Archidona.

Kalman, J. (2003). *Escribir en la plaza.* México: Fondo de cultura económica.

La Función Logaritmo bajo la Perspectiva de la Construcción dada por Agnesi (1748)

Renata Ivonne López y Marcela Ferrari
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
México
renata_ivonne@yahoo.com.mx
Socioepistemología – Nivel Medio

Resumen

Apoyados en un análisis del discurso matemático escolar, contenido en libros de nivel bachillerato y licenciatura, observamos que la forma de introducir la gráfica de la función logaritmo es realizada mediante: simetría, área bajo la curva o una tabla, lo cual es presentado sin argumentos suficientes que nos permita deducir y entender la construcción de la función logaritmo (López et al., 2003). En general, los logaritmos son presentados en un sentido algorítmico o incluso, axiomático, más que como resultado de un razonamiento o una construcción (Ferrari, 2001). En el presente trabajo, basándonos en los supuestos de la socioepistemología, buscamos evidenciar que utilizar una herramienta distinta permitirá generar significados más allá de aquellos logrados actualmente.

Introducción

El presente trabajo de investigación tiene como propósito identificar cualidades en las ideas de Agnesi, que usando una herramienta geométrica nos permita diseñar otra forma para introducir la gráfica de la función logaritmo, distinta a la propuesta en los libros de texto.
Así, en contraposición a las herramientas usuales tales como: tabulación, graficadoras, nuestra propuesta, desarrollada con la ingeniería didáctica (Artigue, 1995), considera herramientas fundamentadas en la construcción de Agnesi (1748) que considera tres elementos: geometría plana, continuidad y covariación.

Basta mirar los índices y resúmenes de las distintas revistas científicas y de difusión de nuestra disciplina, para observar la profusión en el abordaje de la problemática de la apropiación de la noción de función. En efecto, la importancia conferida a la misma desde el paradigma euleriano, al convertirla en eje del estudio de las matemáticas, y las dificultades propias de una noción que admite varias concepciones y representaciones, se ve reflejada en el interés por su estudio de investigadores de la más diversa índole. Nuestro interés por el estudio de los logaritmos partió, en un inicio, del hecho que, según se reportara en Ferrari (2001), la manipulación errónea de los mismos da cuenta de la no apropiación de la noción logaritmo, producto de no ser construida escolarmente. En ese trabajo se reportó la dislexia escolar producto del quiebre entre la presentación operativa de los logaritmos y la presentación funcional de los mismos.

Consideramos que estudiar a profundidad la problemática propia de la noción de función resta importancia o pertinencia a hacerlo con funciones particulares. Al cuestionar esto desde nuestra investigación y adherirnos a la idea de que es vital reconocer la naturaleza de cada función para abordarla, nos vemos obligados a reflexionar y analizar las propuestas que existen en el medio sobre la covariación como una manera alternativa de abordar el tema de función. La pertinencia de esta idea radica en la hipótesis epistemológica surgida del análisis preliminar que se realizara en Ferrari (2001), a saber: "el uso explícito de la covariación de progresiones geométricas y aritméticas podría constituirse en un importante elemento de resignificación de los logaritmos.

Sustento teórico

Así, nuestro trabajo se enmarca en la *socioepistemología*, o epistemología de las prácticas sociales relativas al saber, es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar con los fenómenos de producción y difusión del saber desde una perspectiva múltiple, pues articula en una misma unidad de análisis a las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de su institucionalización vía la enseñanza (Cantoral, 2004)

En este sentido, encontramos en el análisis socioepistemológico de los logaritmos reportado en Ferrari (2001). Se distinguen tres etapas en la consolidación de esta noción dentro del discurso matemático al tomar como eje central las relaciones entre las progresiones aritméticas y geométricas, argumento utilizado por Napier para su primera definición. Como primer momento, consideramos a *los logaritmos como transformación numérica*. Se desarrollan fundamentalmente en el contexto numérico comenzando con ideas intuitivas de transformar para facilitar operaciones intentando regresar a la aritmética, es decir, utilizar sólo sumas y restas. Así, de la influencia de las primitivas formulaciones de las progresiones y de las relaciones entre ambas surge la definición de los logaritmos.

Como segundo momento se define, *los logaritmos como modelizadores*. En esta etapa se determinan sus características geométricas; logran pertenecer al discurso matemático de principios del siglo XVII; se les dota de una gráfica al adecuarlos al nuevo registro "algebraico-geométrico"; logran completar un modelo matemático de la cuadratura de curvas representativas de funciones potencia; permiten describir fenómenos físicos y se descubren nuevas formas para calcularlos en series de potencias todo lo que permite que accedan al discurso matemático del siglo XVIII y adquieran el status de función.

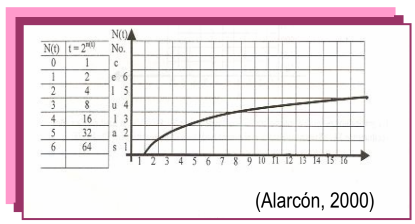
El tercer momento corresponde a la etapa de *los logaritmos como objetos teóricos*, conceptos trabajados en la enseñanza actual y que los encuentra escindidos de las argumentaciones necesarias, las cuales pueden contribuir a dotarlos de un mayor sentido, apartándolos de su tratamiento actual que los reduce a una aplicación algorítmica de sus propiedades apareciendo en el aula sin ningún antecedente analítico que pudieran haber adquirido los estudiantes hasta ese momento.

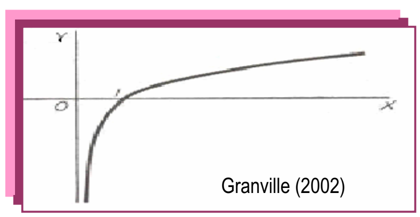
En nuestro trabajo estamos profundizando el análisis de las herramientas puestas en juego en el siglo XVIII, particularmente por Agnesi, matemática preocupada por la enseñanza del cálculo.

Discusión del análisis de textos escolares

Tres son los argumentos que hallamos al analizar algunos libros de texto de nivel bachillerato y licenciatura, en los que observamos que la forma de introducir la gráfica de la función logaritmo es realizada mediante las duplas: expresión algebraica-tabla, función inversa-simetría, teorema fundamental del Cálculo-área. Todos estos acercamientos son presentados sin elementos suficientes que nos permita deducir y entender la construcción de la función logaritmo, haciéndolo de modo ostensivo.

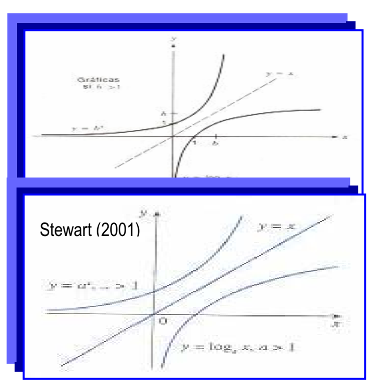
Varios textos escolares, tanto los utilizados en cursos de Álgebra en el primer semestre del Nivel Medio Superior; como los de Cálculo de quinto y sexto semestre de este nivel escolar y primeros semestres de licenciatura, presentan la gráfica de la función logaritmo como resultado de determinar la expresión algebraica, construir la tabla numérica correspondiente a cierto intervalo (abscisas positivas y en general, enteras), ubicar los puntos en un par de ejes coordenados (de forma explícita auxiliada por una cuadrícula o sólo bosquejada) para, finalmente, unir los puntos seleccionados dando por hecho la continuidad de esta curva.


(Alarcón, 2000)

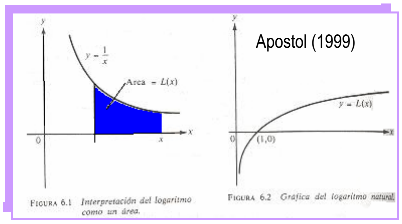

Granville (2002)

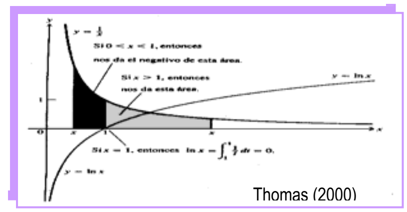
El segundo argumento, la dupla función inversa-simetría, aparece luego de haber definido a los logaritmos como la función inversa de la función exponencial (o viceversa).

Ejemplo de esto lo hallamos en Rees (1994) y Stewart (2001) que presentan la gráfica como el reflejo de la función exponencial a lo largo de la recta *y=x,* reforzando el hecho de ser inversas.


Stewart (2001)

Por último, el tercer argumento, teorema fundamental del Cálculo-área, que hallamos en libros como Apóstol (1999) y Thomas (2000) donde muestran la función logaritmo como el área bajo la curva de la hipérbola equilátera. Se enfatiza así, la utilización de la derivada y la integral como operaciones inversas, pero no se muestra la relación entre una y otra curva como la posibilidad de completar el patrón de las áreas de las curvas x^n (potencias e hipérbolas).



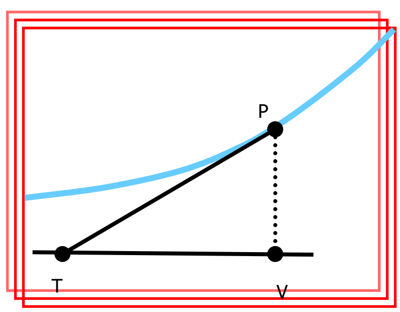


Los tres casos que hemos mostrado nos llevan a aceptar, implícitamente, que es imprescindible conocer la expresión algebraica para obtener la gráfica de una función. Hemos observado también, que estas creencias son fomentadas por el uso de las calculadoras graficadoras ya que la mayoría de las actividades que se diseñan para explorar las funciones y enriquecer el universo gráfico, generan dependencia de las expresiones algebraicas.

Aportes de Agnesi a la discusión escolar de la gráfica de los logaritmos

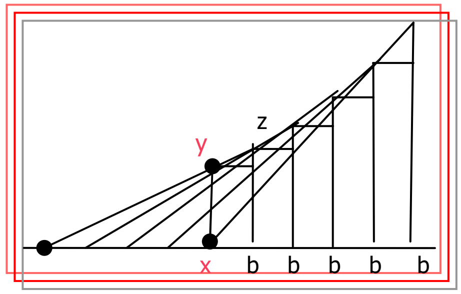
Hasta aquí, hemos presentado los argumentos que actualmente son utilizados en la construcción del discurso matemático escolar poniendo en evidencia de la predilección por herramientas matemáticas que privilegian una visión algebraica. Sin embargo, analizar algunas de las herramientas utilizadas en los siglos XVII y XVIII enriquece los argumentos gráficos permitiéndonos proponer un acercamiento diferente, que pudiera contribuir a la construcción escolar de la noción función logaritmo.

F. Debeaune (1601-1652), luego de leer la geometría en 1637, le propone a René Descartes un problema geométrico: encontrar una curva $y(x)$ tal que para cada punto P la distancia ente V y T, los puntos donde la vertical y la línea tangente cortan al eje x, sean siempre iguales.



Según (Hairer, E. y Wanner, G. (1998) este problema permaneció sin ser resuelto, hasta que Leibniz en 1684, casi 50 años más tarde, propone la siguiente solución: Sean x, y puntos dados. Entonces, para hallar la curva solicitada basta incrementar x por pequeños incrementos de b, de modo que y incremente (debido a la semejanza de dos triángulos) por $\frac{yb}{a}$. Repitiendo, este proceso se obtiene las siguientes sucesiones de valores:

y, $\left(1+\frac{b}{a}\right)y$, $\left(1+\frac{b}{a}\right)^2 y$, $\left(1+\frac{b}{a}\right)^3 y$, … para las ordenadas y x, $x+b$, $x+2b$, $x+3b$, … para las abscisas.

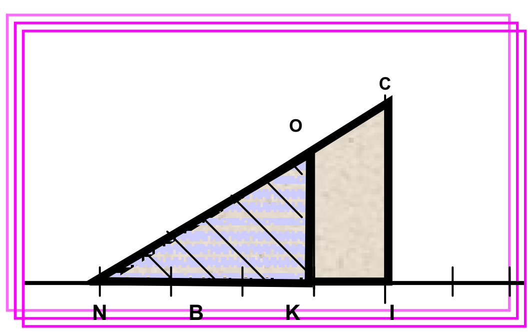


En 1748, María Agnesi interesada en la enseñaza del Cálculo publica una de los primeros libros de carácter didáctico, donde retoma esta gráfica buscando una solución a expresiones como $\frac{ax^{-1+1}}{-1+1}$, que resultan de utilizar la fórmula $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, cuando n = -1.

Señala que en estos casos es necesario recurrir a otros métodos uno, por medio de una curva llamada *Logarítmica* ó *Logística* y otro, mediante series infinitas. En este trabajo nos interesa analizar cómo es que Agnesi propone construir esta curva.

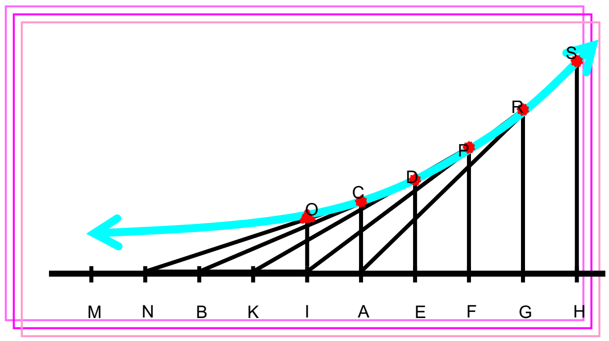
Propone trazar una recta cualquiera MH, a la que se divide en partes iguales MN, NB, BK, etc. y se toma a uno de los segmentos, por ejemplo NI. En el punto I se alza una perpendicular IO del tamaño que se quiera, y de N se traza una recta que pase por O. Luego se traza una perpendicular por el punto A, cuyo encuentro con NO sea C. Es necesario hacer notar que se pretende construir la curva mediante triángulos semejantes como ΔNIO y ΔNAC, donde las alturas originan una progresión geométrica.

Ahora se traza por B una recta que pase por C y una perpendicular sobre E donde toque a BC determinándose así el punto D.



Se repite este procedimiento hasta el infinito. Los puntos O, C, D, P, R, S estarán en la curva Logarítmica, por que en aquella época cuando se mencionaban progresiones aritméticas y geométricas se estaba hablando de una curva logarítmica.

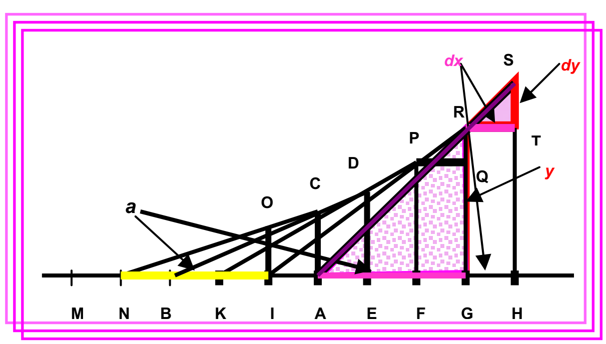
Es importante decir que no había distinción entre uno y otro comportamiento, es decir, no importaba si era progresión aritmética y geométrica ó al revés, por que para ese entonces lo que hoy conocemos como exponencial y como logaritmo, ambas estaban contempladas en el mismo concepto. Por eso no es extraño que la que se ha trazado es la exponencial, sin embargo, con sólo girar el gráfico se obtendría la logaritmo. Otra observación interesante es que en el siglo XVIII sólo se manejaba un eje, el de las X.



Agnesi continúa la discusión de la curva logaritmo partiendo de este grafico para obtener la expresión algebraica, mediante semejanza de triángulos y extendiendo las ideas a los diferenciales.

Para ello traza dos rectas PQ y RT, llamando "*a"* al segmento NI, "*dx*" a cada división de la recta MH, por ejemplo GH=*dx* y las ordenadas GR=*y,* y TS=*dy* .Además RT= GH=*dx* y AG es "a" por similitud de los triángulos SRT y RGA, así $\frac{y}{a} :: \frac{dy}{dx}$

por tanto $dx = \frac{ady}{y}$, es la expresión que representa la curva logarítmica.



A manera de conclusión

En este artículo presentamos los aportes que Agnesi nos abriera una fructífera línea de reflexiones sobre la construcción de la curva logarítmica. Agnesi utilizando geometría plana, continuidad y covariación nos propone otra forma de introducir la gráfica de la función logaritmo, dando un soplo fresco al discurso matemático escolar, anclado actualmente en la definición, conocer su notación y expresión algebraica, crear la tabla, graficar los puntos dados y por último unirlos.

Agnesi propone utilizar la semejanza de triángulos, las diferenciales y las progresiones simultáneas como herramientas de construcción, ya que mediante progresiones y semejanza de triángulos construye la grafica para luego, con semejanza de triángulos y diferenciales obtener la ecuación de la curva, que es distinta a la forma que existe en las escuelas.

Nos resta ahora diseñar actividades matemáticas para obtener resultados interesantes sobre este nuevo enfoque de la función logarítmica y por ende de la construcción gráfica de funciones, en respuesta a la hipótesis epistemológica que genero esta investigación.

Referencias Bibliográficas

Agnesi, M. (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventu italiana.* Milán, Italia: Regia Ducal Corte.

Alarcón, G. (2000). *Matemáticas, aritmética y álgebra.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Apóstol, T. (1999). *Calculus*. México: Reverté.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gómez, (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México: Una Empresa Docente, Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. (Vol. 17, Tomo I, pp. 1-9). México.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav, México.

Ferrari, M. (2004). La covariación como elemento de resignificación de la función logaritmo. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Vol. 17, Tomo I, pp. 45-50). México.

Granville, W. (2002). *Cálculo diferencial e integral.* México: Limusa.

Hairer, E. y Wanner, G. (1998). *Analysis by its history.* New York, USA: Springer Science.

López, R, Ferrari, M. y García, C. (2003). Propuesta didáctica de la función logaritmo fundamentada en la construcción geométrica de Agnesi. R*esúmenes de la VII Escuela de Invierno y VII Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, México, 64 - 65.

Rees, P. (1994).Á*lgebra.* México: McGraw-Hill.

Stewart, J. (2001). *Cálculo*. México: Internacional Thomson Editores.

Thomas, G. (1998). *Cálculo en una variable*. México: Pearson Educación.

Continuidad y Ruptura de Significados en el Tratamiento Escolar de los Exponentes

Gustavo Martínez
Centro de Investigación en Matemática Educativa, Universidad Autónoma de Guerrero
México
gmartinez@cimateuagro.org
Socioepistemología – Nivel Medio, Superior

Resumen

En trabajos anteriores (Farfán & Martínez, 2001, 2002; Martínez, 2000, 2002; Martínez & Farfán, 2003) se han estudiado las interacciones didácticas de las convenciones matemáticas presentes en los exponentes y se han dado las evidencias que permiten aislar la presencia de un mecanismo común de construcción de conocimiento –al que hemos designado con la expresión *convención matemática* (CM en lo que sigue)– en las diversas formulaciones que asignan significados a los exponentes no naturales. En este escrito hacemos uso de la herramienta conceptual que proporciona nuestra caracterización de la CM para la descripción y explicación de los fenómenos didácticos de continuidad y ruptura de significados.

Introducción y objetivo de investigación

En el marco de la metodología llamada Ingeniería Didáctica los *análisis didáctico* y *cognitivo* han sido usados extensamente para establecer las relaciones entre las formas de transmisión conocimiento y las concepciones de los estudiantes con quien se pondrá en escena la Ingeniería Didáctica. A esto se agrega el *análisis epistemológico* que pretende aislar la naturaleza del conocimiento en juego. Estos análisis en un su conjunto proporcionan el estado inicial del sistema didáctico (saber, profesor, estudiante) cuya evolución ulterior es modelada por la Ingeniería. En particular dentro del análisis didáctico se llevan a cabo investigaciones con profesores en servicio, libros de texto y programas de estudio centrados en un conocimiento matemático específico designado comúnmente por la estructura matemática presente en programación temática de los contenidos. Estos análisis comúnmente se centran en objetos y procesos identificables por la estructura matemática en juego y es por ello que encontramos trabajos del tipo: análisis didáctico de la derivada o análisis didáctico de los números negativos o más globalmente análisis didáctico del Análisis o el Álgebra.

Por nuestra parte estamos interesados en explotar al máximo la idea central del *racionalismo científico* que señala que la *dirección epistemológica* es de la razón hacia los fenómenos estudiados. Una de las consecuencias de esta consideración es que la primera tarea de una ciencia es construir una teoría que a su vez construya su objeto de estudio. Es por ello que este escrito presentamos un análisis didáctico que utiliza la CM como herramienta para precisar su objeto de estudio. De manera específica la CM ha resultado útil para describir y explicar los fenómenos de continuidad y ruptura de significados relacionados con el tratamiento escolar de los exponentes, al poner el foco de atención en los procesos de construcción escolar de significados.

Marco teórico y metodológico

En el presente escrito están contenidos algunos de los hallazgos de una investigación que contribuye a los esfuerzos de un grupo de investigadores interesados en la caracterización de la construcción del conocimiento matemático. De manera retrospectiva, a esta línea de investigación se le ha dado por llamar *perspectiva socioepistemológica*. La hipótesis teórica fundamental de tal perspectiva consiste en considerar que la construcción del conocimiento puede ser explicada y descrita a través de diferentes componentes: a) la epistemológica, b) la de la comunicación, c) la cognitiva y d) la social. En términos metodológicos esta consideración determina un *sistema de componentes* fundamental a estudiar en las investigaciones y teóricamente representa la unidad mínima del análisis socioepistemológico. Se postula que la determinación de principios, que regulan la construcción del conocimiento, proporciona los elementos necesarios para predecir e intervenir en la evolución de una comunidad integrada con el objetivo de estudiar un contenido o enfrentada a situaciones problemáticas de tipo matemático. En particular en este documento se reporta una síntesis, desde la comunicación, de los elementos generales que permiten utilizar nuestra caracterización de la CM para el análisis de los procesos de construcción escolar de significados.

Significados y lo que señala el consenso escolar

En este escrito se utiliza la distinción clásica entre significado y significante cuando se hace referencia a la representación. El significante es algo que sustituye un objeto a acontecimiento que es el significado. Más precisamente se entenderá, de acuerdo con (Vergnaud, 1990), que:

"...el significado es una relación de la persona con las situaciones y con los significantes. Más precisamente, son los esquemas evocados por una situación o por un significante en el sujeto individual, los que constituyen el significado de esa situación o de ese significante para ese individuo".

En este estudio el significante será casi siempre un signo algebraico basado en el lenguaje numérico - alfabético. En particular interesa el significado de los signos de la forma a^x. En este sentido en casi cualquier libro de texto de Álgebra es posible notar la siguiente secuenciación de los contenidos relativos a los exponentes: Exponente a través del Modelo de Multiplicación Reiterada (MMR)[1], exponente cero, exponentes negativos y exponentes fraccionarios. Cabe señalar que esta secuenciación es de carácter transversal; pues no necesariamente los temas son tratados uno después del otro. Lo anterior muestra que dentro de la matemática escolar el problema de la introducción del concepto de exponente se concibe como un problema de extensión de dominio de valores que puede tomar x en la expresión a^x; sin bien el caso cuando x es un número irracional no es tratado en los textos de Álgebra. Un aspecto marca la teleología instruccional de la secuenciación: aplicar eficientemente las *reglas de transformación* siguientes: $R1)$ $a^0 = 1$, $R2)$ $a^{-n} = 1/a^{n}$ & $1/a^{n} = a^{-n}$, $R3)$ $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ & $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$.

Dichas transformaciones son utilizadas en la escuela para realizar operaciones con monomios, aplicar reglas de derivación e integración y para la definición de la función

[1] El MMR es la definición canónica para el tratamiento de los exponentes contenidos en el conjunto $\boldsymbol{N^*} = \{2, 3, 4, 5,\ldots\}$. Es decir si $n \in \boldsymbol{N^*}$ se tiene que $a^n = (a)(a)\ldots(a)$ [n-veces]. Se señala que el conjunto $\boldsymbol{N^*}$ no es el conjunto de los números naturales. Más adelante se clarifica los motivos de la elección de $\boldsymbol{N^*}$.

exponencial y logaritmo. Este fin instruccional determina que el origen y la función de las reglas *R*1, *R*2 y *R*3 *no son objetos de enseñanza*.

Si bien se ha hecho la observación de que el origen y la función de las reglas de transformación *no son objetos de enseñanza* es de señalarse que los libros de texto comúnmente manejan justificaciones que tienen el papel de *objetos transaccionales* entre lo antiguo y lo nuevo (Chevallard, 1997); pues en las ocasiones de uso, tales como los ejercicios propuestos, ellas no juegan ningún papel. El análisis del contenido de los libros revela que la introducción de exponentes no naturales se basa en el argumento de que su definición ha de ser de tal manera, que las Leyes de los Exponentes para los Naturales (LEN) se conserven: 1) $A^nA^m=A^{n+m}$, 2) $A^n/A^m=A^{n-m}$ con $n>m$ y 3) $(A^n)^m=A^{nm}$. Más precisamente, los argumentos centran la atención en la estructura operativa de las LEN para construir el significado de los exponentes no naturales. Tal y como lo muestra la Tabla 1 no hay uniformidad sobre cual de las LEN debe seguirse cumpliendo (los textos y el exponente cero se han tomado a título de ejemplo por ser representativos en lo que respecta a los argumentos):

Libro	**Argumento para introducir exponentes no naturales**	**Argumento para introducir el exponente cero**
Wentworth y Smith (1985). *Elementos de álgebra*.	*"Los exponentes fraccionarios (negativos) deben interpretarse de manera tal que a ellos se apliquen todas las leyes que se aplican a los exponentes enteros positivos"* $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	*"Para que el símbolo a^0 obedezca las leyes generales de las otras potencias, debe tenerse: $a^0 \cdot a^m = a^{0+m} = a^m$; o, lo que es lo mismo, $a^0 \cdot a^m = 1 \cdot a^m$; y por tanto, $a^0 = 1$. Así pues,* *Toda cantidad elevada a la cero es igual a 1".*
Rees et al. (1982). *Álgebra contemporá-nea.*	Para el caso de los exponentes negativos que se cumpla la *ley de los exponentes para la división* $a^m/a^n = a^{m-n}, \ \ m>n$ Para el caso de los exponentes de la forma $1/n$ que se cumpla la *ley de la potencia de una potencia.*	*"ley de los exponentes para la división: $a^m/a^n = a^{m-n}, \ \ m>n$ Se demostrará más adelante que esta ley se cumple si $m<n$ pero aquí se considerará el caso particular cuando $m=n$. En este caso, se obtiene : $a^n/a^n = a^{n-n} = a^0$ La definición* [a través del modelo MMR] *es válida únicamente para el caso en que n sea un entero positivo por lo que a^0 no tiene sentido; sin embargo, $a^n/a^n = 1$ de donde es lógico definir a a^0 como el número 1".*

Tabla 1. Argumentos en los textos para introducir exponentes no naturales

El mecanismo convención matemática[2]

La acepción que utilizamos para convención es la que señala aquello que es conveniente para algún fin específico; entonces una convención matemática es una conveniencia para las matemáticas. Al respecto el análisis epistemológico del desarrollo sobre el concepto de

[2] Para más detalles se puede consultar (Martínez y Farfán, 2003).

exponente no natural muestra la presencia de un mecanismo uniforme de construcción de conocimiento, presente en las distintas formulaciones que se han podido determinar.
Se puede resumir que: *el significado de los exponentes no naturales es* convenido *para posibilitar la construcción de cuerpos unificados y coherentes de conocimiento* matemático *(es decir para la integración sistémica de conocimientos)*. Es por ello que de manera sintética designamos al mecanismo con la expresión: *convención matemática*. Las formas o realizaciones de este mecanismo pueden ser una definición, un axioma, una interpretación, o una restricción, entre otras. La elección de la forma depende de los objetivos teóricos específicos.

Lo anterior motiva a centrar nuestra atención en los procesos de integración sistémica de un conjunto de conocimientos. Teóricamente, desde un principio, esta búsqueda de integración, que es una búsqueda de relaciones, puede tener dos salidas: 1) La *ruptura* ocasionada por dejar a un lado un significado por otro que eventualmente es construido para la tarea de integración; es decir cambiar la centración de significado y 2) La *continuidad* al conservar un significado en la tarea de integración. Entonces la convención matemática, en tanto producto, puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados. Es por ello que de manera específica la CM ha resultado útil para describir y explicar los fenómenos de continuidad y ruptura de significados relacionados con el tratamiento escolar de los exponentes.

Ruptura y continuidad de significados

De acuerdo a la caracterización del mecanismo CM, estamos interesados en los procesos que se ponen en funcionamiento con el objetivo de buscar una cierta integración sistémica de un conjunto de conocimientos. Como es usual es quien está en proceso de construcción de conocimiento el que percibe más claramente las rupturas existentes en una organización de los saberes. En este caso algunos razonamientos de estudiantes, relativos al tratamiento de los exponentes no naturales, nos muestran una primer ruptura. Tales razonamientos tienen la particularidad de que, a pesar de ser coherentes, llevan a repuestas que no están de acuerdo con lo aceptado dentro del corpus algebraico de conocimientos. En diversos niveles escolares, pero particularmente en el nivel secundario (alumnos de 12-15 años) y en medio superior (alumnos de 15-18 años), podemos encontrar argumentos como los siguientes[3]:

Argumento *A*. $2^0 = 0$ ya que 'el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada'.
Argumento *B*. $2^0 = 2$ ya 'el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2'.
Argumento *C*. $2^1 = (2)(2) = 4$ ya que 'multiplicamos una vez'.
Argumento *D*. $2^{-3} = (-2)(-2)(-2)$.
Argumento *E*. $2^{-4} = -16$ ya que '$2^4 = 16$ y se le pone un signo'.

La coherencia de los argumentos anteriores descansa sobre varios aspectos solidarios:
a) El significado del cero como representante de la "nada" o de "ninguno",
b) la utilización del MMR para el tratamiento de los exponentes y 3
c) la segmentación del número negativo como "número positivo" con "el signo menos". Estas consideraciones y lo que señala el consenso descrito en la sección anterior, nos lleva ante la necesidad de dos rupturas para construir el significado del exponente no natural: con el MMR y con los significados contextuales de los números cero y negativos. Sin embargo, de acuerdo con nuestro foco de interés, debemos tomar en cuenta que esas opciones de ruptura poseen contrapartes que buscan la continuidad. Esta circunstancia

[3] Para un explicación detallada de estas y otras respuestas puede ser consultado (Martínez, 2002).

queda ejemplificada con los siguientes argumentos que son la búsqueda de dar continuidad

Valor efectuado de 10^5	=	Se escribe la cifra 1	→	Se coloca la cantidad de ceros que indica el exponente, exponente 5, 5 ceros	→	A la derecha de la cifra 1 si el exponente es positivo
Valor efectuado de 10^{-5}	=	Se escribe la cifra 1	→	Se coloca la cantidad de ceros que indica el exponente, exponente -5, 5 ceros	→	A la izquierda de la cifra 1 si el exponente es negativo y se coloca un punto decimal después del primer cero: 0.00001

> […]
> Existen algunos casos especiales como:
> $10^1 = 10$ Un cero a la derecha de 1
> $10^0 = 1$ Ningún cero a la derecha o a la izquierda de 1
> $10^{-1} = 0.1$ Un cero a la izquierda de 1

al MMR en relación al significado de cero como representante de la "nada" o de la "ausencia":

- *Álgebra de Phillips* (1985) "Supongamos que a^0 significa multiplicar cero veces a la base a, entonces el producto de a^0 por a^n será multiplicar a $(n+0)$-veces [es decir n veces] y el único número que deja invariable a un número por multiplicación es el uno por lo que $a^0=1$".

- *Un profesor de bachillerato* "Si $2^3=2*2*2*1$; $2^2=2*2*1$; $2^1=2*1$; $2^0=1$; el exponente cero indica cuantas veces se multiplica el 2 por la unidad".

En este punto es significativo señalar el tratamiento que generalmente se hace del exponente uno; ya que se le da la interpretación de *aparece una vez* en vez de multiplicación reiterada –que no tendría sentido pues la multiplicación es una operación binaria–. Esta ruptura es señalada por aquellos estudiantes de secundara que escriben " $2^1 = 2*$ " o dicen 'dos a la uno es 2 por...'). Es de señalar que en textos de corte más formal se puede encontrar una definición del MMR de manera inductiva, pues establecen que para $n \in \boldsymbol{N^*}$ se tiene que $a^n = (a)(a)\ldots(a)$ [n-1 multiplicaciones] por lo que en este contexto el exponente uno no tiene cabida más que como convención matemática (expresada como definición o axioma). Aquí es donde se justifica nuestra elección del conjunto $\boldsymbol{N^*}$.

En el mismo sentido que el anterior existen tratamientos que son la respuesta por conciliar el MMR y el significado contextual de los números negativos a través de cierta noción de *negatividad* como "proceso inverso" y "estar a la izquierda" al momento de reforzar la explicación. Como representantes de esta opción tenemos:

- *Curso propedéutico. Física y Matemáticas* (Conalep-Sep, 1988)(los subrayados son nuestros, negritas en el original)

"Los ejemplos anteriores representan potencias con exponentes positivos: 10^2, 10^3, 10^4, etc. Pero ¿qué significa una potencia con exponente negativo? 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, etc.

El inverso de un número es el cociente de dividir 1 entre ese número.
El inverso de 84 es 1/84; El inverso de 100 es 1/100; 10^2 es una potencia de 10 y el inverso se esta potencia es $1/10^2$.

Esto se puede representar así:
Con una base y un exponente: 10^{-2}; Como un producto: $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$; Por su valor efectuado: $\frac{1}{100}=0.01$
El signo - (menos) colocado delante del exponente de una potencia representa el inverso de esa potencia. $10^{-2}=\frac{1}{10^2}$ […]

Procedimiento para Desarrollar el Valor Efectuado de una Potencia de 10

- *Un profesor de bachillerato* "Según entiendo 2 elevado a la potencia 2, se interpreta como 2*2, 2 elevado a la potencia 3, se interpreta como 2*2*2, etc., según el documento debemos diseñar una situación en la cual la multiplicación reiterada no puede ser mantenida fuera de los casos 2, 3, 4, ... aunque me permito afirmar lo siguiente:

El número 2 elevado a la potencia –2, se interpreta como ½*½, el numero 2 elevado a la potencia –3, se interpreta como ½*½*½, etc., en consecuencia afirmo que la multiplicación reiterada si puede ser mantenida fuera de los casos 2,3,4, ...

Según mi experiencia docente 2 elevado a la potencia *n*, es multiplicar 2 *n* – veces, aquí debemos entender que estamos multiplicando reiteradamente la base (2).

Para el caso 2 elevado a la potencia –*n*, se debe entender que la base ya no es el 2, sino que la base es ½, en consecuencia se debe ser cuidadoso con las bases cuando se esta usando la multiplicación reiterada, todo lo anterior puede ser generalizado para cualesquier base *x*, con *x* distinto de cero y por tanto creo que si puede ser mantenida la multiplicación reiterada fuera de los casos 2, 3,4,...".

A manera de conclusión

En este escrito se ha mostrado la potencialidad descriptiva y explicativa del mecanismo CM; pues ha permitido dar unidad y coherencia a los diferentes tratamientos que con fines de comunicación y transmisión se pudieron encontrar en relación a los exponentes. Sostenemos que esto no hubiera sido posible sin la herramienta conceptual que proporciona la CM; ya que algunos de tales tratamientos hubieran quedado fuera al atender solamente a los significados que el consenso escolar les asigna a los exponentes no naturales. Por ejemplo, en tal contexto la posición didáctica del profesor, que extiende el Modelo de Multiplicación Reiterada a los números negativos, podría ser explicada como un recurso mnemotécnico que no contiene ningún verdadero significado y no, como muestra el análisis, ser explicada como una alternativa para evitar rupturas con el significado contextual de los números negativos. El análisis didáctico a través de la CM para otros contenidos matemáticos es motivo para estudios ulteriores.

Referencias Bibliográficas

CONALEP-SEP. (1988). *Curso propedéutico. Física y Matemáticas II*. México: CONALEP-SEP.

Farfán, R.M. y Martínez, G. (2001). Sobre la naturaleza de las convenciones matemáticas: el caso del exponente cero. En G.L. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 14, pp. 524-531). México.

Farfán, R.M. y Martínez, G. (2002). Explicación de algunos fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. En C.R. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Vol. 15, Tomo I, pp. 225-231). México.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (M. Vega Trad.) Colombia: Universidad del Valle - Peter Lang.

Martínez, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Martínez, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones de los exponentes. R*evista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5*(1), 45 – 78.

Martínez, G. y Farfán, R. M. (en prensa). La convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. *Acta Latinoamericana de matemática Educativa.*

Philips (1985). *Álgebra*. México: UTEHA.

Rees, P.K., Sparks, F.W. y Sparks R.C. (1982). *Álgebra contemporánea*. México: McGraw-Hill.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des Champs conceptuales. *Recherches en didactique des mathématiques 10*(2/3), 133-170.

Wentworth, J. y Smith, D.E. (1985). *Elementos de Álgebra*. México: Editorial Porrúa.

Los Procesos de Convención Matemática como Constituyentes en la Construcción Social de la Matemática de la Variación y el Cambio[•]

Gustavo Martínez
Centro de Investigación en Matemática Educativa, Universidad Autónoma de Guerrero
México
gmartinez@cimateuagro.org
Socioepistemología – Nivel Superior

Resumen

En investigaciones anteriores (Farfán & Martínez, 2001, 2002; Martínez, 2000, 2002; Martínez & Farfán, 2003) se han presentado caracterizaciones de un proceso particular de construcción de conocimiento al que hemos llamado "convención matemática". Aquí presentamos nuestros avances más recientes que trabajan con la hipótesis de que tal proceso es parte constitutiva de la construcción social del conocimiento. En particular aquí presentamos algunos ejemplos que muestran su presencia en la construcción social de la matemática de la variación y el cambio. Al mismo tiempo se presenta una articulación teórica de la noción de "convención matemática" como proceso de generación de conocimiento en el marco de la aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa.

1. Introducción

Este artículo parte de la idea de que unos de los principales objetivos de la matemática educativa es explicar cómo se construye conocimiento matemático. Dentro de nuestro grupo de investigación existen diversas líneas que persiguen este objetivo (Buendía 2004; Arrieta 2003, Ferrari 2004). Éstas se aproximan a la problemática de la explicación del conocimiento de maneras diversas, pero todas ellas exploran el papel de "lo social" en la construcción de conocimiento.

Al respecto, para Cantoral (2002), por ejemplo, "el término socioepistemología, pretende plantear un distinción de origen con las perspectivas epistemológicas tradicionales". La epistemología tradicional asume que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas. De esta manera el ser humano era considerado como un "científico activo" que construía hipótesis sobre el mundo, que reflexionaba sobres sus experiencias, que interactuaba con su entorno físico y que elaboraba estructuras de pensamiento cada vez más elaboradas. Sin abandonar los resultados de la epistemología tradicional, hoy es cada vez más claro el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales deben desempeñar en una explicación de conocimiento desde la Matemática Educativa. Una aproximación a este programa científico lo presente la aproximación socioepistemológica. En particular este trabajo presenta las contribuciones recientes al programa socioepistemológico por parte de la línea de investigación que hemos denominado *Los procesos de convención matemática como parte constitutiva de la construcción social del conocimiento*.

[•] Este trabajo forma parte del proyecto financiado por el Fondo Mixto CONACYT-Gobierno del Estado de Guerrero. Clave GUE-2002-C0-7626.

2. Aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa

Consideramos que el pensamiento matemático es una forma de pensar particular que permite al ser humano transformarse a si mismo y a su realidad. Nuestro interés básico, como matemáticos educativos, consiste, entonces, en contribuir a entender el desarrollo del pensamiento matemático en situación escolar; para que los conocimientos construidos en su seno formen parte "viva" de la manera de pensar de las personas; es decir que sean conocimientos funcionales. Este tipo de conocimientos serían los elementos constituyentes del pensamiento matemático. De esta manera, nuestros esfuerzos de investigación se encaminan a determinar bajo qué condiciones las personas son capaces de poner en funcionamiento los conocimientos matemáticos ante situaciones problemáticas que lo requieren. Nuestra apuesta teórica consiste en formular la hipótesis de que son las circunstancias de construcción de conocimiento las que determinan/condicionan la emergencia del conocimiento funcional.

Dentro de la perspectiva socioepistemológica en Matemática Educativa se considera que al menos cuatro grandes circunstancias condicionan/determinan la construcción del conocimiento matemático en las personas: las cognitivas, las didácticas, las sociales y las epistemológicas. Las didácticas son aquellas propias de la conformación de los diferentes sistemas didácticos, las cognitivas son propias del funcionamiento mental, las epistemológicas son propias de la naturaleza y significados del conocimiento matemático y las sociales. Nuestro interés es el estudio sistémico de todas las circunstancias. La consideración anterior plantea al programa socioepistemológico problemas teóricos y empíricos para explicar la construcción del conocimiento. El principal problema consiste en llevar a la práctica la postura sistémica para analizar las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y sus mecanismos de su institucionalización vía la enseñanza. La solución clásica a este problema es a través del establecimiento de *unidades de análisis*, cada una de las cuales retiene en forma simple las propiedades significativas de todo el sistema[1]. A nuestro parecer algunas nociones acuñadas en la perspectiva socioepistemológica tienen la característica de ser unidades de análisis para explorar el origen social del conocimiento. De entre ellas retomamos dos que aparecen fundamentales: *resignificación y práctica social.*

La noción de *resignificación* busca hacer una distinción de origen con respecto a la idea platónica que establece la preexistencia[2] de los objetos y procesos matemáticos y que implica considerar la unicidad de sus significados. La noción de resignificación emerge, entonces, como elemento para dar cuenta de que el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intención; lo que señala la posibilidad de enriquecer el significado de los conocimientos en el marco de los grupos humanos. En este marco explicativo es posible plantearse, por ejemplo, resignificar la derivada a través de la linealidad de los polinomios[3] (Rosado, 2004). La noción de *práctica social* es quizá la parte medular de la perspectiva socioepistemológica. Se entiende por práctica social a aquellas acciones intencionales de los grupos humanos para transformar su

---

[1] Hemos tomado ésta caracterización de unidad de análisis de Vigotsky (1996), cuando establece, para su explicación de las relaciones entre pensamiento y lenguaje, como tal a la "significación de la palabra".

[2] En si misma esta es idea a-social, debido a que se considera al conocimiento como independiente del ser humano.

[3] En el contexto gráfico-analítico se tiene que la parte lineal de un polinomio P(x) es la recta tangente a su grafica en el punto (0, P(0)).

realidad social y material. Por ejemplo, Arrieta (2003), Buendía (2004) y Ferrari y Farfán (2004) sostienen que son las prácticas sociales las que generan conocimiento. Respectivamente para estos autores las prácticas generadoras de conocimiento son: las de "modelación", en el sentido de actividad con la intención de comprender y transformar la naturaleza, es considerada como fuente que desarrolla procesos de matematización, la de "predicción" para la emergencia de lo periódico y la de "multiplicar sumando" para la emergencia de la variación logarítmica.

3. La noción de convención matemática cómo practica social de integración sistémica de conocimientos

En el plano de la construcción del conocimiento matemático, utilizamos la acepción que utilizamos para convención es la que señala aquello que es conveniente para algún fin específico; entonces una convención matemática es una conveniencia para las matemáticas (evitar contradicciones o dar unidad, por ejemplo). Al respecto el análisis epistemológico del desarrollo del concepto de exponente no natural muestra la presencia de una manera común de generar significados, presente en las distintas formulaciones que se han podido determinar (Martínez, 2003) a lo largo de la historia de las ideas entre los siglos XIV y XVIII. Se puede resumir que: *el significado de los exponentes no naturales es* convenido *para posibilitar la construcción de cuerpos unificados y coherentes de conocimiento* matemático *(es decir para la integración sistémica de conocimientos).*

En el sentido anterior entonces, un proceso de convención matemática puede ser entendido como un proceso de búsqueda de consensos al seno de la comunidad que trabaja en dar unidad y coherencia a un conjunto de conocimientos. La producción consensos es posible debido a que en esta comunidad existe la práctica de integración sistémica de los conocimientos; es decir existe la actividad intencional de relacionar diversos conocimientos y articularlos en un todo coherente e interrelacionado. Por su naturaleza esta práctica se encuentra en el plano de la teorización matemática, entendiendo por esto a la elaboración de conceptos interrelacionados que intentan describir, explicar un objeto de estudio, el cuál es, en este caso el sistema de conocimientos aceptados. Este proceso de síntesis conlleva al surgimiento de propiedades emergentes no previstas por los conocimientos anteriores. Las convenciones matemáticas serían una parte de las propiedades emergentes.

Tomemos por ejemplo el caso de los exponentes para aclarar a que nos referimos con "convenir matemáticamente". Partamos del supuesto que queremos darle un significado al símbolo $2^{1/2}$. La multiplicación reiterada no puede ser utilizada para ello, por lo que buscamos otro camino. ¿Qué significado tomar? Si retomamos la operatividad de las potencias de la misma base podemos postular que sería conveniente que $2^{1/2}2^{1/2}=2^1=2=(2^{1/2})^2$ por lo que tenemos que "convenir" que $2^{1/2}=\sqrt{2}$. Lo anterior también muestra que la igualdad $2^{1/2}=\sqrt{2}$ *no se puede demostrar sino se debe convenir*.

4. Procesos de convención matemática en la construcción social de la matemática de la variación y el cambio

Dentro de nuestras investigaciones que se encuentran en desarrollo, el primer paso ha sido la búsqueda de procesos de construcción de conocimiento que puedan ser explicados a través de los elementos constituyentes de nuestra caracterización del mecanismo de convención matemática. Los primeros ejemplos son extraídos de la historia de las ideas, mientras que en los siguientes ponemos a consideración la descripción de procesos de construcción de conocimiento que plantean una resignificación de diversos contenidos matemáticos vía la conformación de escenarios en donde está presente la "práctica social" de integración sistémica de conocimientos matemáticos, que es la que posibilita la presencia de procesos de convención matemática y por ende la generación de conocimiento.

4.1. El carácter convencional de la emergencia del neutro multiplicativo en la matemática de las variables

En cuanto a la sintaxis algebraica, en Martínez (2003) se ha explicado el proceso de convención matemática que estuvo presente en una construcción de las nociones de exponente no natural (cero y negativo). Ahí se describe de manera amplia la manera en que Chuquet (s. XIV) utilizó la noción de exponente cero utilizando el significado de "ausencia" que este tiene. De esta manera Chuquet estableció, por definición, el siguiente uso para los exponentes: $2^2 := 2x^2$, $2^1 := 2x$, $2^0 := 2$ ya que no tiene ninguna x. El punto de interés dentro del marco de las sintaxis algebraicas resulta de la consideración de que los convencionalismos tienen por finalidad el incluir nuevos objetos algebraicos a la estructura operativa conformada por los diferentes caracteres *cósicos*[4]. En cuanto a la multiplicación, la regla de Aurel (s. XVI) se basa en el comportamiento especial de las sucesiones: la relación entre la progresión aritmética y progresión geométrica[5]. Con este marco de referencia se determinan los convencionalismos para incluir al *número* en la estructura operativa del conjunto $\{x, x^2, x^3, x^4, x^5, ...\}$, que en la notación de Marco Aurel (Meavilla, 1993) corresponde al conjunto $\{\varphi, \chi, \xi, \zeta, \xi\xi, \beta, \xi\zeta, b\beta, \xi\xi\xi, \zeta\zeta, ...\}$. De esta manera el número 5 es representado como 5φ y es multiplicado con los demás a través de una nueva tabla de caracteres cósicos que tienen la misma regla operativa referente a la relación entre la progresión aritmética y geométrica. Lo anterior se muestra en las multiplicaciones contenidas la Tabla 1.

Notación de Aurel			
8ξ 2χ ------ 16ζ	$13\xi\xi$ $2\xi\xi$ -------- $26\xi\xi\xi$	23β 4φ -------- 92β	50φ 6ξ -------- 300ξ

Tabla 1. Multiplicaciones en la notación de Aurel

El ejemplo de Marco Aurel señala la necesidad, para incluir a lo números dentro de la operatividad de los caracteres cósicos, de convenir la existencia de un neutro multiplicativo que ahí no es identificado con el número uno.

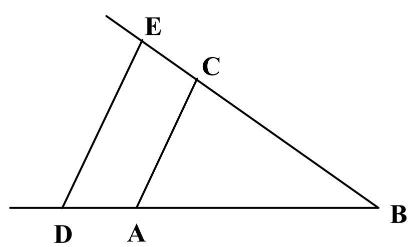
En el marco de la representación gráfica de las variables algo semejante a lo anterior fue construido por Descartes en su *Géométrie* (1637). Ahí, por ejemplo, el producto de dos

[4] En el lenguaje moderno se puede identificar estos caracteres cósicos con la segunda potencia, la tercera potencia… de la incógnita.

[5] Es decir, si se coloca la progresión aritmética que representa el número de multiplicaciones de la base y la progresión geométrica que representa las potencias, se tiene que la adición en la serie aritmética corresponde a la multiplicación en la geométrica.

longitudes aparece como una longitud y ya no más, según la tradición euclidiana, como una superficie. En la interpretación de Descartes se encuentra lo que podríamos llamar la "linealización" de la aritmética (Dhombres, 2000); ya que se establecía la correspondencia que existe entre longitudes geométricas y números. La necesidad básica es que la correspondencia fuera operatoria, es decir que las operaciones sobre los números (la adición, la sustracción, la multiplicación, la división y la extracción de raíces son las operaciones enumeradas por Descartes) correspondan con operaciones con longitudes geométricas (representadas por longitudes en el plano). Para que esta correspondencia pueda ejercerse es necesario que las operaciones con los segmentos sea cerrada (que el producto de dos segmentos sea otro segmento, por ejemplo). La elección de Descartes consiste en usar la construcción de la cuarta proporcional y la identificación, como convención, de una longitud unitaria con el número 1; así el referencial se muestra por la unidad algebraica del cálculo; el elemento neutro de la multiplicación – como se le llamaría más tarde – proporciona el referencial que requiere la razón (Descartes, 1637):

> "Como la Aritmética consiste sólo en cuatro o cinco operaciones, a saber, suma, resta, multiplicación, división y la extracción de raíces, que puede interpretarse como una especia de división, de manera que, en la Geometría, para encontrar las líneas requeridas es meramente necesario sumar o restar otras líneas; o de otra forma, tomando una línea que llamare unidad para relacionarla tanto como se pueda a números, y que, en general, puede escogerse arbitrariamente, y habiendo dado dos líneas más, encontrar una cuarta que será a una de las líneas dadas como la otra es a la unidad (que es lo mismo que la multiplicación) […] Por ejemplo, tómese AB como unidad, y sea requerida para multiplicar BD por BC. Sólo tengo que unir los puntos A y C, y trazar DE paralela a CA; entonces BE es el producto de BD y BC".



4.2. Orden y operatividad de números negativos vía la variación

Desde la perspectiva de construcción de conocimiento que aquí se presenta cabe preguntarse cómo es posible construir la operatividad de los números. Está reflexión nos ha llevado a construir hipótesis de construcción de conocimiento en relación a procesos de convención matemática y otras nociones como la de variación. Al respecto tenemos el siguiente marco que plantea la posibilidad de una *resignificación* del orden y operatividad de números con signo a través de la variación.

Orden: ¿Por qué -3>-4?

- 4>3
- Se desea que la relación de orden de los números se cumpla cuando se resta en cada miembro de la relación.
- 4-7>3-7
- Entonces se debe convenir que -3>-4

Operatividad: ¿Por qué -3(-2)=6?

- $y = 15\text{-}2(x)$
- Evaluando construimos una tabla para tomando x = 1,2,3,4,5

x	1	2	3	4	5
y	13	11	9	7	5

- Notando que Δx=1 y Δy=2, es posible continuar la tabla sin evaluar de la siguiente manera:

x	-2	-1	0	1	2
y	19	17	15	13	11

- Sustituyendo en la fórmula los valores encontrados por la variación tenemos: 19 = 15 - 2(-3) $\Rightarrow$ -3(-2)=6.
- Para que la variación se conserve es necesario convenir que -3(-2)=6.

4.3. Construcción de las convenciones de los exponentes vía la variación

- ¿Por qué 2^0=1?
- $y = 2^n$
- Evaluando construimos una tabla para tomando n = 1,2,3,4,5

n	1	2	3	4	5
y	2	4	8	16	32

- Notando que Δx=1 y y_{final} / $y_{inicial}$= 2, es posible continuar la tabla sin evaluar de la siguiente manera:

x	-2	-1	0	1	2
y	1/4	1/2	1	2	4

- Sustituyendo en la fórmula los valores encontrados por la variación tenemos que 2^0=1.
- Para que la variación se conserve es necesario convenir que 2^0=1.

5. A manera de conclusión

En este escrito se ha proporcionado una articulación de la noción de convención matemática, en tanto proceso de construcción de conocimiento, con la aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa. Se ha explicado el origen de este proceso a través de la práctica social de integración sistémica de conocimientos. Por su naturaleza esta práctica se encuentra en el plano de la teorización matemática, entendiendo por esto a la elaboración de conceptos interrelacionados que intentan describir y explicar un objeto de estudio, el cuál es, en este caso el sistema de conocimientos aceptados. En particular se han presentado ejemplos que dan evidencias del funcionamiento del proceso como constituyente en la construcción de la matemática de la variación y el cambio. Citemos, por ejemplo, la identificación cartesiana de la unidad de medida con el neutro multiplicativo con el objetivo de "linealizar" las operaciones entre magnitudes geométricas.

Como vimos en este artículo, nuestro análisis socioepistemológico produce ideas para la conformación de escenarios de resignificación de algunos contenidos matemáticos y por tanto proporciona elementos para el rediseño del discurso matemático escolar. Los ejemplos aquí presentados, referentes a la variación, son muestra de ello y señalan el camino de investigaciones futuras que busquen indagar aspectos convencionales presentes en la construcción de conocimiento matemático.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Buendia, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales(Un estudio socioepistemológico.* Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. (2002). La sensibilidad a la contradicción: Un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja. En C. R. Crespo (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen XV (pp. 35-42).* México: Editorial Iberoamérica.

Cordero (2001).La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. En *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 4*(2), 103-128.

Descartes, R. (1637). *La Géométrie.* (edición facsimilar) Colección Clásicos de la Ciencia. México: IPN-Limusa.

Dhombres, J. (2000). La banalidad del referencial cartesiano. En C. Álbarez y R. Martínez (Coord.) *Descartes y la ciencia del siglo XVII (pp. 69 – 98).* México: UNAM-Siglo XXI Editores.

Farfán, R.M. y Martínez, G. (2001). Sobre la naturaleza de las convenciones matemáticas: el caso del exponente cero. En G. L. Beitía (Ed.) *Acta Latinoamericana de matemática Educativa. Vol. 14*. (pp. 524-531). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R.M. y Martínez, G. (2002). Explicación de algunos fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. En C. R. Crespo (Ed.) *Acta Latinoamericana de matemática Educativa. Vol. 15 Tomo I.* (pp. 225-231). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ferrari, M. (2004). La covariación como elemento de resignificación de la función logaritmo. En L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. XVII.* (pp. 45 -50).

Ferrari, M. y Farfán, R. M. (2004). La covariación de progresiones en la resignificación de funciones. En L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. XVII.* (pp. 145 -149).

Martínez, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5*(1) 45-78.

Martínez, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de de su funcionamiento en los exponentes.* Tesis de doctorado. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de IPN. CICATA-IPN. México.

Meavilla, V. (1993). Una aproximación al "Libro primero de arithmetica algebratica" de Marco Aurel. En T. Rojano & L. Puig (Eds.), *Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991*. (pp. 65-95). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia –PNFAMP-México.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidaddel polinomio en la aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Vigotsky, L . S. (1996). *Pensamiento y lenguaje*. México: Ediciones Quinto Sol.

Wertsch, J. (1993) *Voces de la Mente*. España: Visor Distribuciones, S.A.

Las Prácticas Sociales de Modelación Multilineal de Fenómenos en el Aula

Maria Esther Magali Mendez y Jaime L. Arrieta
FM, Unidad Académica Acapulco, Universidad Autónoma de Guerrero
México
mguevara83@hotmail.com
Socioepistemología – Nivel Medio, Superior

Resumen

En este artículo reportamos cómo es que los actores de la puesta en escena de un diseño de aprendizaje, construyen lo multilineal, en el ejercicio de prácticas de modelación. Se toma a la modelación de un sistema de resortes como base para elaborar un diseño de aprendizaje, donde se trata a lo multilineal no como un objeto matemático, sino como herramienta creada al ejercer la modelación. En el diseño se establecen diferentes variables didácticas, por ejemplo, realizar la modelación a partir de datos "sin ruido", "con ruido" o, considerar, la modelación del fenómeno físico. Las primeras dos variantes se realizan en papel y lápiz, mientras que en la tercera se ha trabajado con un sistema de ligas. Se ha aplicado el diseño a estudiantes de distintos niveles educativos, donde se ha mostrado que los actores consideran lo multilineal como modelos lineales disjuntos.

Introducción

El objetivo del trabajo es aportar elementos de cómo es que los actores construyen lo multilineal al ejercer la modelación de la elasticidad de un sistema de resortes.
El presente trabajo se inscribe en la línea de investigación que desarrollamos un grupo de investigadores de la costa de Guerrero y que hemos llamado "las prácticas sociales en la emergencia del conocimiento matemático". Esta línea, en forma sucinta, intenta dar explicación de cómo en el ejercicio de las prácticas sociales los actores construyen sus conocimientos como herramientas para intervenir en las diferentes comunidades donde participan. Llamamos práctica social a aquella actividad que se realice en comunidades no necesariamente científicas, es de nuestro interés aquellas que requieran o utilicen conocimientos matemáticos.

El proyecto está enfocado hacia la construcción de conocimientos, no como un proceso individual aislado, más bien como un proceso social de creación conjunta (Bruner, 1988). Desde este punto de vista se considera al sistema escolar como un sistema complejo en intima relación con su entorno social, no se concibe un sistema escolar aislado. La cuestión fundamental es ¿Cuáles son las formas en que vive el conocimiento matemático en contextos escolares y no escolares? ¿Cómo es que los actores sociales utilizan los conocimientos en sus comunidades? (Arrieta, 2003).

Consideramos que las prácticas sociales están en íntima relación con las herramientas utilizadas, esto es por que al ejercer prácticas los actores construyen sus herramientas con las que han de actuar. A su vez estas herramientas modifican las prácticas.

Las prácticas sociales que ocupan el centro de nuestra atención son las prácticas de modelación. Cabe mencionar que, desde nuestro punto de vista, los modelos son considerados como herramientas creadas por los actores, al tratar de entender y predecir el comportamiento de un fenómeno, en este caso la elasticidad de un sistema de resortes. Destacamos la acción de predecir en las prácticas de modelación. Se concibe a lo multilineal como una red de herramientas y prácticas que es creada al modelar. En la modelación se construyen diferentes modelos, estos pueden ser numéricos, algebraicos o gráficos.

La perspectiva teórica

La socioepistemología es el marco en el cual se inscribe nuestra investigación. Concibe los fenómenos educativos como complejos, donde confluyen dimensiones, como lo son las epistemológica, la didáctica y la cognitiva en contextos sociales concretos. Esta perspectiva imprime en nuestras investigaciones lo situacional y lo multidimensional (Cantoral y Farfán, 2002; Cordero, 2002; Arrieta, 2003).
La consideración de la dimensión social en nuestra perspectiva implica, modificar las demás dimensiones, en particular, lo social nos lleva a un plano donde se analiza los aprendizajes y la construcción de conocimiento por los actores en relación con el quehacer dentro de una sociedad.

Desde esta perspectiva intentamos comprender y adecuar nuestro diseño a los diferentes contextos de acuerdo a sus necesidades. A partir de esta óptica, no pretendemos dar sólo una definición de lo que es lo multilineal, sino más bien tratar de caracterizar la naturaleza de esta red de prácticas y de herramientas.

El Diseño

Elaboramos un diseño basada en el ejercicio de la modelación utilizando la metodología de ingeniería didáctica adecuándola a nuestra perspectiva teórica. El objetivo del diseño es que los estudiantes construyan lo multilineal, no como un objeto matemático, sino como una red de herramientas o modelos creados en el quehacer matemático al tratar de entender un fenómeno. Se pretende que los estudiantes ejerzan una práctica y que por este medio construyan sus herramientas para predecir y entender el fenómeno, no se busca establecer una definición matemática sin vida. Como se menciona en el objetivo, la práctica propuesta es la modelación de la elasticidad de un sistema de resortes.
Las variables del diseño incluyen las características de la modelación, esta puede ser "modelación multilineal sin ruido", "modelación con ruido", "modelación multilineal presencial" y "modelación virtual". A continuación se dará una visión general acerca de estas variables.

Lo multilineal sin ruido

Esta variante del diseño consiste en presentar al estudiante con papel y lápiz, una actividad llamada "la elasticidad de los resortes", en esta secuencia se dan datos en una tabla, y hay una proporción establecida por el peso y el incremento de los resortes, donde por cada par de variables, se puede decir que su comportamiento es lineal.

Lo multilineal con ruido

En esta variante del diseño, la tabla de datos es diferente a la dada en la de lo multilineal sin ruido, los datos no son estrictamente proporcionales y esto implica que cuando se tomen por pares las variables, no mostrarán un comportamiento lineal, esto causa problemas de concepción en los actores. La intención es que los estudiantes ajusten los datos a un modelo multilineal.

Lo multilineal presencial

En esta variante del diseño se experimenta físicamente con la elasticidad de un sistema de ligas, con lo que se pretende que el estudiante ajuste un modelo que describa el fenómeno.

Modelación virtual

Esta variante del diseño se apoya en un software que simula la elasticidad de un sistema de resortes y forma parte del proyecto de laboratorio virtual que desarrollamos el equipo de investigación de las prácticas sociales y la construcción del conocimiento antes citado.

El diseño cuenta con variables internas, como son la condición inicial dada en los datos, el incremento constante y la cantidad de ellos. También se habla de las variables de la puesta en escena, en donde intervienen el tiempo, el número de estudiantes que a su vez determina el número de equipos y la determinación de trabajar previamente lo lineal. Una variable mas es el sistema educativo, ya que esta propuesta puede realizarse a nivel medio superior y superior, en donde se tienen diferentes resultados que están acorde a los conocimientos del nivel.

El diseño y sus variantes esta basado en una red que relaciona prácticas de modelación con herramientas, particularmente es a lo que hemos llamado lo multilineal y se presenta en la figura 1.

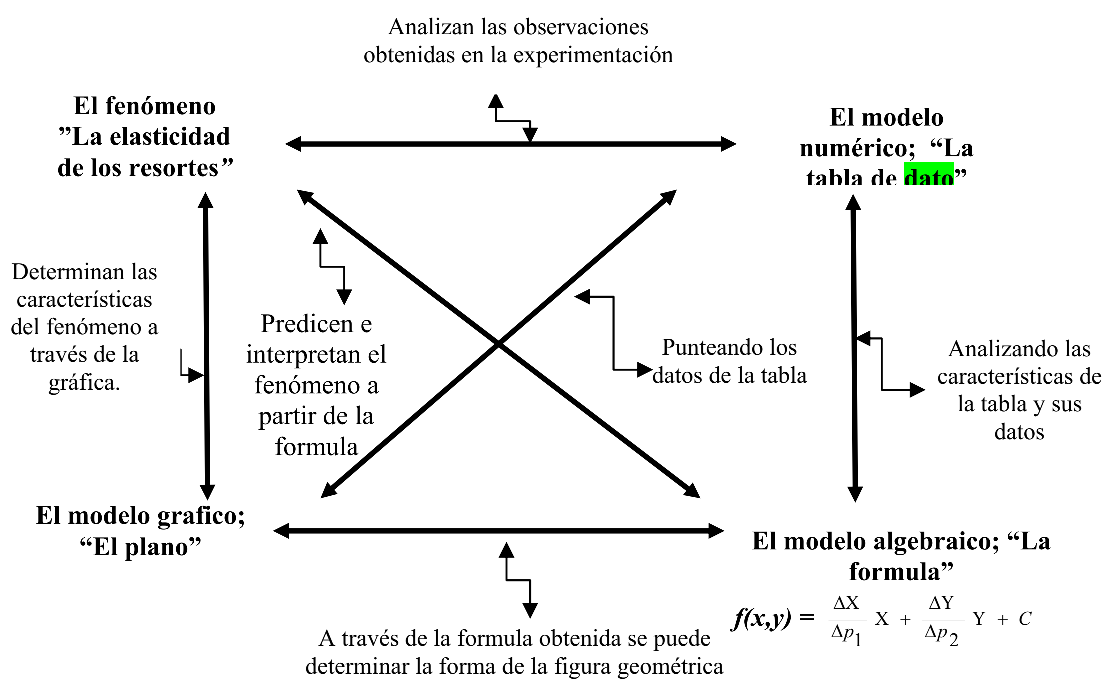
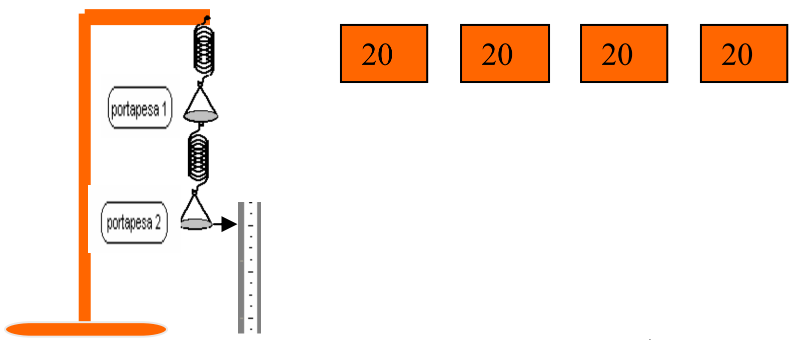


Figura 1. Lo multilineal: una red de prácticas y herramientas

La interacción

A continuación exponemos algunas de las interacciones que surgen en la puesta en escena de la secuencia "Modelando la elasticidad de los resortes" (modelación con datos sin ruido). La parte inicial del diseño se muestra en la figura 2.

En el laboratorio hemos colocado dos resortes en un soporte universal como se muestra en la figura.



Se van colocando pesas de 20 gramos en la porta pesa 1 y/o en el portapesas 2 y se obtiene la siguiente tabla.

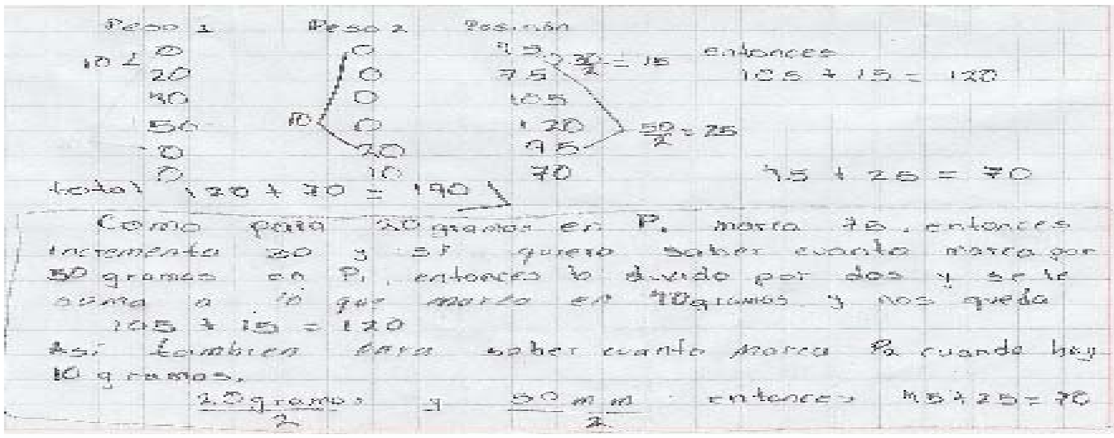
Peso (*g*) en la porta pesa 1	Peso (*g*) en la porta pesa 2	Posición del indicador (*mm*)
0	0	45
20	0	75
0	20	95
40	0	105
0	40	145

Figura 2. Primera parte del diseño modelando la elasticidad de los resortes

La primera parte del diseño consiste en describir el fenómeno y dar algunas características de la tabla de datos. Cabe hacer notar que cuando se trabaja con una tabla de datos sin ruido, los actores caracterizan la tabla como proporcional, en contraste con el diseño en donde se presenta una tabla de datos con ruido. En este caso, ellos comentan que la tabla no es proporcional, mencionan que los pesos no corresponden a una fórmula exacta y, en general, no intentan ajustar los datos a un modelo multilineal.

Después que los actores intentan describir el fenómeno y caracterizar la tabla, se les pide realizar ciertas predicciones utilizando la tabla de datos. Por ejemplo, se pregunta sobre la posición del indicador si se colocan 50 gramos en la porta pesas 1 y 10 gramos en la porta pesas 2, también ¿Cuál será la posición del indicador si se colocan 17 gramos en la porta pesas 1 y 24 gramos en la porta pesas 2?

En las diferentes puestas en escena del diseño (con diferentes variables), las formas o métodos que los actores utilizan para predecir el comportamiento del fenómeno son similares a las que reporta Arrieta (2003) cuando aplica su diseño basado en la modelación lineal. Estos métodos son el de bisección o promedio (método de Tales), regla de tres o el método de Leonel. Este último método consiste en encontrar cuanto se estira el resorte por gramo, multiplicando esta cantidad por el peso y sumando la posición inicial. Muestra de esto son las figuras 3 y 4.


Peso 1 | Peso 2 | Posición
0 | 0 | 45
20 | 0 | 75
40 | 0 | 105
50 | 0 | 120
0 | 20 | 95
0 | 10 | 70

$\frac{30}{2} = 15$ entonces $105 + 15 = 120$

$\frac{50}{2} = 25$ $45 + 25 = 70$

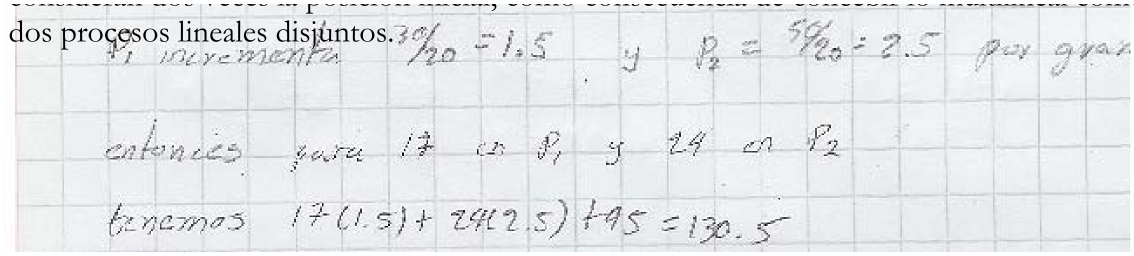
total $120 + 70 = 190$

Como para 20 gramos en P_1 marca 75, entonces incrementa 30 y si quiero saber cuanto marca por 50 gramos en P_1 entonces lo divido por dos y se le suma a lo que marca en 40 gramos y nos queda $105 + 15 = 120$

Así también para saber cuanto marca P_2 cuando hay 10 gramos.

$\frac{20 \text{ gramos}}{2}$ y $\frac{50 \text{ mm}}{2}$ entonces $45 + 25 = 70$

dos procesos lineales disjuntos.


P_1 incrementa $30/20 = 1.5$ y $P_2 = 50/20 = 2.5$ por gramo

entonces para 17 en P_1 y 24 en P_2

tenemos $17(1.5) + 24(2.5) + 45 = 130.5$

Figura 4. Encuentran cuánto se estira el sistema por un gramo colocado en el portapesas 1 y cuánto se estira por un gramo en el portapesas 2. Se multiplica el peso 1 por la primera cantidad y el peso 2 por la segunda, luego se suman junto con la posición inicial. $x(P1.P2) = \frac{\Delta x}{\Delta P1} P1 + \frac{\Delta x}{\Delta P2} P2 + x_0$

Esta forma de concebir lo multilineal, como dos procesos lineales disjuntos, lleva a los actores a construir los modelos algebraicos y gráficos, como la suma de modelos lineales, esto se muestra en las figuras 5 y 6.

$$\left.\begin{array}{l} 45 + P_1(1.5) \\ 45 + P_2(2.5) \end{array}\right\} = 90 + P_1(1.5) + P_2(2.5)$$

Figura 5. Esta figura muestra el modelo algebraico utilizado por los actores, como consecuencia de concebir lo multilineal como dos procesos lineales disjuntos

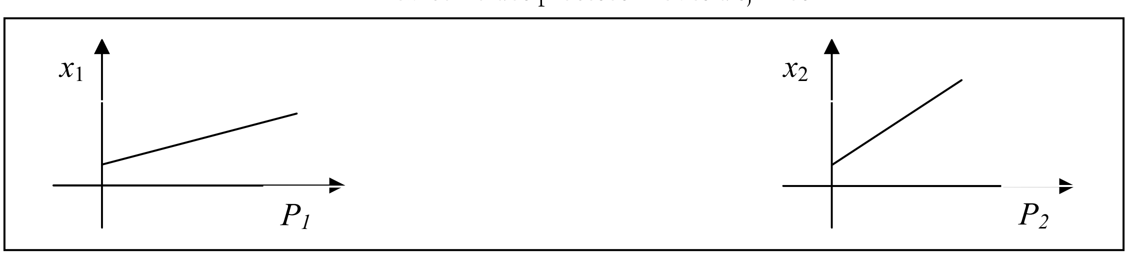


Figura 6. Lo mismo ocurre con el modelo gráfico, los actores modelan al fenómeno con dos rectas disjuntas.

Los actores se agrupan en equipos y discuten sus puntos de vista hasta llegar a un consenso, posteriormente se discuten las posiciones de los equipos, los representantes de los equipos pasan al frente del grupo y argumentan sus conclusiones, para establecer consensos. La actividad tiene que ser dirigida por el instructor, con el objetivo de provocar que los actores reafirmen sus conclusiones o las modifiquen de acuerdo a los argumentos que se expongan. Citaremos una experiencia, en donde un estudiante de licenciatura argumentaba de la siguiente forma.

José Luis: Nosotros decimos que la forma en la que están viendo el experimento es la equivocada y les diré por que, cuando encuentran la fórmula (se refiere a la figura (5)) están tomando dos veces la condición inicial y eso quiere decir que ven el experimento de esta manera (figura 7), y ¡no!, el experimento es uno solo (figura 8).

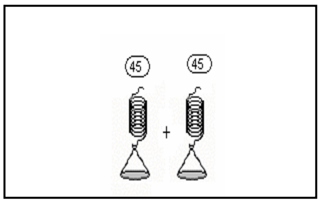


Figura 7

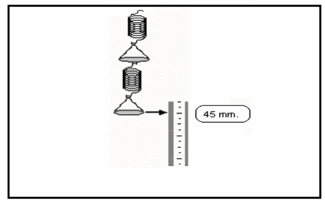


Figura 8

José Luis: Esto nos lleva a la pregunta ¿Dos fenómenos o un solo fenómeno? La respuesta aquí es clara estamos trabajando con un solo experimento, entonces tenemos que verlo así.
Ante esta observación los otros estudiantes reformularon sus propuestas. Esto es lo que se desea, confrontar las conclusiones argumentando sus versiones, sin embargo no siempre los actores participan en este proceso.

Conclusiones

A modo de conclusión, diremos que los actores trabajan lo multilineal como dos procesos lineales disjuntos. Muestras de este hecho, son las forman en como analizan los datos de la tabla y llegan a establecer la formula, por otro lado, el plano no es utilizado como un modelo gráfico de este fenómeno. Se han realizado exploraciones a diferentes niveles y, hasta el momento, se ha observado que las herramientas y métodos de predicción utilizados son similares.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de la modelación como proceso de matematización en el aula*. Disertación doctoral no publicada, Cinvestav, México.

Artigue, M., Douady, R. y Moreno, (1995). Ingeniería Didáctica en educación Matemática. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bruner, J. (1988). *Realidad mental y mundos posibles*. Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2002). Sur la sensibilité a la contradiction en mathématiques; l'origine de l'analyse complexe. *Recherches en Didactique des mathématiques 22*(2).

Cordero, F. (2002). Lo social en el conocimiento matemático: los argumentos y la reconstrucción de significados. En J. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 16, Tomo I, pp. 45-50). Chile.

Mendez, M. y Arrieta, J. (2003). Las prácticas sociales de modelación multilineal de fenómenos en el aula. *Resúmenes de la VII Escuela de Invierno y VII Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, México, 78-79.

Simulación de la Evolución: Una Práctica Social bajo el Marco Cooperativo

Esther Moreno, Jaime Arrieta, Efrén Marmolejo, Leonora Díaz y Joaquín Padovani
Universidad Autónoma de Guerrero
México
moda1975@yahoo.com
Socioepistemología – Nivel Básico, Medio y Superior

Resumen

El presente trabajo reporta resultados de una investigación en proceso y se encuentra en la línea de investigación de la construcción social del conocimiento en relación al ejercicio de prácticas sociales (Arrieta, 2003). En este artículo, reportamos la interacción de los actores alrededor de un diseño de aprendizaje basado en la simulación de la evolución de un fenómeno, en particular, la simulación en el papel, de la evolución de un "robot". Reportamos tanto las características del diseño como las del contexto social donde están insertos los actores. Nuestra atención se centra en las formas de argumentación en el discurso y las herramientas con las que actúan. Proponemos como base epistemológica a las prácticas de simulación de la evolución de fenómenos.

Introducción

El conocimiento es algo más que conceptos, y su complejidad es lo que ha generado interés en investigar cómo es que se desarrolla el proceso de construcción del conocimiento, de donde nacen las diversas líneas de investigación que tratan de digerir, cada una con su enfoque, el funcionamiento de los sistemas escolares en general y, en particular, de las prácticas escolares referidas al conocimiento matemático. En nuestra vida diaria, es una necesidad la interacción con las demás personas y es precisamente, en las interacciones, donde el conocimiento surge. El intercambio de versiones de los hechos, argumentos, herramientas y formas de hacer las cosas es una verdadera riqueza que muchas veces no explotamos por la marcada individualidad que, voluntaria o involuntariamente, nos caracteriza. Es por ello que, en este proyecto, nos interesamos en el papel de las interacciones alrededor del ejercicio de una práctica, pretendemos mediante la simulación de la evolución de un fenómeno, observar como se desarrolla el trabajo cooperativo entre los estudiantes e interpretar los resultados obtenidos con las expectativas que nos planteamos al inicio de la investigación.

Propósito de la investigación

Los propósitos de esta investigación son, al mismo tiempo, proporcionar evidencias empíricas que soporten las afirmaciones en lo teórico de la línea de investigación que sustentamos y aportar elementos para fortalecer el quehacer en los sistemas escolares. Así, se plantean a dos niveles las intenciones, a nivel teórico y a nivel de la participación en los sistemas escolares para intervenir en ellos.
De esta manera, planteamos resaltar la importancia de las prácticas sociales en la constitución de los conocimientos, al mismo tiempo que, a través de la realización de este proyecto de investigación, contribuimos a enriquecer nuestras experiencias en el aula. Pretendemos que este trabajo contribuya a la argumentación entorno al trabajo colectivo en el aula, con una mayor participación de los estudiantes. De tal manera que, mediante la actividad, puedan ellos

desarrollar sus capacidades y, el estudiar, deje de verse como algo carente de sentido o una obligación y, consecuentemente, se promueva una cultura del aprendizaje para beneficio de nuestra vida cotidiana, donde las matemáticas sirvan para solucionar diferentes problemáticas de nuestro existir y no como se conceptualizan actualmente: "las matemáticas un problema en nuestra existencia".

Las prácticas sociales y la construcción social del conocimiento

El trabajo se desarrolla asumiendo la perspectiva socioepistemológica y se ubica en la línea de investigación de las Prácticas Sociales y la Construcción Social del Conocimiento

Desde la perspectiva Socioepistemológica visualizamos la complejidad de los sistemas escolares, en esencia, multidimensionales y en íntima correspondencia con su entorno social. Por otra parte, nuestra línea de investigación considera a las prácticas como base epistemológica de diseños de aprendizaje, en esta investigación, consideramos a las prácticas de simulación de la evolución de fenómenos como la base del diseño que nos servirá para analizar la interacción de los actores.

Hemos aprendido que el conocer de los estudiantes no puede desligarse de las prácticas sociales, que este es un proceso complejo donde se involucran tanto su pasado histórico cultural, como lo que hace y sus aspiraciones, sus sueños, ambiciones y sentimientos. Estas son algunas de las características que los hacen ser seres únicos, individuales y, aunque esto es cierto, también existen cuestiones que los motivan a convivir y agruparse de acuerdo a lo que hacen, a sus afinidades e intereses, forman comunidades y actúan como comunidades. Esta actuación en comunidades, conlleva a la creación de los instrumentos con los que se actúa, es decir sus herramientas, y estos a su vez, son lo que se constituye como su conocimiento. Es aquí donde surge nuestro interés por conocer como se llevan a cabo las interacciones en el aula, analizar la formar de argumentar de los actores, las herramientas que emplean y como se genera el conocimiento. De acuerdo con nuestra *línea de investigación,* puntualizamos que las Matemáticas cobran vida en contextos sociales concretos. Basados en la simulación de la evolución de un fenómeno, desarrollamos un diseño que nos permitió investigar como los actores actúan en colaboración y cuales son las formas de la interacción en grupo.

Entendamos, entonces, a lo social como algo más que otra dimensión, el entorno social además de presentar a las matemáticas como una ciencia vinculada a nuestra "realidad", permite que los estudiante expongan sus ideas, debatan diferentes puntos de vista, argumenten de acuerdo a los conocimientos que poseen y surjan de estas interacciones acuerdos que permitan construir un nuevo conocimiento, que pueda ser útil en su vida cotidiana. De esta forma, al considerar lo social, las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica se transforman.

No cualquier actividad puede llamarse *práctica social*, ello debe ser una actividad visible y que tenga una intencionalidad, que además produzca interacciones entre los individuos que la ejerzan. Podríamos decir, en un primer acercamiento, que práctica social es el actuar de comunidades, es el actuar en comunión, con intereses compartidos y en colaboración, es una actividad observable y por lo tanto pública, donde las herramientas de alguna forma se comparten.

Así, desde este marco teórico, se diseño, una secuencia, "el crecimiento de un robot llamado CENTI", que nos permitiera investigar los procesos en el aula donde los estudiantes construyen herramientas en el ejercicio de la práctica de simular la evolución de fenómenos y, nos preguntamos, ¿cuáles fueron las herramientas matemáticas que construyeron en las interacciones? ¿Cómo se desarrolla el debate entre los actores? ¿Cuáles son las argumentaciones? ¿Cuáles son las características de las formas de cooperaciones que adquiere la interacción? Lo anterior, con el propósito de aportar evidencias que sustenten a la relación entre *prácticas sociales y herramientas* como una metáfora válida para la construcción del conocimiento matemático en los sistemas escolares.

La simulación de la evolución de los fenómenos

Nuestro entorno es una constante transformación, donde las partes que forman el todo interactúan en perfecta complejidad; los seres humanos, animales, la vegetación y demás recursos no están exentos de sufrir cambios que propicien la evolución de su especie, aunque debemos citar que no todas las evoluciones son posibles y la extinción de las especies resulta inevitable. La teoría de la evolución de Charles Darwin abre un nuevo espacio en la investigación, en donde el foco de atención *no se centra en cómo están las cosas, sino en su evolución, en como han llegado a ser como están y hacia donde se transformarán.* Desde este paradigma, el hombre, como especie, ya no es algo que nace como tal y termina como tal, es algo que proviene de otra cosa que no es el hombre y que se esta transformando. Esta idea, lleva a pensar en un fenómeno con un pasado y un futuro, lleva a pensar en su evolución. Los fenómenos evolutivos están en correlación con el tiempo, la evolución incorpora a la dimensión tiempo, obliga a pensar en un fenómeno con un pasado, un presente y una perspectiva.

Desarrollo, transformación, cambio, crecimiento, incremento, decremento, alteración, mutación, expansión, son manifestaciones de un mismo proceso general de transformación o cambio, pero cabe mencionar que existen propiedades generales que se aplican a diferentes manifestaciones particulares, al citar el termino *evolución* nos estamos refiriendo al concepto general el cual integra y representa a todas las manifestaciones.

La Evolución es un fenómeno universal intrínseco a la naturaleza, aquí radica la importancia de la simulación de la evolución de los fenómenos.

Metodología

La metodología que adoptamos en esta investigación es la Ingeniería Didáctica adecuada a nuestra perspectiva, la primera etapa abarco un estudio de la microcultura en cuestión, elaborando un mapa ideológico (de creencias y concepciones) alrededor de las matemáticas. A partir de definir los escenarios de interés se elaboró una entramado de grupos de influencia directos e indirectos, definiendo los aspectos ideológicos a atender. Para plantear epistemologías de las prácticas de simulación es necesario contemplar la dimensión tiempo. Para esto, es necesario estudiar el ejercicio de las prácticas de simulación por comunidades actuales, mirar su constitución histórica cultural y la inserción de ésta en el desarrollo de las comunidades, es decir su perspectiva. O sea, recrear el pasado, descubrir el futuro y develar la síntesis entre estas dos dimensiones, el presente de las prácticas sociales en cuestión. En la basta red de las prácticas sociales de simulación, delimitando el estudio de acuerdo a los fenómenos que se pretende simular y las herramientas en juego.

Otra fase del trabajo se dedicó para construir las secuencias, exploratorias y definitivas, considerando las diferentes partes descritas en la metodología. Las secuencias son basadas en epistemologías de prácticas, en este caso de las prácticas de simulación, sin embargo decir esto, es muy general, es fundamental, en esta fase delimitar y hacer precisiones sobre las prácticas de simulación que serán base para los diseños. Para ello, se describen los fenómenos, las herramientas matemáticas a utilizar, los medios tecnológicos y las dinámicas de las puestas en escena, entre otras cosas. Incluye el guión de la secuencia y los *análisis predictivos*.

Nuestra investigación atiende la simulación de cuatro tipos de fenómenos económicos, físicos, biológicos y los referidos a situaciones lúdicas, son estos últimos a los que particularmente nos referiremos, en esta parte de la investigación.

Los resultados obtenidos (análisis a posteriori) los confrontamos con el análisis a priori para que el diseño adquiera su validez.

Mira cómo crezco

Mi nombre es CENTI, soy un robot y mi cuerpo está creciendo. Hoy me medí para conocer el tamaño de las partes de mi cuerpo, escribí mis medidas para que las veas y me ayudes a saber cómo crecerán mi cabeza, mis brazos y mis piernas. Para comenzar a jugar sacaras por sorteo como crecerá cada parte de mi cuerpo. Algunas crecerán varios cuadritos en varios días. Construye como quedará mi cuerpo en cinco semanas.

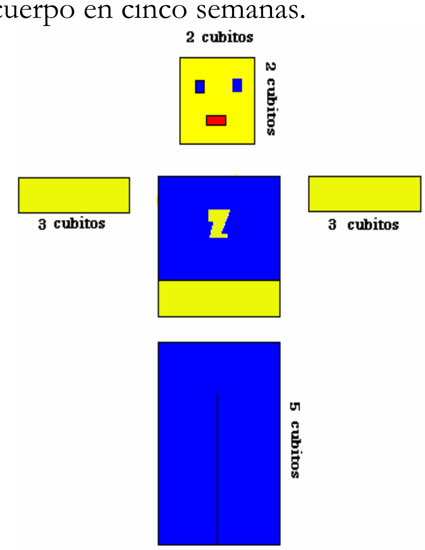


Figura 1. La evolución de CENTI. Las partes del robot no crecen con la misma tasa de crecimiento. Las herramientas usadas para simular son tasas de crecimiento y covariación entre otras

Análisis de resultados

Consideramos cinco escenarios en los cuales se puso en escena el diseño. En la primaria Hermandad México Israel con niños de 7-8 años, primaria Colegio México con equipos de padres e hijos, secundaria Wilfrido Massieu con adolescentes de 13-14 años, CETis 116 con jóvenes de 16-17 años y el Tecnológico de Acapulco con alumnos de Bioquímica.

Parte del análisis de resultados, lo forman las predicciones acerca del diseño, por lo que consideramos conveniente citar brevemente algunos puntos del Análisis predictivo, cabe señalar que este análisis predictivo se adecua de acuerdo al escenario y, en este caso, solo mencionamos las generalidades.

- Los actores buscarán procedimientos matemáticos, utilizando fórmulas, tablas u otras herramientas.
- Establecerán un discurso en torno a la evolución del fenómeno propuesto.
- Los actores tendrán dificultades en la comprensión del enunciado, "no saben leer"
- Los actores se organizarán y repartirán tareas para la acción. Cooperarán
- Los actores se interesarán por participar en la secuencia. *"Prenderá la secuencia"*

En las puestas en escena del diseño, se recabaron evidencias auditivas y visuales de cómo los actores interactúan en el aula. En la siguiente tabla tratamos de comparar algunos de los resultados más relevantes.

PRIMARIA	SECUNDARIA
Se observa interacción por parte de ambos sexos	Disminuye la interacción de los hombres
Buscan "*darle vida" a la secuencia*	Buscan procedimientos matemáticos
Construyen herramienta: Tiempo…tamaño	Construyen herramienta: regla de tres
Argumentan "robot no crece" (un caso)	Argumentan "ficticio" "irreal"
construyeron sin problema	Inseguridad con los resultados
Mayor motivación	*menor motivación*

El resultado del análisis a posteriori concuerda con el análisis a priori. El diseño de la evolución del robot, fomentó la participación de los estudiantes en los escenarios donde se intervino. Trabajaron individualmente, pero después de determinado tiempo, comenzaron a debatir sus ideas y buscaron argumentos que respaldaran su forma de dar solución al problema, llegando a consensos. Las herramientas matemáticas empleadas (sumas, multiplicación, regla de tres) variaron de acuerdo a los escenarios y a las características de los equipos. Fue relevante en este estudio la experiencia que se vivió en la puesta en escena donde se colaboró en equipos integrados por padres e hijos, donde se observaron *Método de enseñanza* que emplean las propias madres para ayudar a estudiar a sus hijos, además de existir una visible *predisposión a las matemáticas* por madres (negativa en mayor proporción), lo que determinaba considerablemente su actitud hacia los pequeños, privilegiando el *razonamiento o la memorización.*
Observemos algunos de los resultados plasmados en papel por estudiantes de diferentes edades.

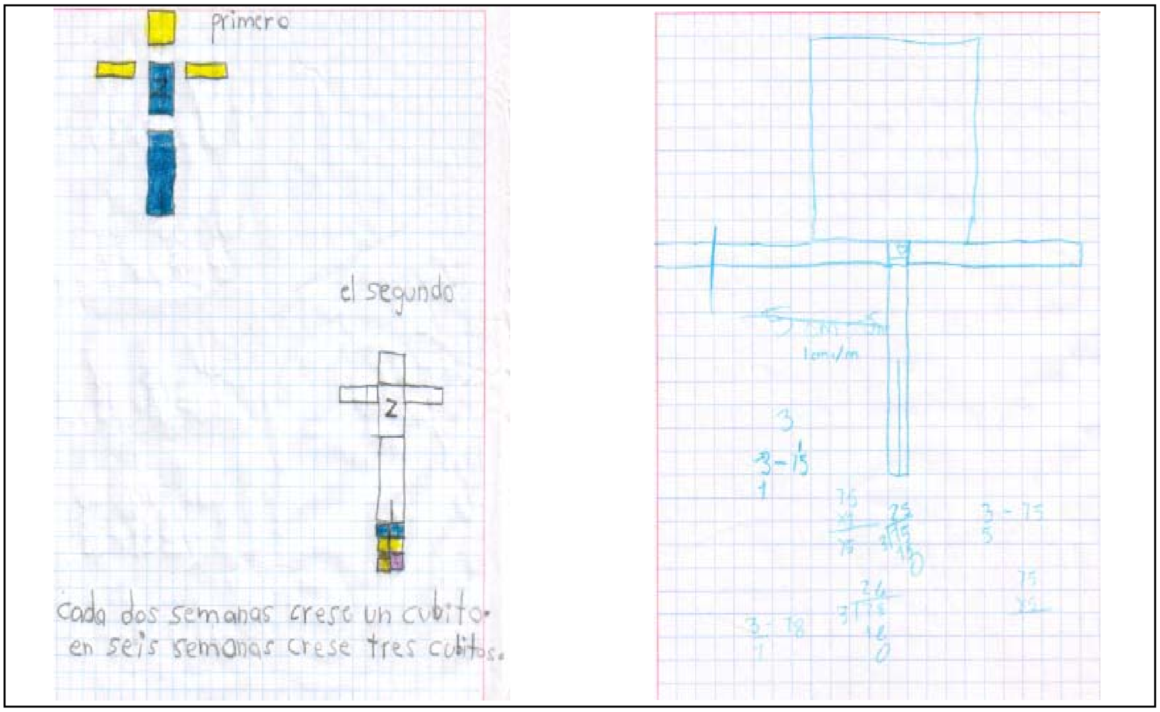


Figura 2. A la izquierda, dibujo de Enrique 7, en el escenario padres e hijos. A la derecha dibujo de Martha 15 años, escenario de estudiantes de secundaria

Conclusiones

La investigación aún está en proceso, pero con los resultados obtenidos en tres exploraciones de los cinco escenarios programados, podemos evidenciar que las prácticas sociales se encuentran transversalmente en las dimensiones que hace mención la socioepistemología. Los resultados nos dan evidencias de que el contexto social da vida a las matemáticas, donde la verdadera importancia es *construir* matemáticas para utilizarlas en el ejercicio de sus prácticas en cada comunidad, donde las interacciones entre los actores y su entorno social, es no solo inevitable, sino benéfico para llegar a consensos que den solución a problemáticas de su entorno.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis doctoral no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.

Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula.* México: Editorial Paidós.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998a). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Epsilon 42*(14), 854-856.

Cordero, F. (2002). Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y de significados. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 16). México.

Naturaleza de un Campo Conceptual del Cálculo Infinitesimal: Una Visión Epistemológica

Germán Muñoz
Centro Investigación en Matemática Educativa-Universidad Autónoma de Chiapas
México
german@cimateunach.org
Epistemología, Pensamiento matemático Avanzado – Nivel Superior

Resumen

A partir de una problemática propia de la enseñanza en la que están inmersos los estudiantes de Cálculo integral, que consiste en la separación entre lo conceptual y lo algorítmico (*C y A*), construimos un campo conceptual del Cálculo infinitesimal que implica la relación entre lo *C y A* con base en el marco epistémico de Newton. Evidenciamos supuestos epistemológicos del campo conceptual construido que justifican la naturaleza del conjunto de situaciones problema de base considerando las cosmovisiones y las prácticas sociales que permitieron el surgimiento del Cálculo infinitesimal en el siglo XVII. Dicha naturaleza está centrada en relaciones funcionales entre variables y sus variaciones y la noción de *predicción* en tanto práctica social en sus formas de *número-estado futuro* o *función-estado futuro*.

Introducción

Esta investigación surgió a partir de una problemática propia de la enseñanza en la que están inmersos los estudiantes de Cálculo integral que consiste en la separación entre lo conceptual y lo algorítmico (*C y A*). En la *génesis histórica* encontramos una evidencia de la imposibilidad de la separación entre lo *C y A* en el contexto del marco epistémico de Newton (Cantoral, 1990; Piaget & García, 1994). De manera que construimos un campo conceptual del Cálculo (Muñoz, 2000), es decir, un conjunto de situaciones que le dan sentido al Cálculo integral y que implican la relación entre lo *C y A* con base en el marco epistémico de Newton y en la perspectiva de la integral vía la noción de *acumulación* (Cordero, 1994) así como en el referente de la teoría de campos conceptuales (Vergnaud, 1990). Nuestros resultados principales consisten en evidenciar supuestos epistemológicos del campo conceptual construido que justifican la naturaleza del conjunto de situaciones problema de base. Dicha naturaleza está centrada en relaciones funcionales entre variables y sus variaciones y en la construcción de sistemas de transformación que permiten pasar de los estados iniciales (presente) de las variables de los fenómenos de variación a los estados finales (futuro) en sus formas de número-estado o función-estado en donde es inherente la noción de *predicción* en tanto práctica social. Nuestra visión epistemológica del campo conceptual previamente construido considera la cosmovisión y las prácticas sociales que permitieron el surgimiento del Cálculo infinitesimal en un contexto sociocultural específico del siglo XVII, que en el marco de la mecánica clásica originó lo que actualmente se le denomina la ciencia moderna. Con base en lo anterior un aspecto importante a resaltar fue que tuvimos necesidad de reformular la visión de la teoría de los campos conceptuales. Nuestra visión alternativa se ubica dentro de los esfuerzos para desarrollar una aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa.

Génesis histórica de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico

Al atender la problemática planteada al principio, identificamos teóricamente un aspecto que tienen en común lo conceptual y lo algorítmico, el cual se refiere a que existen situaciones problema (en tanto objeto de conocimiento) a partir de las cuales se forman nociones y procedimientos, en estrecha relación, asociados al Cálculo integral. Este aspecto en común es una condición necesaria para propiciar la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, aunque no suficiente para los fines de la Matemática Educativa. La identificación de la condición anterior nos permitió mirar otra perspectiva, en lugar de centrar la atención en dos objetos de conocimiento (la definición por una parte y el procedimiento preestablecido por la otra) y enseguida buscar condiciones de relación entre los dos objetos. Nuestras investigaciones nos han conducido a buscar las relaciones a partir de precisar, en lo más posible, las características del objeto de conocimiento común a lo conceptual y a lo algorítmico (Muñoz, 1999). El objeto de conocimiento común lo caracterizamos tomando en cuenta los cambios de marco epistémico (Piaget y García, 1994) y teniendo como referencia las investigaciones de Cantoral (1990) y Cordero (1994), además por la naturaleza de la problemática nos auxiliamos de la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1990); lo cual nos permitió realizar el análisis y la clasificación de las diversas situaciones problema que le dan sentido al Cálculo integral. Así que la pregunta obligada es ¿cuál es ese tipo de problemas?. En resumen, las características del objeto de conocimiento común a lo Conceptual y a lo Algorítmico las precisamos, en lo más posible, a través de precisar el tipo de problemas cuya solución exige de una integración; después analizamos y clasificamos las diferentes situaciones que se derivan de ese tipo de problemas. Para identificar el tipo de problemas cuya solución exige de una integración, revisamos brevemente el desarrollo histórico del Cálculo. La perspectiva histórica considerada, toma en cuenta los cambios de marco epistémico[1], es decir, la reformulación de preguntas cruciales a través de las cuales el Cálculo integral se ha desarrollado.

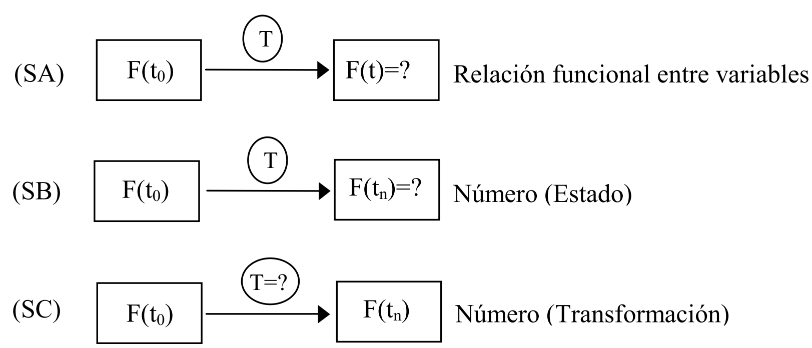
Antes del siglo XVII tanto Arquímedes como Aristóteles fueron algunos de los que más influyeron en la época. Señalamos sólo algunos hechos relacionados con los elementos del Cálculo integral. Cuando Aristóteles estudió el movimiento de los cuerpos el marco epistémico considerado fue: ¿Cuales son las *causas reales* del movimiento? (Piaget y García, 1994) pregunta que tuvo sentido en una cosmovisión donde *el estado natural de las cosas era el reposo* (en época paralela en la civilización China había una cosmovisión donde *el estado natural de las cosas era el movimiento* y por ende tenía sentido la pregunta: ¿Cuáles son las *causas reales* del reposo?). Dicho marco Griego originó descripciones cualitativas del movimiento (fenómeno de variación); por ejemplo, tomemos el caso de la piedra que cae libremente o por un plano inclinado. Aristóteles, y sus seguidores medievales, se preguntaban acerca de la naturaleza del cuerpo que cae y de la forma en que se modifican sus atributos durante la caída. Dentro de este marco, Aristóteles no generó procedimientos para cuantificar el movimiento, simplemente porque no era parte de su marco epistémico. En los siglos XVII y XVIII se siguen estudiando los mismos

1 "...en cada momento histórico y en cada sociedad, predomina un cierto marco epistémico, producto de paradigmas sociales y epistémicos. Una vez constituido un cierto marco epistémico, resulta indiscernible la contribución que proviene de la componente social o de la componente intrínseca al sistema cognoscitivo. Así constituido, el marco epistémico pasa a actuar como una ideología que condiciona el desarrollo ulterior de la ciencia. Dicha ideología funciona como obstáculo epistemológico que no permite desarrollo alguno fuera del marco conceptual aceptado. Sólo en los momentos de crisis, de revoluciones científicas, hay una ruptura de la ideología científica dominante y se pasa a un estadio diferente con un nuevo marco epistémico..." (Piaget & García, 1994, p. 234)

fenómenos de variación (curvas geométricas, movimiento de cuerpos), pero con otros marcos. Así, Galileo estudió el movimiento de los cuerpos, y su marco epistémico fue: ¿Qué relaciones se establecen entre distancias y tiempos de caída de los cuerpos? (Piaget y García, 1994) pregunta que tuvo sentido en una cosmovisión en donde *el estado natural de las cosas era el reposo y el movimiento* y por ende el principio de inercia fue construido. En dicho marco Galileo elimina las preguntas sobre *causas reales* que hacían referencia a cualidades (atributos) e introduce mediciones. Pero *medir* es comparar para establecer relaciones entre distancias y tiempos. El pasaje de atributos a relaciones implica una identificación de parámetros y su consiguiente cuantificación. Pero no sólo se trata de mediciones, sino que Galileo introduce el concepto de relación funcional entre las variables, que caracteriza el estado de movimiento de un cuerpo en momentos diferentes de su trayectoria; esto supone la introducción del tiempo como variable independiente. Ahora analicemos el marco epistémico de Newton cuando estudiaba el movimiento de los cuerpos; este marco era: ¿Cómo se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidos los valores de los parámetros en un momento dado y en lugar dado (es decir, las llamadas condiciones iniciales)? (Piaget y García, 1994) pregunta que tuvo sentido en una cosmovisión en donde *el estado natural de las cosas era el reposo y el movimiento*. Así, el objeto fue *calcular* la evolución posterior del sistema de movimiento sin plantearse otras preguntas sobre las *causas reales* de él. Pero la evolución misma es calculada sobre la base de un sistema de transformaciones que permiten pasar de los valores de las variables, en el estado inicial, a los valores que adquieren en cualquier otro instante. Esta transición de causas últimas a sistemas de transformación fue un paso decisivo en la historia de la mecánica, uno de los pilares más sólidos de la revolución del siglo XVII, y significó una modificación profunda en la idea de la relación entre la matemática y el mundo de los fenómenos físicos (Piaget y García, 1994). Es decir, el hecho de que la pregunta sea *calcular la evolución posterior* implica cuantificar estados posteriores de cierta variable, en función de otra, a partir de las condiciones iniciales para *predecir* parcialmente la evolución de un fenómeno de variación o cambio. La unión tan fructífera entre la matemática y la física propias del siglo XVII y parte del XVIII, sufrió una ruptura a partir del problema de la cuerda vibrante cuya solución tuvo consecuencias sobre el concepto de función. En el siglo XVIII Leonard Euler (1707-1783), abandonó el estudio de curvas geométricas y fundó la ciencia de los infinitésimos, sobre una teoría formal de funciones. De alguna manera, esto significó la ruptura entre un Cálculo de variables (físicas o geométricas), como inicialmente empezó, y un Cálculo de funciones numéricas. Tal ruptura posibilita un nuevo marco epistémico que fue delineado en la obra de Fourier: ¿Qué significado tiene la $\int f(x)\,dx$, donde *f(x)* es una sucesión *arbitraria* de ordenadas?. En este marco Cauchy (1789-1857) inició la construcción de una teoría de integración y escribió la definición de función continua (Cordero, 1994). Luego construye su teoría de integración para funciones continuas. Una implicación de su definición es que $\int_a^b f(x)dx$ tiene un valor determinado para cualquier función arbitraria continua; sin embargo, su definición se extiende al caso de una función acotada, con un número finito de puntos de discontinuidad en un intervalo, y para ciertas funciones con un número infinito de puntos de discontinuidad. Por otra parte, el marco epistémico de Riemann (1826-1866) consiste en lo siguiente: ¿Qué se entiende por $\int_a^b f(x)dx$, donde *f(x)* es una sucesión *arbitraria* de ordenadas y además densamente discontinua? y ¿en qué casos es una función integrable o no lo es ?. Como resultado de este marco epistémico, se reflexiona sobre el significado del objeto integral *per se* y no sobre los usos que el proceso de integrar proporcionaba. Sin duda, en este periodo se trata ya de un *cálculo de funciones numéricas*, es decir, el objeto de estudio ya no son las cantidades variables sino las funciones vistas como una sucesión arbitraria de ordenadas (Cordero, 1994; Cantoral, 1990). Así, en el periodo que abarca parte del siglo XVIII y el siglo XIX los marcos epistémicos ya no se refieren a los fenómenos de variación o cambio como en los periodos anteriores, lo cual generó el inicio de los procesos de fundamentación del Cálculo y la emergencia del Análisis Matemático.

Hacia un campo de prácticas sociales del cálculo

Fue en el siglo XVII cuando surge el Cálculo infinitesimal (Cantoral, 1990) y también la unión entre física y matemáticas, es decir, la matematización de la física. También es en él donde los Newtonianos conciben los problemas de la dinámica como el tipo de problemas que más tarde se denominarían en la física *problemas con condiciones iniciales* (Piaget y García, 1994). En el siglo XIX se reflexiona sobre el objeto matemático *per se* (la integral) y las discusiones giran alrededor de la función integrando (*f(x)*), vista como una sucesión arbitraria de ordenadas, y sobre el dominio de dicha función (Cordero, 1994). Además, los marcos epistémicos ya no se refieren a los fenómenos de variación o cambio como en los marcos anteriores. Con base en las discusiones anteriores y debido a que los fenómenos de variación o cambio son el referente en el que surgen los conceptos de derivada e integral, y también son los que favorecen pensar la integral, hablando cognoscitivamente (Cordero, 1994), nuestro trabajo se desarrolla en el contexto del marco epistémico de Newton. Sin embargo, el análisis realizado en el apartado anterior (2) nos permitió precisar, en cierto modo, el tipo de problemas cuya solución exige de una integración, lo cual condensamos así: *son los problemas específicos que se derivan de los fenómenos de variación o cambio. Estos problemas específicos no se refieren a las causas del fenómeno de variación (¿por qué varían?), sino al cuánto varían una vez que se reconoce cómo varía el fenómeno; es decir, se plantean preguntas acerca de la ley que cuantifica (cantidad desconocida F(t) que relaciona funcionalmente a las variables involucradas) al fenómeno de variación o cambio. La configuración de esta ley depende de si son dadas, o no, las condiciones iniciales del problema específico.* En primer lugar analizamos dos categorías de relaciones involucradas en las leyes que cuantifican al fenómeno de variación o cambio. Primera categoría: dadas las condiciones iniciales del problema, encontrar la ley que cuantifica al fenómeno de variación o cambio. Segunda categoría: encontrar la ley que cuantifica al fenómeno de variación o cambio cuando no son conocidas las condiciones iniciales del problema. De cada categoría se derivan tres posibles situaciones, según la pregunta que se plantea en el problema específico derivado de un fenómeno de variación. Para la primera categoría, tres situaciones[2] posibles son:



2 El concepto de situación es tomado en el sentido del apartado sobre las situaciones del escrito La Théorie des Champs Conceptuels de Vergnaud (1990a); es decir, los procesos cognoscitivos y las respuestas del sujeto son función de las situaciones a las que se enfrenta.

en donde: SA=Situación A(*Predicción*); SB=Situación B(*Predicción*); SC=Situación C(*Acumulación*); T=Transformación; $F(t_0)$=Condición inicial conocida. En las tres situaciones se inicia la discusión de integración porque la pregunta es sobre la cantidad desconocida ($F(t)$, $F(t_n)$, *o* $F(t_n)$-$F(t_0)$ según sea el caso) que se quiere hallar. Además, se requiere reconocer cómo está variando el fenómeno de variación ($dF(t)/dt$).

Así, es posible analizar a cada una de las situaciones con las siguientes expresiones:

(SA): *Predicción* $*F(t_0)+\int_{t_0}^{t}F'(t)dt=F(t)$ *Antiderivación*

$$*F(t_0)+F'(t_0)(t-t_0)+\frac{F''(t_0)(t-t_0)^2}{2!}+\frac{F'''(t_0)(t-t_0)^3}{3!}+\ldots=F(t) \textit{ Derivación sucesiva}$$

(SB): *Predicción* $*F(t_0)+\int_{t_0}^{t_n}F'(t)dt=F(t_n)$ *Antiderivación*

$$*F(t_0)+F'(t_0)(t_n-t_0)+\frac{F''(t_0)(t_n-t_0)^2}{2!}+\frac{F'''(t_0)(t_n-t_0)^3}{3!}+\ldots=F(t_n) \textit{Derivación suce}$$

$$*F(t_0)+\sum_{i=0}^{n-1}F'(t_i)\Delta t\approx F(t_n) \text{ Suma}$$

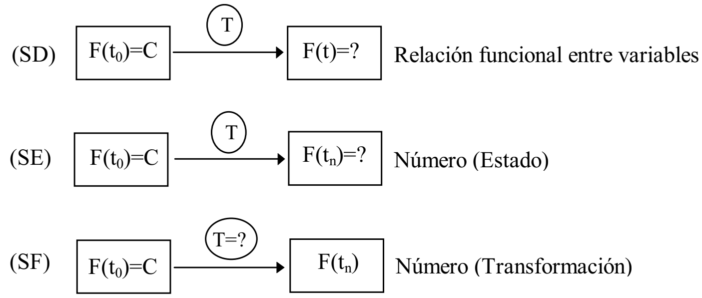
(SC): *Acumulación* $*F(t_n)-F(t_0)=\int_{t_0}^{t_n}F'(t)dt$ *Antiderivación*

$$*F(t_n)-F(t_0)=F'(t_0)(t_n-t_0)+\frac{F''(t_0)(t_n-t_0)^2}{2!}+\ldots \textit{ Derivación sucesiva}$$

$$*F(t_n)-F(t_0)\approx\sum_{i=0}^{n-1}F'(t_i)\Delta t \textit{ Suma}$$

Las tres situaciones abarcan a la llamada integración definida porque las condiciones iniciales del problema están dadas.

Para la segunda categoría las tres situaciones son:



en donde: SD=Situación D; SE=Situación E; SF=Situación F; T=Transformación; *C*=Condición inicial desconocida. En las tres situaciones se inicia la discusión de integración porque la pregunta es sobre la cantidad desconocida ($F(t)$, $F(t_n)$, *o* $F(t_n)-C$ según sea el caso) que se quiere hallar. Además, se requiere reconocer cómo está variando el fenómeno de variación ($dF(t)/dt$).Así, es posible analizar a cada una de las situaciones con la siguiente expresión:

(SD): $*C+\int F'(t)dt = F(t)$ *Antiderivación*

(SE): $*C+\int F'(t)dt = F(t)$ y evaluar en t_n *Antiderivación*

(SF): $*F(t_n)-C = \int F'(t)dt$ *Antiderivación*

Estas tres situaciones abarcan a la integración indefinida porque las condiciones iniciales del problema no están dadas y en donde la *predicción y acumulación* son desvanecidas.

Discusión final

Nuestra investigación nos permitió percibir a *la epistemología del Cálculo integral* en el sentido de caracterizar la epistemología de un campo conceptual, *anclado en un sistema de prácticas sociales (Predicción, Acumulación),* construido a partir de un marco epistémico como el de Newton y cuya naturaleza está centrada en relaciones funcionales entre variables y sus variaciones y en la construcción de sistemas de transformación que permiten pasar de los estados iniciales (presente), de las variables de los fenómenos de variación, a los estados finales (futuro) en sus formas de número-estado futuro o función-estado futuro en donde es inherente la noción de *predicción* en tanto práctica social así como la necesidad de calcular la diferencia entre los estados finales e iniciales en donde subyace la noción de *acumulación* en tanto práctica social detonada por la práctica de predecir.

Un aspecto importante a resaltar fue que tuvimos necesidad de reformular la visión de la teoría de los campos conceptuales en el sentido de que fue necesario incorporar nociones como la *predicción* y la *acumulación* que no están ancladas a la actividad matemática sino que pertenecen a la esfera de la actividad humana por lo cual visualizamos una especie de *campo de prácticas sociales (por ejemplo, Predicción y Acumulación)* como ejes organizadores del Cálculo integral escolar.

De manera que todo lo anterior permite tener elementos para propiciar la relación entre lo conceptual y lo algorítmico en instituciones escolares específicas además de tener un punto de partida para futuras investigaciones con el fin de rediseñar la matemática escolar. Nuestra visión alternativa se ubica dentro de los esfuerzos para desarrollar una aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa cuyo objetivo fundamental consiste en *rediseñar el discurso matemático escolar con base en prácticas sociales.*

Referencias Bibliográficas

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas.* Disertación doctoral no publicada, Cinvestav, México.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la Integral y la construcción de sus significados: un estudio del Discurso Matemático Escolar*. Disertación doctoral no publicada, Cinvestav, México.

Cordero, F; Muñoz, G; Solís, M. (2003). *La integral y la noción de variación*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

García, R. (2000). *El conocimiento en construcción. De las formulaciones de Piaget a la teoría de sistemas complejos*. España: Gedisa.

Muñoz, G. (1999). Aspectos Epistemológicos de la Relación entre lo Conceptual y lo Algorítmico, en la integración. *29 Congreso Anual de la Jean Piaget Society* (pp. 14-15). México.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3* (2), 131-170.

Piaget, J. y García R. (1994). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI.

Vergnaud, G. (1990). La Théorie des Champs Conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques 10*(3), 133-170.

Dialéctica Entre lo Conceptual y lo Algorítmico Relativa a Prácticas Sociales con Cálculo Integral

Germán Muñoz
Centro Investigación en Matemática Educativa-Universidad Autónoma de Chiapas
México
german@cimateunach.org
Pensamiento Matemático Avanzado, Pensamiento Variacional, Socioepistemología – Nivel Superior

Resumen

Una problemática propia de la enseñanza en la que están inmersos los estudiantes de Cálculo integral consiste en la separación entre lo conceptual y lo algorítmico (*C y A*). En la génesis histórica encontramos una evidencia de la relación dialéctica entre lo *C y A* en el contexto del marco epistémico de Newton enraizado en la práctica social de *predecir*. A partir de lo anterior buscamos desentrañar las condiciones para propiciar la dialéctica entre lo *C y A* en escenarios socioculturales específicos donde se desarrollan ciertas prácticas sociales, por ejemplo, una institución escolar cuya naturaleza es la formación de usuarios de la matemática. Nuestros hallazgos sostienen por un lado la dialéctica entre lo *C y A* y por otro la relatividad de lo *C y A* respecto de la actividad humana asociada a prácticas sociales con matemáticas en un contexto sociocultural específico.

Introducción.

De la problemática planteada buscamos desentrañar las condiciones para propiciar la relación entre lo conceptual y lo algorítmico (vista como una unidad dialéctica) con base en prácticas sociales desarrolladas en escenarios socioculturales específicos. En la *génesis histórica* encontramos una evidencia de la dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico (*C y A*) en el contexto del marco epistémico de Newton anclado a la práctica social de predecir (Cantoral, 2001; Piaget & García, 1994). De manera que construimos un campo conceptual del Cálculo (Muñoz, 2000), es decir, un conjunto de situaciones que le dan sentido al Cálculo integral y que implican la relación entre lo *C y A* con base en el marco epistémico de Newton y en la perspectiva de la integral vía la noción de *acumulación* (Cordero, 2003) así como en el referente de la teoría de campos conceptuales (Vergnaud, 1990). Actualmente dicho campo conceptual lo percibimos más en términos de un campo de prácticas sociales organizadas alrededor de tres ejes: *la predicción, la acumulación y la constantificación de lo variable*. Nuestras investigaciones nos han permitido percibir a *la Didáctica del Cálculo integral* en el sentido de identificar las condiciones para propiciar y controlar la *génesis artificial*, de la relación dialéctica entre lo *C y A*, que necesariamente exige el funcionamiento del sistema didáctico inmerso en un contexto sociocultural específico donde se desarrollan ciertas prácticas sociales. Presentamos evidencias que sostienen la existencia de la relación entre lo *C y A*, su naturaleza dialéctica y su carácter relativo respecto de prácticas sociales específicas. Nuestra investigación se ubica dentro de los esfuerzos para desarrollar una aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa.

Existencia de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico

Para abordar la problemática fue necesario matizarla en dos posibles preguntas: ¿La separación es originada por ciertos factores del funcionamiento del sistema didáctico?; o ¿Existe esa separación en el origen y desarrollo histórico del Cálculo integral?. La perspectiva histórica considerada, toma en cuenta los cambios de marco epistémico [1], es decir, la reformulación de preguntas cruciales y cosmovisiones asociadas a través de las cuales el Cálculo integral se ha originado. Analizamos antes del siglo XVII, por ejemplo, cuando Aristóteles estudió el movimiento de los cuerpos el marco epistémico considerado fue: ¿Cuales son las *causas reales* del movimiento? (Piaget y García, 1994) pregunta que tuvo sentido en una cosmovisión donde *el estado natural de las cosas era el reposo* (en época paralela en la civilización China había una cosmovisión donde *el estado natural de las cosas era el movimiento* y por ende tenía sentido la pregunta: ¿Cuáles son las *causas reales* del reposo?). Dicho marco Griego originó descripciones cualitativas del movimiento (fenómeno de variación), es decir, no se generaron procedimientos para cuantificar el movimiento simplemente porque no era parte de su marco epistémico. En los siglos XVII y XVIII se siguen estudiando los mismos fenómenos de variación (curvas geométricas, movimiento de cuerpos), pero con otros marcos. Así, Galileo estudió el movimiento de los cuerpos, y su marco epistémico fue: ¿Qué relaciones se establecen entre distancias y tiempos de caída de los cuerpos? (Piaget y García, 1994) pregunta que tuvo sentido en una cosmovisión en donde *el estado natural de las cosas era el reposo y el movimiento* y por ende el principio de inercia fue construido. En dicho marco Galileo elimina las preguntas sobre *causas reales* que hacían referencia a cualidades (atributos) e introduce mediciones (*medir* es comparar para establecer relaciones entre distancias y tiempos). El pasaje de atributos a relaciones implica una identificación de parámetros y su consiguiente cuantificación. Pero no sólo se trata de mediciones, sino que Galileo introduce el concepto de relación funcional entre las variables, que caracteriza el estado de movimiento de un cuerpo en momentos diferentes de su trayectoria; esto supone la introducción del tiempo como variable independiente. Ahora analicemos el marco epistémico de Newton cuando estudiaba el movimiento de los cuerpos; este marco era: ¿Cómo se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidos los valores de los parámetros en un momento dado y en lugar dado (es decir, las llamadas condiciones iniciales)? (Piaget y García, 1994) pregunta que tuvo sentido en una cosmovisión en donde *el estado natural de las cosas era el reposo y el movimiento*. Así, el objeto fue *calcular* la evolución posterior del sistema de movimiento sin plantearse otras preguntas sobre las *causas reales* de él. Pero la evolución misma es calculada sobre la base de un sistema de transformaciones que permiten pasar de los valores de las variables, en el estado inicial, a los valores que adquieren en cualquier otro instante. Esta transición de causas últimas a sistemas de transformación fue un paso decisivo en la historia de la mecánica, uno de los pilares mas sólidos de la revolución del siglo XVII, y significó una modificación profunda en la idea de la relación entre la matemática y el mundo de los fenómenos físicos (Piaget y García, 1994). Es decir, el hecho de que la pregunta sea *calcular la evolución posterior* implica cuantificar estados

1 "...en cada momento histórico y en cada sociedad, predomina un cierto marco epistémico, producto de paradigmas sociales y epistémicos. Una vez constituido un cierto marco epistémico, resulta indiscernible la contribución que proviene de la componente social o de la componente intrínseca al sistema cognoscitivo. Así constituido, el marco epistémico pasa a actuar como una ideología que condiciona el desarrollo ulterior de la ciencia. Dicha ideología funciona como obstáculo epistemológico que no permite desarrollo alguno fuera del marco conceptual aceptado. Sólo en los momentos de crisis, de revoluciones científicas, hay una ruptura de la ideología científica dominante y se pasa a un estadio diferente con un nuevo marco epistémico..." (Piaget & García, 1994, p. 234)

posteriores de cierta variable, en función de otra, a partir de las condiciones iniciales para *predecir* la evolución de un fenómeno de variación o cambio. En este contexto aparece el sentido de la noción de *Predicción* en tanto práctica social asociada al surgimiento del Cálculo infinitesimal. Lo anterior constituye una evidencia de la imposibilidad de la separación entre lo conceptual y lo algorítmico en la génesis histórica del Cálculo integral debido a que existe una relación muy estrecha entre la noción de *predicción* y el instrumento predictor *serie de Taylor* (Cantoral, 2001).

Dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico

Al atender la problemática planteada al principio, identificamos teóricamente un aspecto que tienen en común lo conceptual y lo algorítmico *(C y A)*. A continuación presentamos un bosquejo del argumento para realizar dicha identificación.

Por una parte, en la enseñanza de la Matemática se ha reducido el concepto de integral a la definición de integral de Cauchy o de Riemann (en tanto objeto de enseñanza) y al estudiante como sujeto cognoscente se le obliga a interactuar con la definición en tanto objeto de conocimiento. Sin embargo, a partir de los trabajos de Cantoral (2001) y Cordero (2003) hemos encontrado evidencias que nos muestran que en el desarrollo sociogenético del Cálculo integral han jugado un papel crucial las nociones de *Predicción y Acumulación.* Por supuesto existen otras nociones asociadas al concepto de integral, sin embargo, es importante remarcar que las nociones mencionadas adquieren sentido para el estudiante cuando el objeto de conocimiento se caracteriza por una situación problema derivada de un fenómeno de variación o cambio. También, en cierto modo, la teoría de los campos conceptuales señala que un concepto no puede ser reducido a su definición, si se está interesado en su aprendizaje y en su enseñanza, sino que es a través de situaciones problema por resolver como un concepto adquiere sentido para el estudiante (Vergnaud, 1990).

Por otra parte, la enseñanza de la Matemática ha reducido el aprendizaje de los algoritmos a la ejercitación del procedimiento subyacente del algoritmo. En cierto modo, se intenta obligar al estudiante a interactuar con un procedimiento preestablecido en tanto objeto de conocimiento, lo cual conduce a cierto tipo de Empirismo debido a que se cree que el estudiante por simple condicionamiento, a través de la experiencia de realizar ejercicios repetitivos de los procedimientos preestablecidos, hace una copia pasiva de la realidad externa (en este caso el procedimiento preestablecido juega el papel de realidad externa) u ocurre un simple reflejo-copia del saber ajeno a través de la transmisión social. Hemos analizado tres procedimientos de integración (antiderivación, suma y derivación sucesiva) socialmente establecidos y de acuerdo a la definición de algoritmo en el contexto de los campos conceptuales es indispensable una situación problema, previamente clasificada, para discutir ciertos aspectos de la algoritmia (Muñoz, 2000).

Este análisis nos conduce a identificar un *objeto de conocimiento común a lo conceptual y lo algorítmico,* el cual se refiere a que existen situaciones problema (en tanto objeto de conocimiento) a partir de las cuales se forman nociones y procedimientos, en estrecha relación, asociados al Cálculo integral. Este aspecto en común es una condición necesaria para propiciar la relación entre lo conceptual y lo algorítmico aunque no suficiente para los fines de la Matemática Educativa.

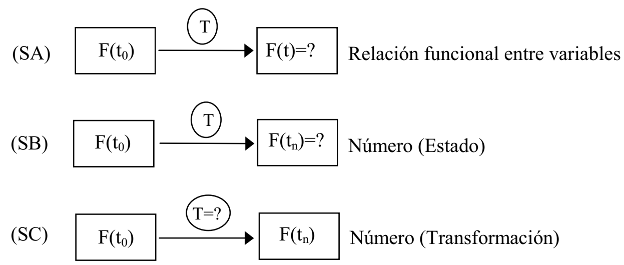
Con el fin de contrastar nuestro hallazgo teórico (condición necesaria) con otras perspectivas, analizamos el libro "Understanding in Mathematics" de Sierpinska (1994), con el propósito de tener un referente, en cierto modo, respecto a lo que podría significar *entender un concepto o entender un algoritmo* y encontrar relaciones entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. De acuerdo a la autora, más precisamente hablaríamos de actos de entendimiento de un concepto, actos de entendimiento de un algoritmo o de actos de entendimiento de un problema que permita pensar en la integración, es decir, el objeto de entendimiento sería el Concepto, el Algoritmo o el Problema en donde dicho objeto interactúa con el sujeto que entiende (el cual tiene una base de entendimiento). Si se pudieran establecer relaciones entre los actos de entendimiento de un concepto y los actos de entendimiento de un algoritmo, a partir de dos objetos de entendimiento distintos, no nos permitiría observar la génesis de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico vista como unidad dialéctica. También, analizamos la perspectiva de Dubinsky (1991) y hemos discutido con él la Teoría APOS (por sus siglas en Inglés) desde la perspectiva de nuestra problemática, por ejemplo, la etapa de Acción de un concepto tiene algunos aspectos de la naturaleza de un algoritmo, entonces, qué sería la etapa de Acción cuando lo que se está abordando es un algoritmo, cómo sería la etapa de Proceso, Objeto y Esquema en dicho caso. Otro punto de discusión fue si suponemos que tenemos la Descomposición Genética de un concepto y la Descomposición Genética de un algoritmo cómo podemos estudiar la relación entre los conceptos y los algoritmos. Nuevamente es posible estudiar la relación, sin embargo, esta perspectiva no nos permite observar la génesis de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico vista como unidad dialéctica.

Las implicaciones del hallazgo teórico, en su sentido epistemológico, de haber identificado el *objeto de conocimiento común* a lo Conceptual y lo Algorítmico (condición necesaria) se pueden resumir en: **a)**La posibilidad de mirar a lo Conceptual y lo Algorítmico como una unidad dialéctica (mirar las propiedades de la molécula de agua H_20, por ejemplo, por qué extingue el fuego). Y no correr el riesgo de analizar por separado a lo Conceptual (las propiedades de H, por ejemplo, enciende el fuego) y a lo Algorítmico (las propiedades de 0, por ejemplo, mantiene el fuego) y enseguida buscar las condiciones para propiciar la relación (a través de mirar la adición de las propiedades de H y 0) **b)**El centrar la atención en un objeto de conocimiento común a lo Conceptual y lo Algorítmico y no en dos objetos de conocimiento nos permitió desentrañar algunos aspectos de la génesis de lo Conceptual y lo Algorítmico a través de analizar la interacción de los estudiantes ante una secuencia de situaciones problema diseñadas a partir de la naturaleza del *objeto de conocimiento común*.

De manera que la identificación de la condición anterior nos permitió mirar otra perspectiva, en lugar de centrar la atención en dos objetos de conocimiento (la definición por una parte y el procedimiento preestablecido por la otra) y enseguida buscar condiciones de relación entre los dos objetos. Nuestras investigaciones nos han conducido a buscar las relaciones a partir de precisar, en lo más posible, las características del objeto de conocimiento común[2] a lo conceptual y a lo algorítmico (Muñoz, 1999). El objeto de conocimiento común lo caracterizamos tomando en cuenta los cambios de marco epistémico (Piaget y García, 1994) y teniendo como referencia las investigaciones de Cantoral (2001) y Cordero (2003), además por la naturaleza de la problemática nos auxiliamos de la teoría de los campos conceptuales

[2] Muñoz, G. (1999). *Aspectos Epistemológicos de la Relación entre lo Conceptual y lo Algorítmico, en la integración*. Ponencia aceptada en la modalidad de análisis teórico e impresión de un resumen en el Programa del 29 Congreso Anual de la Jean Piaget Society: Sociedad para el Estudio del Conocimiento en Desarrollo. Tema central del Congreso: Desarrollo del Conocimiento, espejismos reduccionistas. Antiguo Colegio de San Ildefonso, Ciudad de México, sede del Congreso. Se realizó del 2 al 5 de Junio de 1999.

(Vergnaud, 1990). En resumen, las características del objeto de conocimiento común a lo Conceptual y a lo Algorítmico las precisamos, en lo más posible, a través de precisar el tipo de problemas cuya solución exige de una integración; después analizamos y clasificamos las diferentes situaciones que se derivan de ese tipo de problemas y que le dan sentido al Cálculo integral (Muñoz, 2000). La naturaleza del objeto de conocimiento común se desarrolla en el contexto del marco epistémico de Newton, lo cual implica que está enraizado en la práctica social de *predecir*. Sin embargo, el análisis realizado en el apartado anterior nos permitió precisar, en cierto modo, el tipo de problemas cuya solución exige de una integración, lo cual condensamos así: *son los problemas específicos que se derivan de los fenómenos de variación o cambio. Estos problemas específicos no se refieren a las causas del fenómeno de variación (¿por qué varían?), sino al cuánto varían una vez que se reconoce cómo varía el fenómeno; es decir, se plantean preguntas acerca de la ley que cuantifica (cantidad desconocida F(t) que relaciona funcionalmente a las variables involucradas) al fenómeno de variación o cambio. La configuración de esta ley depende de si son conocidas (primera categoría), o no (segunda categoría), las condiciones iniciales del problema específico.* De cada categoría se derivan tres posibles situaciones, según la pregunta que se plantea en el problema específico derivado de un fenómeno de variación. Por ejemplo, para la primera categoría, tres situaciones[3] posibles son:



en donde: SA=Situación A(*Predicción*); SB=Situación B(*Predicción*); SC=Situación C(*Acumulación*); T=Transformación; $F(t_0)$=Condición inicial conocida. En las tres situaciones se inicia la discusión de integración porque la pregunta es sobre la cantidad desconocida ($F(t)$, $F(t_n)$, *o* $F(t_n)-F(t_0)$ según sea el caso) que se quiere hallar. Además, se requiere reconocer cómo está variando el fenómeno de variación ($dF(t)/dt$).

Relatividad de la dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico

Nuestra investigación nos permitió percibir la dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico como relativa a un campo conceptual anclado a un sistema de prácticas sociales (Predicción, Acumulación y Constantificación de lo variable) que son el eje de la organización de las situaciones problema que le dan sentido al Cálculo integral. Dicho campo fue construido a partir de un marco epistémico como el de Newton (siglo XVII) y cuya naturaleza está centrada en relaciones funcionales entre variables y sus variaciones y en la construcción de sistemas de transformación que permiten pasar de los estados iniciales (presente), de las variables de los fenómenos de variación, a los estados finales (futuro) en sus formas de número-estado futuro

3 El concepto de situación es tomado en el sentido del apartado sobre las situaciones del escrito La Théorie des Champs Conceptuels de Vergnaud (1990a); es decir, los procesos cognoscitivos y las respuestas del sujeto son función de las situaciones a las que se enfrenta.

o función-estado futuro en donde es inherente la noción de *predicción* en tanto práctica social así como la necesidad de calcular la diferencia entre los estados finales e iniciales en donde subyace la noción de *acumulación* en tanto práctica social detonada por la práctica de predecir.
Con base en la perspectiva planteada anteriormente hemos diseñado e implementado actividades para el salón de clases (Lic. en Ingeniería Civil y Maestría en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Chiapas en México) en donde un hallazgo importante consiste en evidenciar que la noción de *constantificación de lo variable* aparece sistemáticamente como intentos de los grupos humanos para cuantificar lo variable en el contexto de la práctica social de predecir en el sentido de construir la posibilidad de sustituir un movimiento con velocidad variable por un movimiento con velocidad constante (es decir, subyace la pregunta ¿bajo que condiciones se puede sustituir un movimiento por otro?) considerando el intervalo completo de tiempo o los intervalos mostrados en la tabla de valores numéricos. Algunos estudiantes acumulan distancias y otros no (los que toman el intervalo completo de tiempo). De manera que la *constantificación de lo variable* se constituye como una especie de práctica social detonada por la práctica social de predecir y ambas le dan sentido a la práctica social de acumular distancias. Lo anterior muestra algunos elementos que justifican la compatibilidad entre la naturaleza dialéctica de lo *C y A* de un contexto sociocultural del siglo XVII con la naturaleza dialéctica de lo *C y A* de un contexto sociocultural contemporáneo específico en donde está inmersa una institución escolar cuya naturaleza es la formación de usuarios de la matemática, lo cual implica su relatividad debido a que la relación dialéctica se conserva pero su naturaleza es distinta.

Un aspecto importante a resaltar fue que tuvimos necesidad de reformular la visión de la teoría de los campos conceptuales en el sentido de que fue necesario incorporar nociones que no están ancladas a la actividad matemática *per se* sino que pertenecen a la esfera de la actividad humana por lo cual visualizamos una especie de *campo de prácticas sociales (por ejemplo, Predicción y Acumulación y Constantificación de lo variable)* como ejes organizadores del Cálculo integral escolar. De manera que todos los elementos planteados nos están permitiendo tener referentes robustos para propiciar la relación entre lo conceptual y lo algorítmico en instituciones escolares específicas además de tener un punto de partida para futuras investigaciones con el fin de rediseñar la matemática escolar. Nuestra visión alternativa se ubica dentro de los esfuerzos para desarrollar una aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa cuyo objetivo fundamental consiste en *rediseñar el discurso matemático escolar con base en prácticas sociales.*

Referencias Bibliográficas

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la Analiticidad.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2003). Re*construcción de significados del Cálculo integral: La noción de acumulación como una argumentación.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Holanda: Kluwer Academic.

Muñoz, G. (1999). Aspectos Epistemológicos de la Relación entre lo Conceptual y lo Algorítmico, en la integración. *29 Congreso Anual de la Jean Piaget Society* (pp. 14-15). México.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3*(2), 131– 170.

Muñoz. G, Cordero, F. y Solís, M. (2003). *La integral y la noción de variación*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Piaget, J. y García R. (1994). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: Siglo XXI.

Sierpinska. A. (1994). *Understanding in Mathematics*. Studies in Mathematics Education Series. Vol. 2. School of Education University of Exeter: The Falmer Press.

Vergnaud, G. (1990). La Théorie des Champs Conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques 10*(13), 133-170.

¿Cómo Trabajar los Límites Especiales $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1$ y $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$?

Catalina Navarro y Ricardo Cantoral
Cinvestav-IPN
México
nasacamx@yahoo.com.mx, rcantor@cinvestav.mx
Pensamiento Variacional – Nivel Superior

Resumen

De acuerdo a la costumbre didáctica los límites $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1$ y $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$, son abordados en el curso de cálculo diferencial e integral, se comienza desde el nivel medio superior, donde la matemática es considerada como elemental según los propios maestros, en el que afirman que regularmente no se tratan en clase debido a la complejidad que representan las demostraciones. En este artículo mostramos una forma diferente a la usual para abordar los límites especiales referidos, en la que se inicia con el estudio de algunas características visuales entre las gráficas de las funciones algebraicas y las trigonométricas.

Introducción

Nuestra intención con este escrito es la de familiarizar al lector con las transformaciones y operaciones gráficas que suelen usarse para graficar a las funciones algebraicas y a las funciones trigonométricas, dado que en la enseñanza tradicional al estudiar el tema funciones, se trabajan primero las funciones algebraicas para posteriormente tratar con las funciones trigonométricas de forma que se induce la idea de que ambos tipos de funciones son independientes unas de otras. Por lo que al trabajar con límites que involucran la combinación de funciones algebraicas y trigonométricas que es el caso de los límites especiales que presentamos, notamos que la confusión aumenta dado que de inicio se creyó que no había relación alguna entre dichos tipos de funciones, de tal manera que al trabajar con los límites especiales regularmente responden que ambos límites son indefinidos, de ahí el interés de nosotros por mostrar una forma original de abordar los límites especiales en los que consideramos características comunes existentes entre los dos tipos de funciones así como también considerar las operaciones básicas gráficas entre ellas.

Transformaciones Gráficas de Funciones Algebraicas y Trigonométricas.

Comenzaremos trabajando funciones algebraicas y trigonométricas, para las primeras consideraremos las funciones prototipo $f(x)=x,\ f(x)=x^2\ y\ f(x)=x^3$ y para las ultimas tomaremos como funciones prototipo a *f*(*x*)=*sen* (*x*) y *f*(*x*)=*cos* (*x*), en las que aplicaremos algunas transformaciones gráficas como *f*(*x*)+*B*, *f*(*x*)-*B*, $f(x+\mathrm{C})$, $f(x-\mathrm{C})$, $\mathrm{A}f(x)$, -$\mathrm{A}f(x)$,

$\frac{1}{\mathrm{A}}f(x)$, $\frac{1}{-\mathrm{A}}f(x)$, $f(\mathrm{A}x)$ y $f(-\mathrm{A}x)$. Al desarrollar esta parte, es importante trabajar todas funciones prototipo aplicando todas las transformaciones gráficas, en este artículo nosotros consideraremos sólo alguna función prototipo (considerando una algebraica y una trigonométrica) en la que aplicaremos alguna transformación gráfica, con el propósito de localizar las características gráficas existentes comunes entre las algebraicas y las trigonométricas.

Tomando como base a las funciones $f(x)=x^2$ y $f(x)=sen(x)$ les que aplicamos las transformaciones *f*(*x*)+*B* y *f*(*x*)-*B* para obtener la siguiente gráfica.

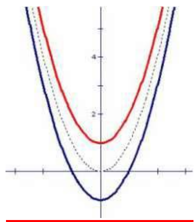


Figura 1

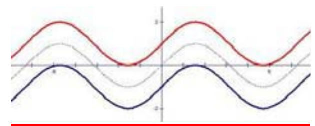


Figura 2

Donde observamos que el parámetro B produce un traslado de las gráficas sobre el eje *y*, es decir, si el signo del parámetro B es positivo las gráficas se trasladan en la dirección creciente del *y*, si el parámetro B es negativo las gráficas se trasladan hacia abajo. Consideremos ahora a las funciones prototipo $f(x)=x^3$ y $f(x)=\cos(x)$ a las que les aplicaremos la transformación $f(x+\mathrm{C})$, $f(x-\mathrm{C})$, gráficamente observamos lo siguiente

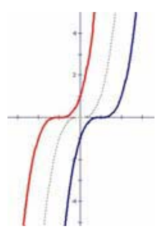


Figura 3

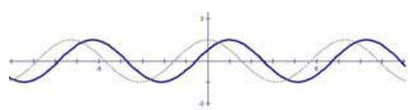


Figura 4

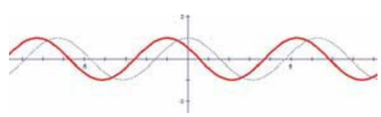


Figura 5

el parámetro C traslada a las gráficas sobre el eje *x*, más específicamente si el parámetro C tiene signo positivo las gráficas se trasladan sobre la parte negativa del eje *x*, si el parámetro C tiene signo negativo las gráficas se trasladan sobre la parte positiva del mismo eje.

Tomemos las funciones $f(x)=x^3$ y $f(x)=sen(x)$ a las que les aplicaremos la transformación $\mathrm{A}f(x)$, $\text{-A}f(x)$, $\frac{1}{\mathrm{A}}f(x)$ y $\frac{1}{-\mathrm{A}}f(x)$ (donde A no toma los valores del intervalo (-1, 1)) gráficamente observamos lo siguiente

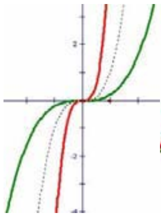


Figura 6

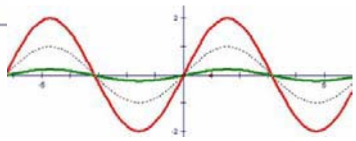


Figura 7

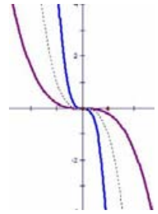


Figura 8

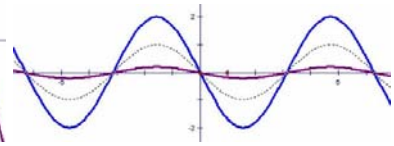


Figura 9

Si consideramos valores positivos y mayores que 1 (figuras 6 y 7), para $\mathrm{A}f(x)$ y $\frac{1}{\mathrm{A}}f(x)$ tenemos que para la primera, las alturas de las gráficas transformadas son más grandes que las respectivas alturas de la función prototipo mientras que para la otra transformación las alturas de las gráfica son menores a las alturas de la misma función, si ahora abordamos las transformaciones $-\mathrm{A}f(x)$ y $\frac{1}{-\mathrm{A}}f(x)$ donde A toma valores mayores a uno, partiendo de la gráfica prototipo observamos que esta se invierte, es decir, en donde la gráfica tenia alturas positivas ahora tendrá alturas negativas y viceversa, por lo que en las gráficas de las figuras 8 y 9 tenemos que las alturas de las gráficas transformadas cumplen las mismas características que en las transformaciones anteriores con la diferencia de que ahora se trabaja con viceversaciones. De acuerdo a lo anterior, partiendo de las funciones prototipo a las que podemos transformar de la siguiente manera: para las funciones algebraicas $f(x)=A(x+B)$, $f(x)=A(x+B)^2+D$ y $f(x)=A(x+B)^3+D$, para las funciones trigonométricas $f(x)=Asen(Cx+B)+D$ y $f(x)=A\cos(Cx+B)+D$, de donde podemos generalizar de la siguiente manera: el signo del parámetro A determina la inversión o la "NO" inversión de la gráfica, mientras que el valor del mismo parámetro determina si la grafica se acerca o se aleja del eje *x*. Sobre el parámetro B, éste determina si la gráfica se desplaza a la izquierda o derecha del eje *x*. El parámetro D determina desplazamientos sobre el eje *y*. Sobre el parámetro C que se observa en las funciones trigonométricas transformadas, éste afectará la amplitud de las funciones trigonométricas.

Operaciones Gráficas entre Funciones Algebraicas y Trigonométricas

En esta parte del escrito trataremos operaciones gráficas entre funciones algebraicas y trigonométricas en las que consideramos las gráficas prototipo y las transformadas, además de involucrar las operaciones básicas de la suma, resta, multiplicación y la división. Es importante primero familiarizar al estudiante con las funciones algebraicas, es decir, trabajar de inicio solamente con funciones algebraicas en las que se apliquen transformaciones gráficas así como desarrollar operaciones básicas gráficas entre el mismo tipo de función, posteriormente abordar a las funciones trigonométricas a las cuales al igual que a las funciones algebraicas, aplicar las transformaciones gráficas y desarrollar operaciones básicas gráficas para finalmente trabajar la combinación de las funciones mencionadas. Por ejemplo, comencemos trabajando con funciones algebraicas.

Multiplicar las siguientes funciones $f(x)=x,\ g(x)=(x-2)\ y\ h(x)=(x+2)$ gráficamente

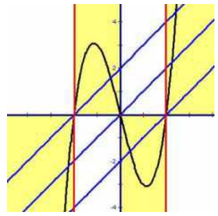


Fig. 10

Primeramente ubicamos los puntos donde las funciones dadas cortan al eje *x*, posteriormente analizamos las alturas de las mismas funciones por intervalos, es decir, en el intervalo $(-\infty,-2)$ las alturas de las funciones son negativas por lo que la nueva función en este intervalo será negativa, en el intervalo (-2, 0) la nueva función pasara por la parte positiva del plano cartesiano, dado que dos de las funciones dadas tienen alturas negativa y una positiva, en el intervalo (0, 2) dos de las funciones dadas tienen alturas positivas y una negativa por lo que la nueva gráfica pasará por la parte negativa del plano y por último en el intervalo $(2,\infty)$ la nueva gráfica estará en la parte positiva del plano cartesiano dado que las alturas de la funciones dadas son positivas, por lo que en las partes sombreadas pasará la nueva gráfica (ver figura 10).

Para calcular $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ con $g(x)=sen(x-2)sen(x)\ y\ h(x)=sen(x)$ haremos lo mismo que en las funciones algebraicas. Primeramente atenderemos al numerador de la función dada; es decir, graficaremos la función *sen x* (trabajada anteriormente) y la $sen(x-2)$, que sería la función *sen x* trasladada dos unidades a la derecha sobre el eje *x* y realizaremos la multiplicación, para obtener el numerador. Sabemos que todos los cruces de ambas funciones se conservarán en la nueva función y que, si determinamos las regiones por donde pasará la nueva gráfica, visualizaremos el producto de dichas funciones (figura 11).

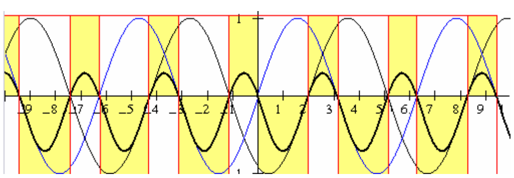


Figura 11

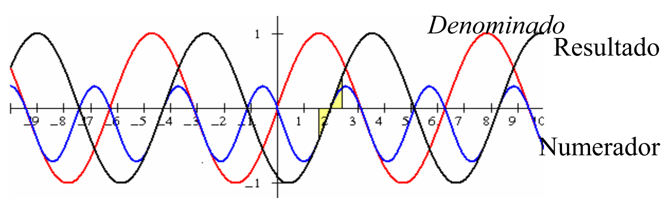


Figura 12

Ahora graficaremos el numerador y el denominador para determinar la función principal dada (figura 12). En donde se consideran alturas tanto del numerador y del denominador para determinar la nueva gráfica. Con base en lo anterior tenemos herramientas para trabajar la operación límite visualmente así como operar gráficamente con la combinación de las funciones anteriormente trabajadas en las cuales se miraron características gráficas. Por ejemplo: encontrar los límites $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(x)}{x}=1$ y $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x}=0$.

gráficamente podemos observar lo siguiente

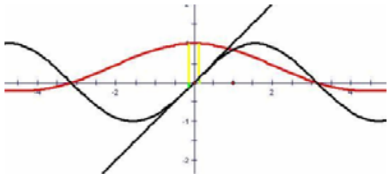


Figura 13

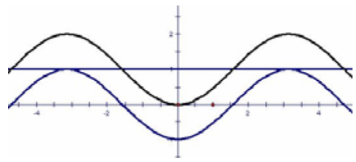


Figura 14

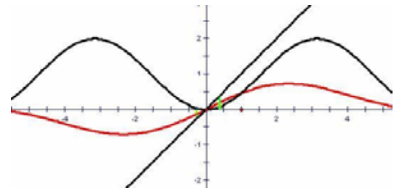


Figura 15

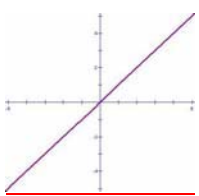
En la figura 13, realizamos la división de las funciones sen *x* entre *x* operando de igual manera que en los ejemplos anteriores (considerando alturas), posteriormente tomamos una vecindad alrededor del cero con la intención de visualizar la tendencia del límite cuando *x* tiende a cero, por lo que visualmente determinamos que $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1$, por otro lado para resolver el segundo límite comenzamos operando sobre el numerador de la expresión (ver figura 14), en donde realizamos la suma de las funciones dadas, posteriormente graficamos el numerador y el denominador de la expresión, con la intención de aplicar la operación del cociente similar a los ejemplos anteriores, tomando una vecindad alrededor del cero para visualizar la tendencia de la expresión cuando *x* tiende a cero tenemos que $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$ (ver figura 15).

A continuación mostramos el diseño de una ingeniería didáctica en el que se consideran los aspectos que aquí mostramos, con el cual se intenta profundizar y tratar una cantidad considerable de límites que en la actualidad no se trabajan en la clase.

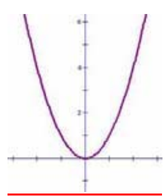
El Diseño de la Ingeniería Didáctica

Actividad 1.

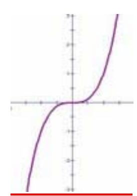
En esta actividad tenemos tres gráficas de las que calcularemos límites en alguna *x* en específico.



gráfica 1



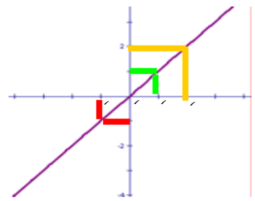
gráfica 2



gráfica 3

Por ejemplo: Tomando la gráfica 1 que representa a $f(x)=x$, en la que calcularemos los siguientes límites $\lim_{x\to -1} x$ $\quad\lim_{x\to 0} x$ $\quad\lim_{x\to 1} x$ $\quad\lim_{x\to 2} x$.

Si localizamos intervalos alrededor de los x= -1, 0, 1 y 2 en la función $f(x)=x$, gráficamente se observa lo siguiente.



Podemos determinar que:

$$\lim_{x\to -1} x = -1 \quad \lim_{x\to 0} x = 0 \quad \lim_{x\to 1} x = 1 \quad \lim_{x\to 2} x = 2$$

Ahora para las gráficas 2 y 3 se calculan los siguientes límites e identificarlos en la gráfica.

$$a)\ \lim_{x\to 0} x^2,\ b)\ \lim_{x\to -5} x^2,\ c)\ \lim_{x\to 3} x^2,\ d)\ \lim_{x\to 10} x^2,\ e)\ \lim_{x\to 0} x^3,\ f)\ \lim_{x\to -2} x^3,\ g)\ \lim_{x\to 3} x^3,\ h)\ \lim_{x\to -5} x^3$$

Si ahora nos basamos en las gráficas anteriores para calcular límites, donde se involucren operaciones básicas como suma, resta, multiplicación y división, donde involucremos $y = x$ o bien $y = A(x+B)$ entre las lineales, para las cuadráticas $y = x^2$ o bien $y = A(x+B)^2 + D$ y para las cúbicas $y = x^3$ o bien $y = A(x+B)^3 + D$. Considerando para los parámetros *A*, *B* y *D* valores específicos, además, de que ya sabemos que provocan cada uno de los parámetros en cada una de las gráficas primitivas.

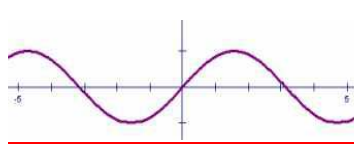
Por ejemplo calcular los siguientes límites y graficar las funciones correspondientes para observar gráficamente cada uno de los límites.

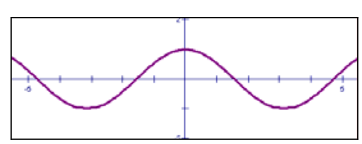
$$a)\ \lim_{x\to 1} 3x+1,\ b)\ \lim_{x\to 2} x-5,\ c)\ \lim_{x\to 1} x(2x+1),\ d)\ \lim_{x\to 2} \frac{x}{3},\ e)\ \lim_{x\to -1} x^2+2,\ f)\ \lim_{x\to 3} x^2-1,\ g)\ \lim_{x\to -3} 4(x-3)^2+2,$$

$$h)\ \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3},\ i)\ \lim_{x\to 3} 3(x-2)^3+4,\ j)\ \lim_{x\to -2} 2x^3-2,\ k)\ \lim_{x\to 5} 2(x+1)(x-2)(x)\ \text{y}\ l)\ \lim_{x\to 4} \frac{5(x+4)^3}{x+4}$$

Actividad 2.

Dadas las gráficas de las funciones *f*(*x*)=sen *x* y *f*(*x*)=cos *x*,





calcular los siguientes límites e identificar cada punto en la gráfica que le corresponda.

$a)\lim\limits_{x\to\pi} senx$, $b)\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} senx$, $c)\lim\limits_{x\to-\pi} senx$, $d)\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}} sen\,x$, $a)\lim\limits_{x\to\pi}\cos x$, $b)\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x$, $c)\lim\limits_{x\to-\pi}\cos x$, $d)\lim\limits_{x\to-\frac{3\pi}{2}}\cos x$

Ahora, calcularemos límites pero basándonos en gráficas trigonométricas, en donde involucraremos también operaciones básicas. Considerando en general las siguientes funciones $f(x)=Asen(Bx+C)+D$ o bien $f(x)=A\cos(Bx+C)+D$ asignando para los parámetros *A*, *B*, *C* y *D* valores específicos, además, de que ya sabemos que provocan cada uno de los parámetros en cada gráfica primitiva.

Por ejemplo calcular y graficar los límites.

$a)\lim\limits_{x\to 1} 3senx+2$, $b)\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} 3senx-2$, $c)\lim\limits_{x\to-3} 2sen(x+1)+2$, $d)\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{sen(x-2)sen(x)}{sen(x)}$, $e)\lim\limits_{x\to 0} 2\cos x+1$,

$f)\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\cos x-2$, $g)\lim\limits_{x\to 0} 4\cos(x+3)-2$, $h)\lim\limits_{x\to-2}\frac{4\cos x-1}{\cos x}$, $i)\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}(sen\,x-\cos x)$, $j)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{sen\,x}$,

$k)\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sen\,x-\cos x}{\cos 2x}$

Actividad 3.

A partir de las de las actividades 1 y 2, se resolverán otros límites con la misma idea, es decir, ahora combinaremos las gráficas algebraicas con las trigonométricas, sin perder de vista lo que provoca cada parámetro para dicha gráficas.

Calcular los siguientes límites:

$a)\lim\limits_{x\to 0}(x^2+\cos x)$, $b)\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{senx}{3x}$, $c)\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx}{3x}$, $d)\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen5x}{x}$, $e)\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$, $f)\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx}{x}$

Referencias Bibliográficas

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México: Prentice – Hall.

Cordero, F. y Solís, M. (2001). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo.* colección de Cuadernos Didácticos, Vol. 2, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

A Través de lo Periódico, el Sol y las Estrellas son mi Reloj

Hipólita Patricio, Carlos A. García y Jaime L. Arrieta
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
México
hipabu13_fm@yahoo.com.mx
Socioepistemología – Nivel Superior

Resumen

El presente trabajo fue elaborado como cartel para ser presentado en Relme-18. El cartel fue elaborado en base a la práctica que tienen algunas comunidades campesinas del estado de Guerrero para calcular la hora. En estas comunidades, predecir es una práctica cotidiana donde se recurre a la experiencia pasada y al comportamiento periódico de los fenómenos. La necesidad de calcular la hora y el tiempo en general, proviene de sus actividades, por ejemplo se requiere calcular las épocas de siembra y cosecha de sus productos, así como la hora que los animales bajan a tomar agua. Nuestro interés es comunicar como viven los conocimientos cotidianos en contextos específicos, en este caso, mostramos formas de cómo el comportamiento periódico del sol y las estrellas sirven como herramienta para calcular la hora.

Introducción

Son cuatro momentos importantes en la distribución del cartel, en el primero se hace la presentación, en el segundo, se explica la posición de las estrellas para calcular la hora, en el tercero se explica como a partir del movimiento del sol se calcula la hora y, por ultimo, se exponen nuestras concepciones con respecto a cómo se adscribe el trabajo en la línea de investigación que sustentamos, en particular a la relación que se establece entre los sistemas escolares y las diferentes comunidades de su entorno.

Primer momento

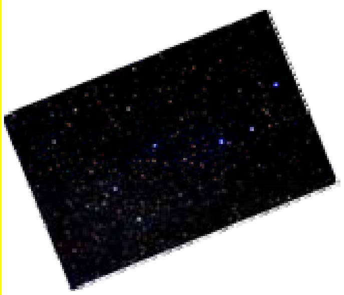
La voz del cartel es de un miembro de la comunidad en la cuál se sitúa nuestro trabajo. Aquí, se pretende mostrar no solo los vínculos familiares, sino los vínculos de la hija, dentro de un sistema escolar y la comunidad a la que no deja de pertenecer.

"Mi nombre es Constantino Patricio Graciano. Actualmente vivo en el pueblo de Huehuetán, Municipio de Azoyú, Guerrero y me dedico al

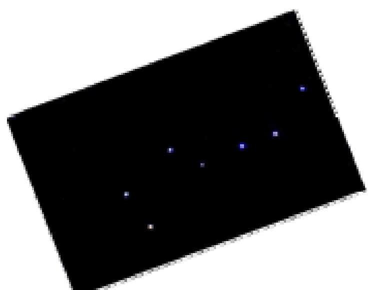
Segundo momento

En este lugar, el de la voz, nos narra las situaciones vivénciales en su comunidad que lo llevaron a calcular la hora, utilizando el movimiento periódico de las estrellas. Esta práctica ha sido trasmitida de generación en generación y aún, actualmente, sigue siendo ejercida por algunas personas mayores. La transmisión de esta práctica ha sido interrumpida, las nuevas generaciones no la ejercen. Esta cuestión, nos lleva a considerar que los procesos de transmisión generacional de las prácticas en las diferentes comunidades, son procesos complejos que requieren investigación desde el punto de vista de la construcción social del conocimiento.

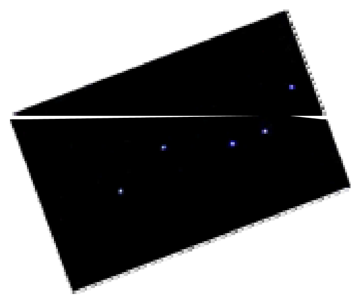
"Empecé a utilizar esta herramienta a la edad de veinte años, por que tenía la necesidad de trasladarme al pueblo de Huehuetán, Guerrero. Para hacer la marcha que muchos jóvenes al igual que yo teníamos que hacer obligatoriamente para obtener la cartilla. Teníamos que estar puntual a las siete de mañana y si llegábamos tarde éramos multados con cuatro bultos de cemento, que equivalían a veinticinco centavos cada uno. Entonces por no contar con un reloj o un radio, para saber la hora. Empecé a recordar que mi abuelito me enseño de pequeño como saber la hora a través de las estrellas, basándose en una constelación de estrellas a la que



Son las 5 de la mañana por que ya tumbo la cabeza el carro



A las 6 el carro queda solo pues las demás estrellas se ocultan, y el se empieza a ocultar por partes



Aproximadamente de 6:10 a 6:20 el carro desaparece

Tercer momento

En este momento, el que narra, nos habla de cómo es que calcula la hora utilizando el movimiento periódico del sol

El sol esta justamente en mi cabeza
Es medio día

11:00 A. M. El reflejo sigue subiendo me da a un lado de la cabeza

4:00 P. M. El sol sigue bajando, el reflejo me da en la frente

9:00 A. M. El reflejo del sol me da exactamente en el ojo

6:00 P. M. Se empieza a ocultar el sol

"Durante el día puedo calcula la hora exacta o aproximada mirando el sol, basándome en su movimiento y su reflejo. Aprendí a usar esta herramienta como reloj, por que, durante la jornada de trabajo, cuando salía a comer, tenia que darle agua a mi ganado y además contarlo. Pero tenía un problema, pues el ganado solo se juntaba en un determinado tiempo, que era justamente a la hora de tomar agua, si llegaba tarde, ya no podía contar el ganado hasta el otro día. Es por eso que me ví

Cuarto momento

La intención es mostrar la multiplicidad de vínculos establecidos entre los sistemas escolares y su entorno social. Así, la problemática que atiende esta investigación es la tensión entre las prácticas del uso de las matemáticas y las prácticas escolares.

El trabajo esta inmerso en la línea de investigación que atiende la construcción social del conocimiento por los actores en relación a las prácticas que son ejercidas, que indaga la producción y reproducción del conocimiento en contextos escolares y no escolares. Se plantea que la práctica podría ser base de un diseño de aprendizaje para ser llevado al contexto escolar.

Las palabras de Pola (Hipólita Patricio) son de singular relevancia: "cuando mi Papá me estaba explicando la gente se sorprendía vernos mirar al cielo. En el pueblo de Huehuetán, algunas personas le dijeron a mi Papá '¿Qué haces Costa?' ¿Ya eres un científico o qué? En Acapulco, mis compañeros me decían '¿Qué haces Pola?' ya no estudies tanto, ya te están haciendo efecto las matemáticas vas a quedar loca". Consideramos que esto sucede por que la valoración de las cosas cambia de acuerdo al lugar y al tiempo, de acuerdo a la cultura. Ya que en la actualidad por el uso de la tecnología, estamos perdiendo gran parte de nuestra cultura. Antes era común que la gente mirara al cielo, sin embargo, actualmente si alguien ve al cielo lo consideran loco o científico, según la ubicación en que vivan. Para saber la hora, la gente ya no mira hacia arriba, mira hacia abajo, ve su reloj.

La perspectiva, socioepistemología

El presente trabajo es parte de una investigación en desarrollo que discurre acerca de la correspondencia entre la predicción y las prácticas sociales asociadas a ellas en diferentes comunidades. El artículo parte de nuestra visión del quehacer en nuestra disciplina, concebimos los sistemas escolares en su correlación con su entorno social, consideramos las problemáticas que se atienden en las investigaciones como complejas donde convergen múltiples dimensiones, entre otras la cognitiva, la didáctica y la epistemológica en contextos sociales concretos. De esta manera se considera a lo periódico como algo más que la definición de una función periódica, se concibe a lo periódico como una red de herramientas y prácticas, donde la predicción juega un papel fundamental.

Desde nuestra perspectiva, la socioepistemología, las problemáticas consideran no sólo al triángulo didáctico, maestro-alumno-contenidos, sino que, toma cómo fundamental, el contexto social. Esta consideración modifica la percepción que se le imprime a los conocimientos, al papel del profesor y, desde luego, al papel del alumno. Lo social no es una dimensión mas que se agrega a la perspectiva, al ser considerada modifica a las demás, el todo es algo más que la suma de las partes.

Lo periódico vive en comunidades, escolares y extraescolares, e investigar las prácticas y las herramientas relacionadas con ello es la intención de nuestra investigación. En este caso, mostramos como vive lo periódico en una comunidad predominantemente campesina del estado de Guerrero, México. El estudio, va más allá de un estudio etnográfico, pues se investiga cómo es que vive lo periódico en diferentes comunidades, con la intencionalidad explícita de intervenir en los sistemas educativos.

Lo periódico vive en diversas comunidades, una de estas es la que se muestra en este trabajo, sin duda, investigando en otras comunidades, como la de ingenieros electrónicos, lo periódico adquirirá su concreción. Consideramos que la relación entre los sistemas escolares y sus entornos se devela, en gran parte, en la investigación de como viven los conocimientos en la comunidades.

Esta práctica se está perdiendo, la gente ya no ve al cielo

Los invitamos a utilizar a través de lo periódico, el sol y las estrellas como reloj

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. y Buendía, G. (2001). La predicción como argumento para construir la periodicidad en el contexto interactivo del salón de clases. *Revista C + 1*, *2*, 6-7.

Arrieta, J. (2003). *Las practicas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Disertación doctoral no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Las Prácticas de Hacer Semejanzas en los Triángulos y la Emergencia de las Razones Trigonométricas

Hipólita Patricio, Carlos A. García y Jaime L. Arrieta
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
México
hipabu13_fm@yahoo.com.mx
Socioepistemología – Nivel Medio, Superior

Resumen

Desde nuestra perspectiva, la construcción del conocimiento está vinculada con el ejercicio de las prácticas sociales (Arrieta, 2003). Así, las herramientas trigonométricas, en particular el seno, se encuentran asociadas a las prácticas donde son utilizadas. La herramienta seno, se encuentra relacionada con diferentes prácticas, que en uno u otro contexto son prioritarias. Por ejemplo, la herramienta seno como modelo periódico se encuentra asociado a las prácticas de comunidades de ingenieros en electrónica, mientras que en otras comunidades el seno es utilizado como razón de dos lados de un triángulo rectángulo. La forma en cómo vive en contextos escolares, muestra que generalmente no es utilizada como herramienta y que aún cuando se introduce como razón trigonométrica el seno esta desligado de la práctica de hacer semejanza con triángulos.

Introducción

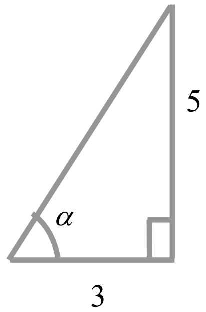
El artículo es parte de una investigación en proceso, que intenta relacionar las herramientas trigonométricas con prácticas específicas que dan cuenta, de su construcción y su sentido en el quehacer de diferentes comunidades. En esta relación establecemos que las herramientas trigonométricas, como el seno, están ligadas a prácticas de diferente naturaleza.

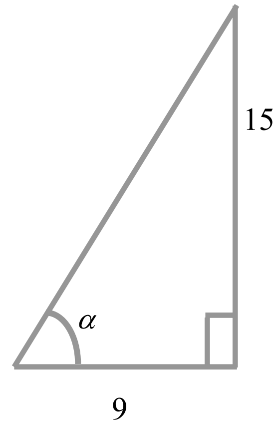
Desde nuestra perspectiva, la construcción del conocimiento está vinculada con el ejercicio de prácticas sociales (Arrieta, 2003). Esto implica que cuestionamos el "conocimiento" que se adquiere de forma tradicional, en el salón de clases, donde el profesor enseña y el estudiante aprende, apartado de las problemáticas extraescolares y de la interacción con los demás. Los estudiantes sólo reciben y el profesor aporta.

Los estudiantes podrán resolver diferentes ejercicios planteados por el profesor y por el libro de texto, podrán aprobar sus exámenes, pero no movilizan este conocimiento en diferentes escenarios, como los planteados en la vida cotidiana o en otras ciencias (Arrieta, 2003).

Planteamos que hay un divorcio entre las prácticas de hacer semejanzas con los triángulos y las razones trigonométricas en situaciones escolares como herramienta para intervenir. En este contexto, elaboramos una situación, donde comprobamos nuestras afirmaciones.

Se pide a los actores que coloquen en el paréntesis el número que crean conveniente.





(   ) (   )

1. Sen α = 0.8574
2. Sen α = 0.1111

Fueron encuestados once estudiantes de tercer año de la licenciatura en matemáticas de la Facultad de Matemáticas de la UAG. Ellos, han cursado cursos de álgebra, trigonometría, geometría analítica y sintética, cálculo en una y varias variables, y han mostrado un aprendizaje eficiente de acuerdo al sistema escolar vigente.
Las respuestas dadas por los once estudiantes, se ubicaron en dos categorías, obteniendo los siguientes resultados:

Alumnos	Respuestas posibles	Resultados
11	1 y 1	0
	1 y 2	7
	2 y 1	4
	2 y 2	0

Observamos que, las respuestas de los alumnos no corresponden a las respuestas esperadas tradicionalmente. Puesto que los dos triángulos son semejantes, el valor del seno del ángulo α es el mismo, sin embargo, no se obtuvieron respuestas en este sentido.
Es de nuestro interés analizar las formas en que, los alumnos, argumentan sus respuestas y los elementos en que se apoyan.

Algunos de los argumentos, utilizados para justificar su respuesta fueron los siguientes. Seis alumnas argumentaron, basándose en el valor de los catetos, cuatro alumnas, se refirieron "a valores pequeños, que corresponden a números pequeños", dos alumnas responden, que a números grandes corresponde resultado pequeño. Mientras que, tres alumnas argumentaron en base al tamaño del triángulo. Dos alumnas precisaron que contestaron al azar, porque no les alcanzó el tiempo para analizarlo detenidamente. De esta forma, confirmamos que la semejanza no es un argumento para determinar el seno de un ángulo. El discurso indica que el "conocimiento" que han adquirido en el contexto escolar no es utilizado.

Las razones trigonométricas

En la investigación bibliográfica buscamos cómo son tratados los temas en los libros más frecuentemente utilizados en el nivel medio superior en las escuelas del estado de Guerrero, México. Realizamos una investigación en los libros de Baldor (1981), y Valiente & Valiente (2002).

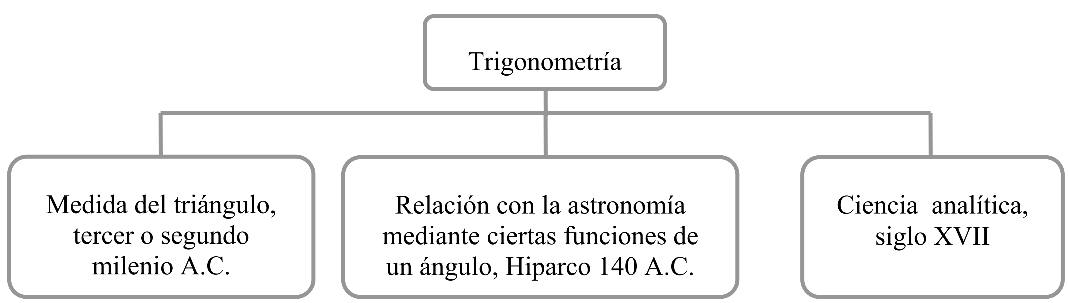
Baldor (1981), define las relaciones trigonométricas como razones, por ejemplo, el seno, es la razón entre la hipotenusa y uno de los catetos en un triangulo rectángulo. Al final del tema plantea una serie de ejercicios y problemas.

Valiente & Valiente (2002), define las razones trigonométricas de la misma manera. Estos autores introducen las razones trigonométricas, como la relación entre los lados de un triángulo.

El tema de las razones trigonométricas esta contenido en tercer grado de secundaria. Con la intención, de develar las formas en que viven las herramientas trigonométricas, se realizaron algunas entrevistas entre profesores de secundaria y encontramos que, en general, los profesores no abordan el tema, por ser uno de los últimos.

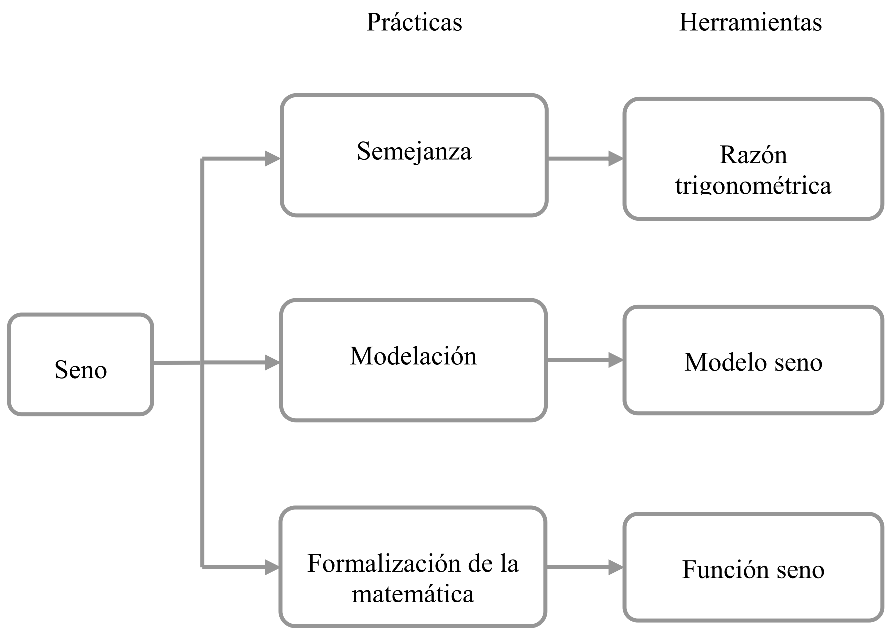
Una sola entidad, diferentes prácticas asociadas

De acuerdo con Smith (1980) podemos ver la trigonometría de tres maneras distintas



Sin embargo, esta clasificación de las diferentes formas que adquiere la trigonometría esta en relación a cuestiones temporales, nuestro análisis epistemológico tendrá que contemplar las prácticas donde la trigonometría ha sido y es utilizada. Así, por ejemplo, el seno es utilizado en diferentes comunidades para realizar sus tareas. En comunidades de arquitectos podemos encontrar actividades que están relacionadas con la semejanza y el seno es empleado como una razón entre dos lados, mientras que en comunidades de ingenieros electrónicos la modulación de ondas utiliza al seno como un instrumento periódico, como una onda. En comunidades de

Matemáticos la función seno cobra importancia en la formalización de la estructura matemática.
En base a la relación de prácticas y herramientas podemos proponer un esquema



Esta vinculación entre las prácticas y las herramientas que son utilizadas en su ejercicio podemos relacionarlas con las prácticas del sistema escolar,

Destacamos cuatro momentos de las herramientas trigonométricas en el contexto escolar

1. Las razones trigonométricas se introducen como razones entre lados de triángulos rectángulos. De esta manera, las razones trigonométricas, tienen especial relevancia puesto que se conservan invariantes cuando los triángulos cambian su tamaño y conservan las proporciones. O sea el seno es invariante respecto a la semejanza. Los ejercicios y problemas propuestos se basan en utilizar esta razón invariante en diferentes triángulos, de esta manera, las razones trigonométricas son utilizadas como herramientas para situaciones donde la semejanza es la práctica.

Abordar las herramientas trigonométricas como razones de lados de triángulos rectángulos plantea limitaciones, por ejemplo no se contempla ángulos negativos o mayores de noventa grados, puesto que los ángulos de un triángulo rectángulo están entre cero y noventa grados. Pero lo que es fundamental, el seno no es visto como un modelo periódico.

2. Las funciones trigonométricas son generalizadas a partir del círculo unitario. Esta práctica generaliza a las funciones trigonométricas y establece un puente entre las razones trigonométricas y los modelos trigonométricos como modelos de periodicidad.

3. Las funciones trigonométricas son utilizadas como modelos de la periodicidad, es decir las herramientas trigonométricas son empleadas para modelar fenómenos periódicos. De esta manera, por ejemplo, se modela a través del seno el movimiento de un péndulo.

4. Las series de senos y cosenos son empleadas para modelar fenómenos periódicos como las ondas electromagnéticas, la cuerda vibrante o la transmisión del calor.

Problemática y perspectiva teórica

La perspectiva teórica con que se aborda la presente investigación toma al sistema social como un sistema complejo, donde los actores aprenden al ejercer prácticas. En el sistema escolar, que es el lugar que se atiende, confluyen dimensiones que sistémicamente relacionadas conforman un todo. Las dimensiones que consideramos en este todo tienen que ver con la naturaleza social del conocimiento, su formación histórico cultural y la producción y reproducción social del mismo, la dimensión epistemológica; la cognitiva, con relación a las interacciones que da lugar el proceso de aprendizaje, las interacciones entre los actores y las interacciones con el mundo; las formas de intervención en los procesos escolares, la didáctica; que adquieren sus particularidades en contextos sociales concretos. A esta perspectiva se le ha llamado socioepistemología (Cordero, 2002; Cantoral & Farfán, 2003; Arrieta, 2003).

La socioepistemología, se caracteriza por su carácter complejo, donde confluyen múltiples dimensiones, las cuales son inseparables, retroactuantes y dinámicas, desde esta perspectiva los sistemas educativos están ligados a su entorno social, a las comunidades donde se encuentran insertos.

En nuestra perspectiva, el aprendizaje es una práctica eminentemente social, en la cual intervienen múltiples factores y se manifiesta el peso del contexto social en donde se sitúa (Arrieta 2003). Concebimos el aprendizaje inserto en un escenario socio cultural y físico, ubicado en un tiempo y un espacio, donde los actores tienen un pasado y una perspectiva, el aprendizaje es práctica situacional.

La tesis central que sostiene la línea de investigación a la cuál se inscribe este trabajo, es que los actores al ejercer prácticas sociales construyen sus conocimientos matemáticos, y estos conocimientos modifican, a la vez, sus prácticas sociales. De esta manera, el saber y el conocer se encuentran en las acciones, esto es en el ejercicio de las prácticas sociales. Entonces nuestra atención se centra en qué hacen, en cómo los actores realizan diferentes prácticas sociales, con qué las realizan, sus herramientas, así como las interacciones que suceden entre los actores.
Las herramientas matemáticas disponibles en las prácticas sociales dependen de las comunidades y de las actividades de dichas comunidades, la forma de utilizar las herramientas matemáticas y los procesos de pensamiento que interactúan en conjunto serán consecuencia de las necesidades de los actores para realizar dichas prácticas sociales.

Nuestra problemática se ubica en la tensión entre las prácticas escolares y las prácticas de comunidades de profesionistas. En perspectiva, este trabajo analizará las prácticas en comunidades y escolares en relación a las herramientas trigonométricas.

Esta visión viene a trastocar la forma tradicional de la enseñanza de las matemáticas en los sistemas educativos, viene a plantear la construcción de los conocimientos matemáticos situados en contextos sociales extraídos de comunidades de profesionistas, plantea la construcción del conocimiento ligado a necesidades e intencionalidades de los actores tendientes a transformar su vida social.

Conclusiones y perspectivas

Desde nuestra perspectiva, para que el conocimiento sea movilizado, en diferentes escenarios debe ser construido a partir del ejercicio de ciertas prácticas sociales. Por lo que es de nuestro interés identificar la relación con las prácticas donde este es utilizado.

Finalmente deseamos determinar la importancia que se le da al conocimiento escolar en la vida cotidiana, qué tan frecuentemente es utilizado. Hasta encontrar que prácticas sociales dan origen a las relaciones trigonométricas para que estas sean la base de un diseño de aprendizaje. De esta manera, se concreta, nuestra hipótesis, la práctica social esta en estrecha relación con las herramientas utilizadas y, así, construimos nuestros conocimientos. En particular hacer semejanzas con triángulos nos lleva a la construcción de las razones trigonométricas.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Disertación doctoral no publicada, Cinvestav, México.

Baldor, A. (1981). *Geometría y trigonometría.* Madrid: Ediciones y Distribuciones Códice.

Cantoral, R. y Farfán R. (2003). Matemática educativa: una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6* (1), 27 - 40.

Cordero, F. (2002). Lo social en el conocimiento matemático: los argumentos y la reconstrucción de significados. En J. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 16, Tomo I, pp. 45-50). Chile.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in Mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics 38*(1), 11 - 50.

Smith, D. (1980). *History of Mathematics.* New York, USA: Dover Publications.

Valiente, S. y Valiente, S. (2002). *Matemáticas 3*. México: Ediciones Castillo.

El Tratamiento de Fenómenos Físicos para Aprender Matemáticas

Pericles Ramírez y Gildardo Cortés
CETis No 116, Universidad Autónoma de Guerrero
México
pericles_r@hotmail.com, gildardo_59@hotmail.com
Socioepistemología – Nivel Medio

Resumen

La Historia de la ciencia muestra la íntima relación entre la física y la matemática y cómo en nuestros días esta relación, en el ambiente escolar, se ha ido perdiendo. Nuestro planteamiento intenta recuperar el papel de la experimentación en el aula. Proponemos diseños de aprendizaje basados en prácticas de modelación de fenómenos físicos, para que alumnos construyan conocimientos con significado. En el documento damos evidencia de cómo este planteamiento puede ser posible. La investigación es desarrollada, adoptando la perspectiva teórica llamada Socioepistemología y la metodología empleada es sustentada en la Ingeniería Didáctica.

Introducción

La modelación de fenómenos es una práctica poco usual en el aula. Históricamente observamos que esta práctica, se ejerce en los laboratorios experimentales en diferentes áreas de la ciencia, pero pocas veces en el salón de clase. Nuestro interés en este trabajo es reportar los resultados de la puesta en escena de un diseño de aprendizaje basado en prácticas de modelación que hemos llamado la "guía secuencial". Este diseño fue elaborado con el propósito de aportar elementos de cómo los estudiantes construyen su conocimiento matemático en el ejercicio de la modelación, acorde a la línea de investigación donde se inscriben las practicas sociales y la construcción social del conocimiento, es decir la Socioepistemología.

El escenario fue el CETis 116 en Acapulco, Gro., México. Definimos la investigación sin perder de vista el entorno, el tiempo, escenarios y actores sociales, las problemáticas concretas y las perspectivas teóricas generales.

Inicialmente, nos cuestionamos acerca de cómo los estudiantes construyen conocimientos matemáticos en el contexto del aula de física. Con ello, nos fijamos en la actividad de los estudiantes alrededor de la modelación de fenómenos relacionados con el *trabajo* físico y reportamos cómo los estudiantes construyen una caracterización de lo que es llamado trabajo en física y cómo obtienen modelos lineales con el mismo, empleando la distancia y la fuerza. Observamos cómo los estudiantes al tiempo de construir términos como trabajo, diseñan modelos. Desde esta perspectiva, consideramos que las actividades duales (física-matemática) de modelación de fenómenos, tienen una intención explícita, el desarrollo de procesos de matematización en el laboratorio para generar conocimiento matemático y, paralelamente, aprender física en el aula.

La perspectiva que asumimos es la Socioepistemología y la metodología empleada es la Ingeniería Didáctica, adecuándola a nuestra perspectiva. Estas adecuaciones provienen de

considerar no los objetos matemáticos, sino las prácticas de modelación como la base de los diseños. De esta manera, tomamos como guía los diseños de las secuencias que presentan Arrieta (2003) y Cortés (2003), donde aparecen diseños basados en prácticas de modelación.
En el esquema de la figura 1, se presenta una visión estructural de los diseños de aprendizaje que se proponen en este trabajo como "guía secuencial", que muestra la relación entre las diferentes actividades propuestas.

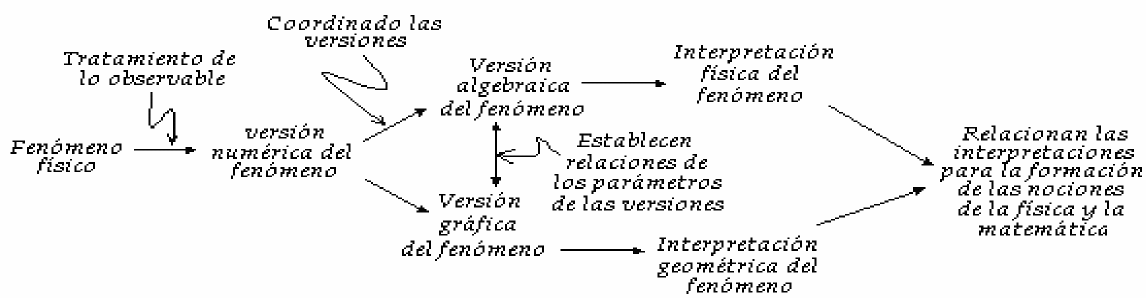


Figura 1. Esquema acerca del diseño de las secuencias de aprendizaje

Una experiencia de modelación

Diseñamos una situación de aprendizaje, en la puesta en escena participaron 24 estudiantes del CETis 116 de la especialidad de computación. Los grupos se dividieron en seis equipos (mesas de trabajo) de cuatro estudiantes, así como dos profesores, uno de matemáticas y otro de física, con la intervención de los investigadores G. Cortés y J. Arrieta. Se utilizaron dos cámaras fijas y una móvil para tener una imagen completa del escenario.

El diseñó se dividió en tres fases, la primera "el trabajo", la segunda fase, "la confrontación entre el trabajo físico y el trabajo cotidiano" y, por último, "la experimentación".
Las actividades de la fase I, responden a una etapa donde se discuten las diferentes concepciones acerca de lo que es el trabajo en diferentes escenarios. Estaá fase consiste en analizar individualmente y discutir cada una de las situaciones planteadas a los estudiantes. Los integrantes de la mesa anotaron su conclusión individual en una hoja y, por separado, la conclusión del equipo. Posteriormente la conclusión grupal fue consensuada entre los integrantes de las demás mesas de trabajo.

La discusión en la mesa de trabajo uno se muestra esquemáticamente en el siguiente cuadro. La posición de Deysi (representante de la mesa de trabajo1) se manifiesta en el consenso general de su mesa.

<table>
<tr><td>Situación</td><td colspan="3">Si un trabajador desplaza un bulto cien metros y le pago $100.00, ¿Cuánto le pagaría, si sólo lo desplaza 50 metros?, ¿Cuánto si lo desplaza 10 metros?, ¿Cuánto se lo desplaza 200 metros?, ¿Por qué?</td></tr>
<tr><td></td><td>Si lo desplaza 50 m
d = $
∴ 50 m = $50.00</td><td>Si lo desplaza 50 m
d = $
∴ 50 m = $50.00</td><td>Si lo desplaza 50 m
d = $
∴ 50 m = $50.00</td></tr>
<tr><td>¿Por qué?</td><td colspan="3">Como cada metro es igual a $1.00, quiere decir que la distancia que recorre el hombre es igual a lo que le pagan.</td></tr>
</table>

La segunda secuencia consistió en la pregunta, *¿Cómo calcularías el trabajo que realiza un hombre que transporta cien kilos de cemento una distancia de 30 metros?*
El consenso de la mesa de trabajo uno, se muestra en el siguiente cuadro

Situación	*Datos:* $m = 100\,kg$ $d = 30\,m$ $T = ?$	*Fórmulas* $T = F\,d$ $F = m\,a = W = m \cdot g$ $F = m\,g$	*Procedimientos* $T = F \cdot d$ $T = (980\,N)(30\,m)$ $T = 29.400\,J$	$F = (100\,kg)(9.8\,m/s^2)$ $F = 980\,kg \cdot m/s^2$ $F = 980\,N$

La siguiente actividad, corresponde a la fase II, consistente en "*La confrontación entre el trabajo físico y el trabajo cotidiano*". El objetivo de esta fase es analizar individualmente, y discutir el concepto de trabajo en todas sus connotaciones. Cada integrante de la mesa anotó su conclusión individual en una hoja.
Algunas opiniones acerca de la interacción en esta fase, están expresadas en los siguientes cuadros, con sus respectivas preguntas.

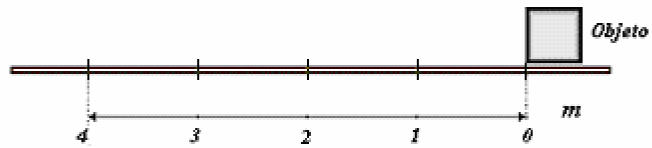
Situación	¿Es trabajo lo que hace un profesor cuando da su clase?
Si, porque el ser maestro es un trabajo en cuanto a su profesión, enseñarnos a comprender, analizar diferentes situaciones. *No, porque en la física, el profesor no aplica ninguna fuerza, pero si recorre una distancia.*	
Situación	¿Es trabajo, no desplazar el objeto después de aplicarle una fuerza?
No, no es trabajo, porque trabajo sería cuando está desplazando el objeto y aplicando una fuerza hacia él; pero el objeto ya está inmóvil o en reposo.	
Situación	¿Es trabajo, si alguien carga una viga?
No, porque aquí no se está dando una altura o una distancia, aquí nada más se dice que está cargando un peso o que está aplicando una fuerza.	

La tercera fase de la guía secuencial es "*La experimentación*". En esta parte del diseño de la guía secuencial, el objetivo consiste en que "*los actores experimentan situaciones de trabajo desarrollando sus sentidos en correspondencia con las ideas confrontadas*". En esta fase se diseñaron dos actividades.
La actividad 3 consiste en la interacción de los estudiantes y los profesores entorno a la manipulación de los instrumentos de medición y realizar anotaciones sobre sus observaciones, interactuando con el profesor activamente, para familiarizar a los estudiantes con el material de trabajo.

Se pidió a los estudiantes participaran en la siguiente actividad.

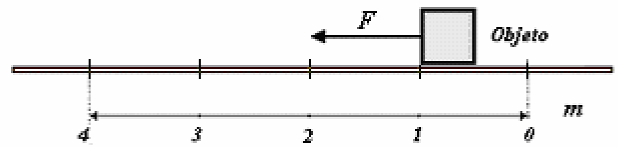
Sobre una superficie horizontal (piso) dibuje una línea recta y, sobre ella, haga una marca a cada metro y enumérelas del cero al cuatro, como lo muestra la *figura 2* (como si fuera una regla graduada gigante). Coloque en la primera marca (0) un objeto cuyo peso ($\boldsymbol{w}$) esté en $1 \leq w \leq 3$ kg sobre nuestra regla gigante.

Figura 2



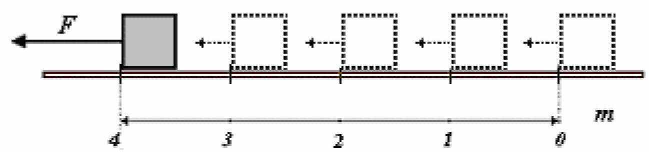
Desplace el objeto hasta la segunda marca (1), como lo muestra la *figura 3*, haga un registro de las observaciones para su análisis.

Figura 3



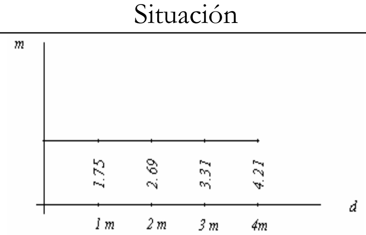
Repita esta acción cinco veces hasta lograr mover el objeto de manera uniforme, posteriormente repita el procedimiento hasta la tercera marca, y así sucesivamente desplace el objeto, hasta las demás marcas, como lo muestra la *figura* 4.

Figura 4



Actividad 4. La puesta en escena de la guía secuencial, consiste en que "Los integrantes del equipo deben repetir el experimento realizado en la actividad 3 (desplazar el objeto 1 m., observar lo que ocurre cuando se aplica una fuerza uniforme, y anotar lo observado en el fenómeno), utilizaron para tal efecto el dinamómetro, y objetos cuyos pesos deben tener el recomendado (peso de 2 kg., 3 kg., 4 kg., 5 kg., y 6 kg.), hacer el experimento lo más fiel posible a la fase de familiarización, es decir, la fuerza que apliquen sea uniforme, después desplazarlo 2 m., luego 3 m., hasta llegar a 4 m.; organicen dichas mediciones".
Los resultados de la primera parte de esta actividad se muestran en los siguientes cuadros.

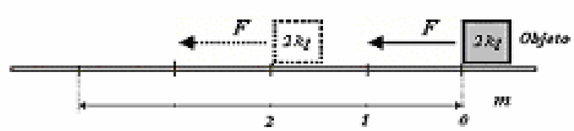
<table>
<tr><th>Situación</th><th>¿Qué características encuentras en los datos observados?</th></tr>
<tr><td><table><tr><th>Distancia</th><th>Masa</th><th>Tiempo</th></tr><tr><td>1 m
2 m
3 m
4 m</td><td>2 kg
2 kg
2 kg
2 kg</td><td>1.75 s
2.64 s
3.31 s
4.21 s</td></tr></table></td><td>Que la fuerza y la velocidad actúan para que el tiempo varié</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Situación</th><th>¿De qué otra forma organizarías a los datos?</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Con gráficas!!</td></tr>
<tr><td>Situación</td><td>¿Cuál es el valor del trabajo, cuando la distancia sea 10 m?</td></tr>
</table>

Datos: $T = F \cdot d$; $F = m \cdot a$; $a = \frac{v}{t}$; $v = \frac{d}{t}$; $d = 10m$; $m = 2kg$; $t = 2.9s$; $T = ?$	$v = \frac{10m}{2.9s} = 3.44 \, {}^{m}/_{s}$ $a = \frac{v}{d} = \frac{3.44 \, {}^{m}/_{s}}{2.9s} = 1.18 \, {}^{m}/_{s^2}$ $F = m \cdot a$; $F = (2kg)(1.18 \, {}^{m}/_{s^2})$; $F = 2.3N$ $T = F \cdot d$; $T = (2.3N)(10m)$; $T = 23.7J$
Situación	¿Cuál es el valor de la distancia, cuando el trabajo es 100?
Datos: $T = F \cdot d$; $T = 100J$; $F = m \cdot g$; $d = ?$; $m = 2kg$	$F = m \cdot g$; $F = (2kg)(9.8 \, {}^{m}/_{s^2})$; $F = 19.6N$ $T = F \cdot d$; $d = \frac{T}{F}$; $d = \frac{100Nm}{19.6N}$; $d = 5.1m$

Las cuestiones planteadas en la segunda parte se muestran en los siguientes cuadros, los integrantes de las mesas de trabajo arrastraran el objeto una distancia de dos metros, cuya masa sea 2 kg., como se muestra en la figura 5 (procurar que al arrastrar el objeto el indicador de la fuerza en el dinamómetro este fijo, que no se mueva), repetir dos o tres veces más hasta estar seguro de tus mediciones.

Figura 5



Situación	¿Qué características encuentras en los datos observados?				
	Que el tiempo varía de la velocidad con que arrastre la canastilla.				
Situación	¿Dé que otra forma puedes organizarlos?				
Masa	*2 kg*	*3 kg*	*4 kg*	*5 kg*	*6 kg*
Tiempo	*2.77*	*2.74*	*2.49*	*2.65*	*2.78*
Distancia	*2 m*	*2 m*	*2 m*	*2 m*	*2 m*
Situación	¿Puedes hacer alguna predicción con los datos registrados? Explica				
Si, haciendo fórmulas					

Situación	¿Cuál será el trabajo, cuando le apliquemos una fuerza de 10 N?	
Datos:	$T = ?$ $F = 10 \ N$ $d = m$	$T = F \cdot d$ $T = (10 \ N)(2 \ m)$ $T = 20 \ J$

Situación	Dado el trabajo de 20 Nm, determinar la fuerza aplicada	
Datos:	$d = 2\ m$ $T = 20\ Nm$ $F = ?$	$T = F \cdot d$ $\frac{T}{d} = F$ $\quad F = \frac{20Nm}{2m} = 10N$

Conclusiones

Del análisis de los resultados, se puede concluir que, en la fase I, se cumple que "los estudiantes hacen alusión al trabajo de forma explicita, como una relación de distancia recorrida y la fuerza utilizada". Hacen cálculos explícitos del trabajo realizado. En la fase II, observamos que "los actores discuten sus ideas, sobre lo que entienden acerca de lo que es trabajo, en todos sus sentidos, es decir que le dan diferentes significados". Establecen un ambiente discursivo entre lo que es el trabajo físico y el trabajo en el sentido cotidiano. Por último en la Fase III, "Los actores experimentan el concepto de trabajo desarrollando sus sentidos en correspondencia con las ideas confrontadas".

Lo anterior arroja que el papel jugado por el tratamiento de fenómenos físicos para aprender matemáticas, es fundamental en la enseñanza de la matemática y de la física, de aquí que en el diseño de la guía secuencial están implícitas las prácticas sociales de modelación y la construcción social del conocimiento, en el contexto del aula en donde estas son ejercidas para cada secuencia vivida. Los estudiantes, al ejercer las prácticas de modelación, aprenden matemáticas y en consecuencia los conceptos físicos tienen mayor significado. De la misma manera, experimentando con fenómenos físicos le encuentran aplicación a la matemática, el discurso de los alumnos favorece a las correcciones de los integrantes de las mesas de trabajo para el forjamiento de sus construcciones, así como el discurso en la confrontación grupal y las contribuciones que el profesor pueda aportar en la interacción de las secuencias. Los estudiantes entienden el concepto de modelo, lo aplican en las versiones graficas y tablas, pocos logran el modelo algebraico experimentalmente y coinciden en el método clásico o tradicional.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Disertación doctoral no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Cortés, G. (2003). *Relaciones cuadráticas entre variables desde la perspectiva de matemáticas a partir de observaciones.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Análisis Socioepistemológico de los Procesos de Matematización de la Predicción en la Economía

Saúl Ezequiel Ramos
Cimate Universidad Autónoma de Chiapas, Facultad de Ciencias Sociales
México
saulramcan@hotmail.com
Socioepistemología – Nivel Superior

Resumen

En esta investigación se analizó los objetivos de una Licenciatura en Economía y el papel que tienen las matemáticas en la curricula de ésta. Estos planes y programas de estudio afirman que las matemáticas son una herramienta para resolver problemas diversos de la teoría económica, sin embargo, el discurso matemático de los libros de economía y cálculo no cumplen con dicho objetivo. Por lo anterior nos preguntamos ¿Cómo el cálculo infinitesimal originado en la practica social de predecir se incorpora a otras prácticas sociales asociadas a la economía?, por lo que tratamos de determinar que la matemática que utiliza la Ciencia Económica en especial el cálculo infinitesimal está ligado a la predicción y a los procesos de variación y cambio.

Presentación

El objetivo de la Licenciatura en Economía de la Facultad de Ciencias Sociales de la Universidad Autónoma de Chiapas es el formar un profesional con conocimientos teóricos, que sea capaz de entender e interpretar la realidad económica mundial y del país. Para lograr lo anterior se implemento el área de instrumentales, esta área debe proporcionar el instrumental matemático y su relación con la economía, afirmando que una vez que el alumno conozca la herramienta y su uso, podrá resolver problemas diversos de la teoría económica. Incluir las matemáticas en la Ciencia Económica, se debe a que éstas deben dar soporte a la modelación, explicar fenómenos económicos y a la vez dar un sustento sólido y cuantitativo para que a través de ésta pueda analizar e integrar las diferentes variables necesarias para poder predecir un fenómeno económico. Para la construcción de modelos, la ciencia económica utiliza como herramienta una extensa gama de conceptos matemáticos. En la búsqueda de entender cuales fueron las causas que posibilitaron la incorporación de los saberes matemáticos en la economía y justificar su pertinencia en la curricula escolar, se ha encontrado que el cálculo infinitesimal tiene un papel muy importante en el proceso de la matematización de la Ciencia Económica desde sus orígenes hasta la actualidad y a la vez ha sido un tema de mucho interés para las investigaciones recientes acerca del papel que éste juega en los cursos que se imparten en las diferentes universidades del país y del mundo, y sobretodo el papel tan importante que desempeña en la predicción.

El cálculo que tiene como origen la ciencias que estudian la naturaleza, en especial las ciencias físicas, y que surge del contexto a una forma peculiar de la naturaleza, aunada a nuevos paradigmas del saber, que posibilitaron el surgimiento del cálculo. Esto se refiere al paradigma newtoniano, el cuál básicamente consistió en considerar a los problemas de la dinámica en particular y de la variación de las magnitudes variables en general, de la siguiente manera: ciertos valores de los parámetros de un sistema en un momento y lugar dados, determinan la evolución ulterior del sistema. De ahí que el objetivo de la mecánica desde entonces sea

predecir dicha evolución sin plantearse preguntas sobre la "causas reales" o "causas inherentes" del movimiento (Cantoral, 2001; Muñoz, 2000; Piaget y García, 1994).
"La búsqueda de la predicción de la evolución de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza condujo, según Cantoral a desentrañar los mecanismos que permitieron el pasaje de la predicción, noción propia de las ciencias físicas, a lo analítico, noción propia de la matemática. En términos generales dichos mecanismos son los siguientes: (a) Antes que nada reconocer que los fenómenos bajo estudio herencia, en tanto que son las condiciones iniciales las que determinan su evolución ulterior. (b) De todas las variables relacionadas con el fenómeno, considerar como tales a unas cuantas y como constantes al resto de ellas. (c) Considerar como constantes a algunas de las sucesivas variaciones de las variables. (d) Construcción del instrumento predictor y su representación en el contexto matemático: la serie de Taylor" (Alanís, 1996, p. 22).
Por todo lo descrito anteriormente podemos decir que la Ciencia Economía tiene como principales objetivos la interpretación y la predicción de fenómenos económicos, al igual que las Ciencias Físicas que analizan y predicen los diferentes tipos de fenómenos que se presentan en la naturaleza, ésta última utiliza el cálculo infinitesimal como herramienta de predicción.
Teniendo como referencia que el cálculo infinitesimal que se utiliza como herramienta de predicción el las Ciencias Físicas, y que éste juega un papel muy importante en el proceso de matematización de la Ciencia Económica desde sus orígenes hasta la actualidad, nuestra pregunta investigación es:

- ¿Cómo el cálculo infinitesimal originado en la practica social de predecir se incorpora a otras prácticas sociales asociadas a la economía?

La pregunta anterior se estudiará a través de una aproximación socioepistemológica, ya que ésta brinda una aproximación teórica cuya tesis primordialmente plantea dar cuenta del conocimiento a través de las prácticas sociales de los grupos humanos que lo posibilitaron, y la transformación de estas prácticas cuando existe una intencionalidad para que el saber matemático ingrese al sistema didáctico. Para ello, se convino considerar los siguientes aspectos: a) Naturaleza de la problemática; señalando, que en el sistema didáctico el conocimiento matemático es eminentemente una construcción social, b) las prácticas sociales de los grupos humanos; considerando que las prácticas son todos los aspectos y formas de la actividad humana que transforma realmente los objetos y c) el desarrollo de las prácticas en el sistema didáctico; este especto entendemos que son las prácticas, como una respuesta a la problemática, las que tienen que ser desarrolladas en el sistema didáctico y no en si los conceptos.
En el marco anterior y a través de esta aproximación teórica uno de los objetivos de la investigación fue:

- Determinar que la matemática que utiliza la Ciencia Económica en especial el cálculo infinitesimal está ligado a la predicción y a los procesos de variación y cambio.

Revisando se ha encontrado que desde los principios del análisis económico, los economistas han buscado métodos para explicar y exponer sus ideas. Una característica de la economía moderna es la difusión de los instrumentos matemáticos y empíricos en el núcleo de la investigación de prácticamente todos los economistas.
Esta revolución metodológica no sólo ha dotado al discurso económico de las características de rigor y generalidad, sino que la solidez teórica adquirida ha conferido a la economía el carácter de un programa de investigación progresivo.

Unos de los medios de difusión que tiene la ciencia económica en la formación de nuevos economistas son las diferentes bibliografías que existen para lograr que éstos dominen el instrumental matemático para entender diferentes teorías que se han formulado en términos matemáticos y utilizar a ésta como una herramienta que todo economista debe de tener. Haciendo un análisis de los libros convencionales que se utilizan en los diferentes curso de cálculo y los libros que también se usan utilizan para ese fin en la Licenciatura de Economía se puede observar fácilmente que tienen la misma estructura de la enseñanza clásica del cálculo: a) Definición (concepto, demostraciones, teoremas, etc.); b) Ejemplos; c) Problemas ("aplicaciones").Este tipo de estructura que tienen los libros actualmente para la enseñanza del cálculo y específicamente en la Licenciatura de Economía no cumplen con el propósito de dar a los estudiantes el instrumental matemático que ellos deben de tener para poder utilizarlos como las herramientas necesarias que la licenciatura exige, y mucho menos que de cuenta del conocimiento a través de las prácticas sociales de los grupos humanos que lo posibilitaron, y a través de ello cumpla con la intencionalidad por el cual se encuentra en el sistema didáctico.

Buscando las necesidades y la intencionalidad del uso del cálculo en los diferentes conceptos económicos se ha encontrado el desarrollo cronológico de la evolución de esta metodología, siguiendo como referencia a Arrow e Intriligator (1989), donde clasifica al proceso de la matematización de la economía en tres periodos:

- El período inicial de la economía matemática (período marginalista, 1838-1947), se caracteriza por tomar prestado metodologías de las ciencias físicas y utilizan las matemáticas para desarrollar una teoría fundamental basada fundamentalmente en el **cálculo infinitesimal**. En este período se formula la teoría del equilibrio general, problemas de competencia perfecta e imperfecta, de monopolios, de duopolio, la teoría del consumidor y la teoría de la producción basados en los principios de maximización.
- El período de los modelos lineales y la teoría de los conjuntos (1948-1960), durante este período cambio mucho el enfoque, no tanto de los problemas analizados, si no el tipo de herramientas matemáticas utilizadas, dentro de las cuales una de las principales aportaciones fue la teoría de juegos de estrategia y sus aplicaciones al campo económico con el tratamiento de los modelos lineales, como medio de explicación de las relaciones intersectoriales en una economía.
- El tercer período, que va de 1961 hasta la actualidad, denominado período de integración del herramental básico, el cálculo infinitesimal por un lado y la teoría de conjuntos y los modelos lineales por el otro. Esta integración hoy se encuentra muy avanzada, prácticamente ya no queda campo de la economía que no haya sido tratado en mayor o menor medida desde el punto de vista matemático. Revisando el índice del Manual de Arrow e Intriligator (1981, 1982) se observa los nombres de los capítulos como, la teoría del consumo y de la producción, estructuras de mercado, dualidad, teoría de la inversión, teoría de la demanda de mercado, existencia y estabilidad del equilibrio competitivo, economías regulares y núcleo, equilibrio temporario, equilibrio bajo incertidumbre, cálculo de precios de equilibrio, teoría de la elección social, información y el mercado, imposición óptima, óptimos secundarios, crecimiento óptimo, diseño de organizaciones, incentivos y descentralización, y planificación.

En coherencia con nuestra pregunta y objetivo de investigación revisamos de diferentes teorías elaboradas antes del periodo marginalista se analizo la teoría de la renta que se encuentra ubicada en el periodo clásico de la evolución de la ciencia económica, este periodo se caracteriza por desarrollar los principios, doctrinas y las siguientes teorías: a) Fundamentos teóricos del valor y suministros para el crecimiento económico; b) Filosofía basada en las doctrinas de la utilidad o egoísmo; c) Principio de la población; d) Teoría de la renta, y e)Doctrina del fondo de salarios

El contexto social del periodo clásico tiene algunas características, por ejemplo, La Leyes de Granos que fueron aprobadas por el Parlamento de Inglaterra en 1815, ya que por el embargo que impuso Napoleón a los puertos británicos impidió eficazmente la entrada de los granos extranjeros. Los agricultores británicos se vieron obligados a aumentar la producción de cereal doméstico, a fin de alimentar la población. Debido a que los costes de producción eran muy altos en Inglaterra que en el extranjero, el precio del cereal aumento y las rentas de las tierras también aumentaron, hasta el punto de que los terratenientes desarrollaron unos intereses creados para continuar restringiendo las importaciones de cereales. Por lo que las Leyes de Granos se crearon con el fin de protección agrícola y sus efectos sobre la distribución de la renta y el crecimiento económico de los que suministraron el estímulo para el desarrollo de la teoría clásica de la renta por David Ricardo (1771-1823).

El efecto de las Leyes de los Granos era el de reforzar una agricultura más intensiva y extensiva en Inglaterra. Lo que Ricardo demostró era que existían rendimientos decrecientes tanto en el margen intensivo (mayor cantidad de factores aplicada a la misma tierra) como en el margen extensivo (la misma cantidad de factores aplicada a diferentes clases de tierra.

La renta es definida por David Ricardo como lo que se paga ... por el uso de las energías originarias e indestructible del suelo, no existen en el margen y aparece en las mejores tierras sólo cuando se ponen en cultivo las tierras peores, es decir la diferencia entre el producto obtenido por el empleo de dos cantidades iguales de capital y trabajo.

Con el fin de evidenciar el germen del Cálculo en la Ciencia Económica analizamos el siguiente recuadro que utilizan Ekelund y Hébert (1992, p. 158) para clarificar las ideas de Ricardo acerca de la teoría de renta podemos observar lo siguiente:

Capital y trabajo	Producto total y marginal según tipos de tierras (Ekelund y Hébert)									
	No. 1	**MP_1**	**No. 2**	**MP_2**	**No. 3**	**MP_3**	**No. 4**	**MP_4**	**No. 5**	**MP_5**
0	**0**		**0**		**0**		**0**		**0**	
1	**100**	**100**	**90**	**90**	**80**	**80**	**70**	**70**	**60**	**60**
2	**190**	**90**	**170**	**80**	**150**	**70**	**130**	**60**	**110**	**50**
3	**270**	**80**	**240**	**70**	**210**	**60**	**180**	**50**	**150**	**40**
4	**340**	**70**	**300**	**60**	**260**	**50**	**220**	**40**	**180**	**30**
5	**400**	**60**	**350**	**50**	**300**	**40**	**250**	**30**	**200**	**20**

No.1: Producción Total de la tierra número uno.

Mp_1: Producción marginal de la tierra número uno.

Analizando el cultivo de la tierra número uno en un margen intensivo utilizando 5 unidades de capital y Trabajo (CyT), tenemos que:

Capital y Trabajo	Producción Total (Pt)	Producción Marginal (Mp)	Renta (R)
0	0		
1	$Pt_1 = 100$	$Mp_1 = 100$	0
2	$Pt_2 = 190$	$Mp_2 = 90$	10
3	$Pt_3 = 270$	$Mp_3 = 80$	30
4	$Pt_4 = 340$	$Mp_4 = 70$	60
5	$Pt_5 = 400$	$Mp_5 = 60$	100

Cálculo de la Producción Marginal y la Renta	
Mp por introducir una Unidad de CyT	Renta por introducir Una unidad de CyT.
$Mp_0 =$	
$Mp_1 = 100 - 0 = 100$	$R_1 = 0$
$Mp_2 = 190 - 100 = 90$	$R_2 = 100 - 90 = 10$
$Mp_3 = 270 - 190 = 80$	$R_3 = 100 - 80 = 20$
$Mp_4 = 340 - 270 = 70$	$R_4 = 100 - 70 = 30$
$Mp_5 = 400 - 340 = 60$	$R_5 = 100 - 40 = 40$

Por lo tanto:

La Producción Total es igual a:	La Renta Total es igual a:
$Pt = 100+90+80+70+60 = 400$	$Rt = 0+10+20+30+40 = 100$

Con lo anterior, podemos observar que el Producto Marginal (Mp) del Capital y el Trabajo (CyT) es la variación del Producto Total (Pt) resultante de la adición de una nueva unidad del factor capital-trabajo a la producción, es decir:

$Mp_1 = Pt_{1;}$ $Mp_2 = Pt_2 - Pt_1$; $Mp_3 = Pt_3 - Pt_2$; $Mp_4 = Pt_4 - Pt_3$ y $Mp_5 = Pt_5 - Pt_4$

Por lo tanto la producción total para la tierra No. 1 utilizando cinco unidades de capital y trabajo es:

$Pt_5 = Mp_1 + Mp_2 + Mp_3 + Mp_4 + Mp_5$

Y para calcular la Pt utilizando n unidades de CyT es:

$Pt_n = Pt_1 + Mp_2 + \ldots + Mp_{n-1} + Mp_n$, por lo que: $Pt_n = Pt_1 + \sum Mp_i$

Por lo que respecta a la Renta (R), tenemos:

$R_1 = 0$; $R_2 = Mp_1 - Mp_2$; $R_3 = Mp_1 - Mp_3$; $R_4 = Mp_1 - Mp_4$ y $R_5 = Mp_1 - Mp_5$

Por lo tanto la Renta total para la tierra No. 1 utilizando cinco unidades de Capital y Trabajo es:

$Rt_5 = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5$; donde $R_1 = 0$

Y para calcular la Renta total para n unidades de Capital y Trabajo es:

$Rt_n = R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1} + R_n$, por lo que: $Rt_n = R_1 + \sum Ri$; donde $R_1 = 0$.

Siguiendo a Cordero (2003) podemos observar con el análisis anterior, que ya estaban presentes conceptos elementales con relación a la estructura del Cálculo; *juntar y separar, sumar y restar, integrar y derivar*. También se observa que se esta dando lugar a la noción de variación en sus elementos básicos, que son: los procedimientos de comparación, las nociones de acumulación y el valor acumulado (predicción).

Variación discreta:

Suma y resta

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n,$

$$d_0\ ,\ d_1\ ,\ d_2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ d_{n-1}\ ,\ \text{donde}\ d_i = a_i - a_{i-1}$$

$$a_n = a_0 + \sum di\ ,\ d_i = a_i - a_{i-1}\quad \text{valor acumulado}$$

$$a_n - a_0 = \sum di\ ,\ d_i = a_i - a_{i-1}\quad \text{acumulación}$$

Conclusiones

- El proteccionismo agrícola y sus efectos sobre la distribución de la renta y el crecimiento económico es el contexto social que estimula el desarrollo de la teoría clásica de la renta.
- Dentro de esta teoría se comienzan utilizar conceptos como Producción Marginal del Capital y Trabajo que es la variación del producto total resultante de la adición de una nueva unidad del factor capital-trabajo a la producción y la Renta como la diferencia entre el producto de la mejor tierra y de la peor tierra de cultivo, para cantidades iguales de capital y trabajo en ambas. Se está presentando evidencias de la noción de variación; en sus elementos básicos, los cuales son: los procedimientos de comparación, las nociones de acumulación y valor acumulado(predicción).
- En el periodo clásico, en particular en el contexto de surgimiento de la teoría de la Renta, el principal interés estaba, en el crecimiento económico, o la transición de un estado progresivo a un estado estacionario, ya que en éste momento se detendría una nueva inversión (no hay acumulación adicional de capital). Fue necesario predecir cuando se presentaría el estado estacionario, por lo que la predicción juega un papel muy importante para los economistas de dicha época.

Referencias Bibliográficas

Alanís, J. (1996). *Lan predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del cálculo.* Tesis doctoral, Cinvestav, México.

Arya, J. & Lander, R. (1992). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía*, México: Prentice Hall.

Arroy, K. & Intriligator, M. (1989), *Handbook of Mathematical Economics.* Vols. 1-3, North Holland.Amsterdan.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis doctoral, Cinvestav, México.

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México : Grupo Editorial Iberoamérica.

Chaing, A. (1987). *Métodos fundamentales de economía matemática.* México: McGraw-Hill.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa.* 4(2), 103-128.

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral: La noción de acumulación como argumentación.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Muñoz, G.(2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. *Relime vol. 3, Núm. 2, 131-170.* Robert. B. & Robert, F. *Historia de la teoría económica y su método.* México: McGraw-Hill.

Piaget y García (1994). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI.
Swokowski (1982). *Cálculo con geometría analítica.*. México: Grupo Editorial Iberoamerica.
UNACH (1994). Planes y programas de estudio de la Licenciatura en Economía: Facultad de Ciencias Sociales.
UNAM (1993). Planes y programas de estudio de la Licenciatura en Economía: Facultad de Economía.

Modelación en Matemática Educativa

Liliana Suárez y Francisco Cordero
Cinvestav-IPN
México
lsuarez@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx
Socioepistemología – Nivel Superior

Resumen

El interés de la modelación matemática se ha incrementado en los tiempos recientes en todas las áreas de conocimiento y específicamente dentro de la educación desde hace una década por los alcances de las matemáticas en su relación con otras ciencias. En este escrito se reporta una investigación que estudia el reconocimiento de la modelación como una actividad necesaria para la reconstrucción de significados matemáticos. Se presenta un ejemplo de la modelación gráfica para resignificar la parábola y los modelos gráficos que se han identificado en el trabajo con situaciones de movimiento. Se discute la importancia de la identificación de categorías, como la modelación-graficación, para estudiar la introducción del saber matemático en el sistema didáctico.

Categorías de conocimiento para el sistema didáctico

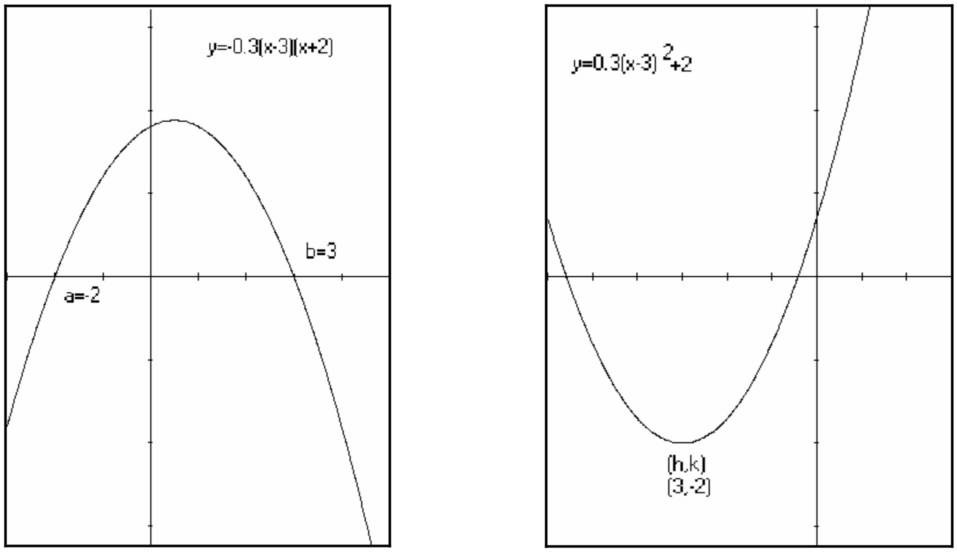
Toda sociedad necesita que el conocimiento que se adquiere en la escuela sea funcional, es decir, que se integre y se resignifique permanentemente en la vida (fuera de la escuela) para transformarla. El anclaje en el dominio matemático que se observa en las explicaciones y propuestas didácticas, que obliga a explicar la matemática desde la matemática misma, no toma en cuenta los otros dominios científicos ni, sobre todo, las prácticas de referencia que permitieron el surgimiento del conocimiento matemático (Cantoral y Farfán, 2003). Es necesario integrar en las prácticas del estudio de las matemáticas de las escuelas aquellas circunstancias que propiciaron (en términos epistemológicos) su aparición, para que su integración en la vida de los estudiantes sea funcional (Cordero, 2004).

La búsqueda de las prácticas de referencia obliga a romper la centración en los conceptos del discurso matemático escolar y dirige el camino hacia la rehabilitación de categorías del conocimiento matemático que provienen de la actividad humana. La modelación matemática es reconocida como una práctica científica y ha sido incorporada a la enseñanza de las matemáticas por la diversidad de significados que aporta (Blum *et al*, 1989), sin embargo, es necesario dar cuenta de las implicaciones teóricas que conlleva su incorporación en la escuela y de los cambios que se producen en la naturaleza de las matemáticas que se aprenden. El debate actual sobre el papel de las prácticas en la construcción de conocimiento matemático señala como una hipótesis que la graficación es la categoría que permite articular el uso de la modelación matemática y el uso de la tecnología en actividades matemáticas (Cordero, 2004).

A continuación presentamos un ejemplo de modelación gráfica para la resignificación de la parábola para plantear la problemática asociada a la variedad de usos de la graficación y sus implicaciones en la construcción de conocimiento matemático.

Modelación gráfica: Un ejemplo de resignificación de la parábola

La parábola es uno de los contenidos comunes en el discurso matemático escolar (Campos, 2004). El énfasis con que se estudia depende de la asignatura en la que aparece. Por ejemplo en geometría analítica se destacan las relaciones entre los parámetros de la ecuación en sus forma ordinarias (que no necesariamente en su forma general) y las características de la curva.



Ecuación: $y = A(x-a)(x-b)$ Parámetros: A, a, b

Ecuación: $y = A(x-h)+k$ Parámetros: A, h, k

Figura 1. Asociación de las ecuaciones ordinarias y las gráficas de la parábola.

Esta orientación del sistema educativo ancla los significados, los procedimientos y los argumentos a los conceptos matemáticos de tal forma que no le ofrece al estudiante elementos para resignificar la parábola. La resignificación será la que propicie que el conocimiento sobre la parábola se constituya en una herramienta para resolver preguntas en otros momentos de su vida, dentro y fuera de la escuela, y en otros contextos. Trabajando con estudiantes de bachillerato, licenciatura y posgrado, y con profesores de matemáticas, se ha observado que recurren a trazos rectos para una primera representación gráfica de los cambios de posición en una situación de movimiento [Una persona se aleja 500 metros y regresa al punto de partida, en un total de nueve minutos]. Analicemos la diferencia entre los siguientes modelos gráficos para describir la situación.

El modelo lineal (véase figura 2a) permite describir la situación de movimiento a partir de la velocidad constante promedio. Se asignan valores contrarios para designar las velocidades de ida y de regreso. Estos elementos permiten asociar la pendiente con la velocidad en cada intervalo $[0,4.5],[4.5,9]$.

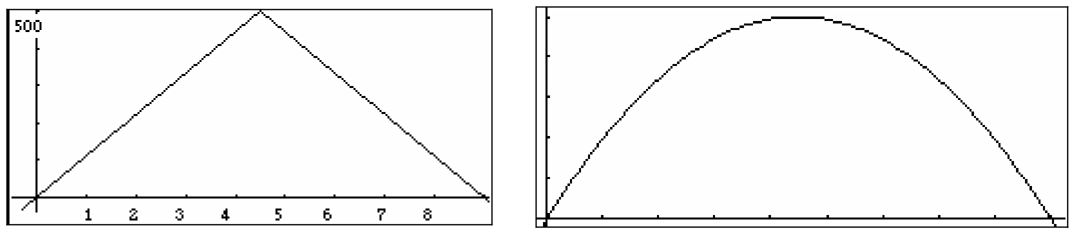


Figura 2. Modelos a) lineal y b) cuadrático para el movimiento de una persona

Retomando las ideas de la exploración lineal, con el modelo cuadrático (véase figura 2b) se genera un procedimiento de cálculo de la velocidad variable a partir de aproximaciones de velocidades promedio para intervalos más pequeños $[0,1],[1,2],\ldots,[7,8],[8,9]$. Estos elementos permiten asociar la inclinación de la curva en un punto dado con la velocidad asociada en ese instante.

Una exploración de la situación con un modelo gráfico con trazos curvos no es espontáneo porque en esta actividad no aparece ninguno de los procedimientos analítico-algebraicos asociados a la parábola o a otras curvas conocidas que pueden proporcionar matices sobre la variación y lograr un esquema general del movimiento (Véase figura 3).

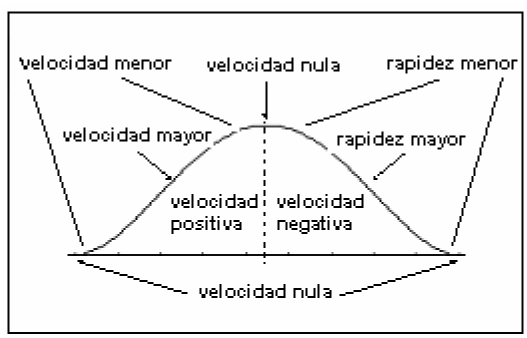


Figura 3. Un esquema general para el movimiento

La graficación como una categoría que articula la modelación y la tecnología

Este ejemplo indica un uso de las gráficas preponderante en el sistema educativo en el que hay una centración en la representación algebraica. Sin embargo el potencial de la graficación puede ir más allá si se le considera en sí misma una modelación. Las características que debería cumplir son: 1) las gráficas se obtienen a partir de una simulación que lleva a cabo múltiples realizaciones y hace ajustes en el movimiento para producir un resultado deseable en la gráfica, 2) tiene un carácter dinámico que permite crear modelos gráficos que se convierten en argumentos para nuevas descripciones de movimientos, 3) propicia la búsqueda de explicaciones y enfatiza los comportamientos invariantes en las situaciones. Uno de los propósitos de esta investigación es aportar las evidencias de que la práctica de la graficación soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación.

Con la finalidad de analizar la naturaleza de la modelación gráfica se han realizado diseños de situación a partir de actividades de modelación. La guía de estos diseños ha sido considerar a la graficación como la categoría que articule la modelación y la tecnología.

Diseño de situación y puesta en escena

Todos los diseños tienen la misma estructura: se presenta una situación en un contexto físico, susceptible de ser reproducido, y se pide hacer una descripción de la situación en términos gráficos. A continuación se describe uno de los modelos gráficos que se han identificado en la situación de movimiento de una persona.

La gráfica de la posición de una persona que se aleja de un punto de partida una cierta distancia y regresa, pero en el trayecto se detiene un lapso de tiempo, tiene distintas formas de representación. En particular en la figura 4 se muestra la gráfica de una de esas posibilidades obtenida un ambiente tecnológico donde los estudiantes pueden ensayar el movimiento mediante múltiples realizaciones, se hacen ajustes al movimiento que realizan frente al sensor que capta la información de la posición con respecto al tiempo.

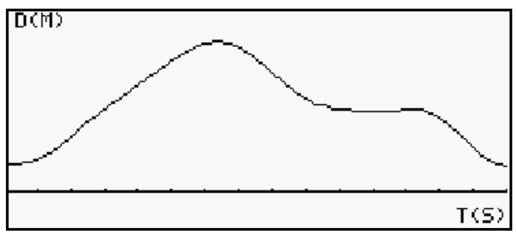


Figura 4. Grafica obtenida con datos del movimiento de una persona registrados por un sensor y procesados en una calculadora gráfica.

Las múltiples realizaciones del movimiento permiten asociaciones de las características de la gráfica con las características de la posición y de los cambios de posición (velocidad). A continuación describiremos uno de los modelos gráficos que los estudiantes logran construir.

El modelo gráfico de la vuelta

Al centrar la atención al intervalo de la gráfica que representa el punto donde se da la vuelta aparecen significados asociados al aumento y disminución de posición (figura 5a). Al llegar al punto más alejado la distancia comienza a disminuir en el regreso, hecho que se verá reflejado en la existencia de un punto máximo en la curva. Independientemente del grado de curvatura (más parecida a recta o no) en los intervalos de aumento y disminución de posición, el punto más alejado se encontrará en una vecindad con un trazo suave.

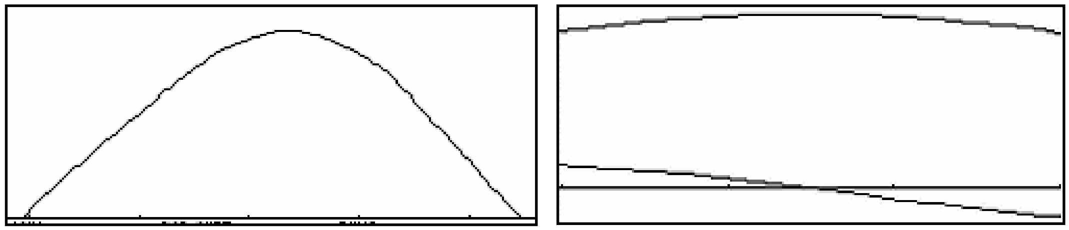


Figura 5. Modelo gráfico de la vuelta. a) Posición, b) Posición y velocidad

Hay otro grupo de significados asociados a la velocidad de este movimiento. En la vecindad del punto más alejado hay una disminución de velocidad que se asocia con la disminución en la inclinación de la curva en puntos cercanos, a la derecha y a la izquierda, del punto de altura máxima de la curva. De esta forma al punto máximo se le asocia una pendiente de valor cero. Analizando la gráfica obtenida de velocidad se completa el modelo asociando los valores de la velocidad (inclinación en la gráfica de la posición) con su gráfica (figura 5b).

Resignificación del modelo gráfico

El diseño de situación incluye la resignificación de los modelos gráficos iniciales. De qué forma debe ser el movimiento realizado frente al sensor para obtener la representación inicial del movimiento. A partir de esta pregunta los estudiantes resignifican su primera representación del movimiento haciendo realizaciones al ensayar diversos movimientos y obtener el patrón gráfico deseado.

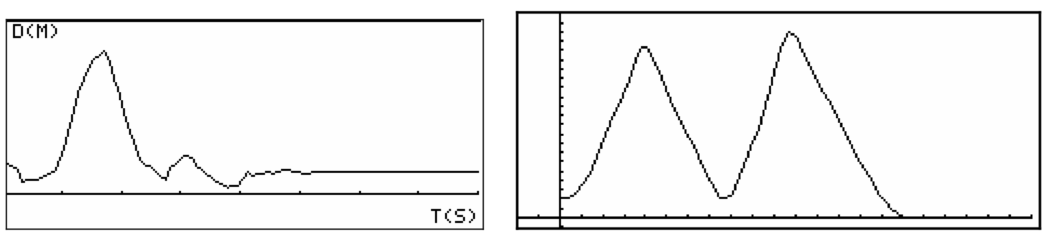


Figura 6. Gráficas con picos

Conclusiones

Desde la perspectiva de investigación que busca la intervención del sistema didáctico, se buscan categorías de conocimiento. La graficación se estudiará como categoría que sirva de vehículo para implementar el trinomio modelación-graficación-tecnología en la construcción de conocimiento matemático en el salón de clases. Este proyecto de investigación tiene como objetivo la constitución de la epistemología subyacente en las actividades de modelación gráfica del movimiento y la construcción de diseños de situación apoyados en esta epistemología. La finalidad será explicar el papel de la práctica de la graficación en la resignificación del conocimiento matemático.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J., Buendía, G., Ferrari, M., Martínez, G. y Suárez, L. (2004). Las Prácticas Sociales como Generadoras del Conocimiento Matemático. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 17, (pp.418-422). México.

Blum, W., Berry, J., Biehler, R., Huntley, I., Kaiser-Messmer, G. y Profke, L. (Eds.). (1989). *Applications and modelling in learning and teaching mathematics*. Ellis Horwood Limited Publishers.

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics 58*(3), 299-334.

Campos, C. (2003). *La argumentación gráfica en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 6(2), 27-40.

Cordero, F. (en prensa). La modelación y la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa 21 IPN*. México.

Cordero, F. (2003). Lo social en el conocimiento matemático: los argumentos y la reconstrucción de significados. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 16, Tomo 1, (pp. 73-78). México.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 4(2)*, p.p.103-128.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Roth, W. y Bowen, G. (2001). Professionals read graphs: A semiotic analysis. *Journal for Research in Mathematics Education 32*(2), 159-194.

SEP Libros de texto gratuito. Nivel Básico, Serie Ciclo Escolar 2003-2004.

Suárez, L. (2002). *Actividades de simulación y modelación en el salón de clases para la construcción de significados del Cálculo,* (en preparación). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Suárez, L. (2001). Las actividades de simulación y modelación en el salón de clases para la construcción de significados del Cálculo. En F. Cordero (Ed.). *Antologías*. Vol. 1, (pp.335-345). México.

Suárez L., Carrillo C. y López J. (2004). Diseño de gráficas a partir de actividades de modelación. *Resúmenes de la Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México. (p. 221).

Torres, A. (2004). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología*. Tesis de maestría no publicada. Programa de Matemática Educativa, CICATA-IPN. México.

La Modelación y las Gráficas en Situaciones de Movimiento con Tecnología

Araceli Torres y Liliana Suárez
CECyT 10, CICATA-IPN, Cinvestav-IPN
México
araceli_t_b@hotmail.com, lsuarez@cinvestav.mx
Socioepistemología – Nivel Superior

Resumen

Con este trabajo se da cuenta de los aprendizajes que logran los estudiantes del nivel bachillerato al trabajar con un problema de una situación real de movimiento empleando tecnología como son los sensores (dispositivos transductores) y calculadora graficadora. La aproximación socioepistemológica sirvió de sustento para realizar un análisis previo, el cual nos permitió identificar tres usos de las gráficas: construcción de gráficas utilizando la regla de correspondencia entre dos variables, gráficas por operaciones gráficas y la graficación por medio de la simulación de un fenómeno físico empleando tecnología. El trabajo con estudiantes nos permitió caracterizar el uso de las gráficas a partir de las actividades de modelación con las características del Comportamiento Tendencial de las Funciones.

La modelación y las gráficas en aprendizaje de las matemáticas del bachillerato

Una de las tendencias actuales, derivadas de la incorporación de la tecnología y de la investigación sobre los ambientes de aprendizajes, señala que las estrategias para el mejoramiento de la educación se deben ocupar preferentemente del aprendizaje, de lo que logra el estudiante más que de lo que hace el profesor. Aquí se trata de mejorar los espacios de aprendizaje escolarizados destacando la participación del profesor y, al mismo tiempo, brindar a los estudiantes la oportunidad de que se responsabilicen de su aprendizaje y logren cierto nivel de autonomía en sus necesidades de aprendizaje. Esto es, garantizar las condiciones y crear ambientes propicios en los que el estudiante tenga el control del proceso o, por lo menos participe activamente, y pueda hacer por sí lo que, a veces, la institución no le brinda. Para atender esta necesidad la Academia Institucional de Matemáticas del Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional cuenta con un Plan de Trabajo que actualmente se concreta en un Programa de Mejoramiento del Estudio de las Matemáticas (AIM-NMS-IPN, 2000) el cual contiene un conjunto de proyectos que se vinculan entre sí.

Este trabajo de investigación se inscribió en el proyecto "La tecnología como una herramienta para la comprensión y el uso de las matemáticas", que tiene como una de sus metas la instalación de laboratorios de matemáticas con tecnología en el NMS-IPN, generando y aprovechando la investigación sobre el aprendizaje que se logra con el uso de tecnología. Este proyecto de investigación estudia las características del aprendizaje que se logran cuando se incorporan dispositivos de transducción y calculadoras con poder de graficación, para el registro, el análisis y la interpretación de datos diversos en el salón de clases, en las experiencias de aprendizaje con alumnos del NMS-IPN. La hipótesis fundamental de este trabajo es que la tecnología genera un nuevo uso de las gráficas.

El uso de las gráficas desde una perspectiva socioepistemológica

La aproximación socioepistemológica sostiene que la construcción de conocimientos debe estar en correspondencia con la modelación y el uso de la matemática, es decir, con el lenguaje de herramientas que resulta de la actividad humana (Cordero, 2001). Además, toma en cuenta cuatro dimensiones para abordar las problemáticas que estudia. Esta perspectiva es propicia para investigar los nuevos usos de las gráficas que se generan con el uso de la tecnología. A partir de una revisión de libros de texto (Phillips, 1999, por ejemplo) y trabajos de investigación en Matemática Educativa (Cordero y Solís, 2001; Cantoral y Montiel, 2001; Suárez et al, 2003) se han identificado tres usos que describiremos a continuación.

Una problemática para el uso de las gráficas

El primer uso se refiere a la construcción de gráficas utilizando la relación de correspondencia entre dos variables, es decir, localizar parejas de puntos ordenados a partir de la relación algebraica, este procedimiento se encuentra frecuentemente en libros de texto del Nivel Medio y Nivel Medio Superior (Véase Figura 1).

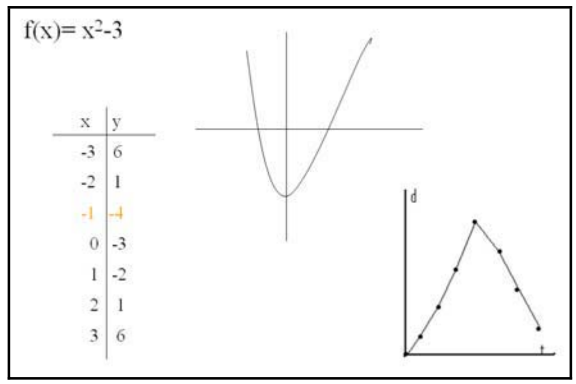


Figura 1. Uso de las gráficas a partir de su expresión algebraica

Un segundo uso es la graficación por operaciones gráficas, ejemplo de este uso se observa en los diseños de situación de Cordero (2001) en los que se pide explorar lo que sucede cuando a la gráfica de una parábola (función prototipo) se le suma una recta o se multiplica por una constante observando los efectos gráficos y a partir de ellos modelar comportamientos de funciones. Este tipo de trabajo de operaciones con gráficas lo podemos encontrar en Quiroz (1989) y, particularmente, en Cordero (2001) p. 39 [Véase Figura 2].

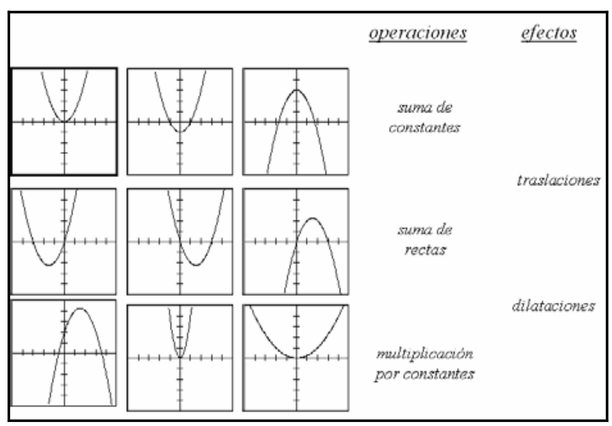


Figura 2. Uso a partir de operaciones gráficas

Un tercer uso se refiere a la graficación por medio de la simulación de un fenómeno físico empleando tecnología, éste es el enfoque especial de este trabajo. Con este marco descrito se formularon las preguntas de investigación siguientes: ¿en que sentido logran tener una visión global y local de la gráfica?, ¿qué construcción del conocimiento alcanzan a hacer, decir y discutir con respecto a la pendiente?

Taller extracurricular de modelación: el escenario de la investigación

Para dar respuesta a las preguntas planteadas en esta investigación, se implementó un taller extracurricular los sábados de cuatro sesiones de tres horas cada una en una escuela de Nivel Medio Superior. Las dos primeras estuvieron enfocadas a que los alumnos se familiarizaran con las modalidades de trabajo (trabajo en equipo y discusión grupal); con la tecnología (calculadora graficadora, transductores y sensores); con el tipo y estructura de las actividades del taller (descripciones gráficas de fenómenos de movimiento y de temperatura) y con la toma de registros de audio y video, fotografías, y escritura de un reporte (Suárez 2000).

En la tercera sesión asistieron dieciocho estudiantes, se formaron seis equipos de tres alumnos con un monitor cada uno, la función del monitor fue la de animar a que los integrantes del equipo expresaran en voz alta lo que estuvieran pensando, estar atentos a todas las observaciones que ellos hicieran, así como también recordarles que tenían que elaborar un reporte de la actividad.

Situación de modelación del movimiento con tecnología

La situación de aprendizaje que se usó consiste en hacer la gráfica del movimiento de una persona que se aleja de un punto de partida hasta 500 metros, para luego regresar y sólo dispone de nueve minutos. Pero durante dicho trayecto se detiene cuatro minutos.

Los estudiantes hacen una descripción gráfica de la posición y de la velocidad, discutiendo sobre la inclinación de las rectas, aun antes de realizar la simulación y obtener las gráficas con la tecnología. Ellos pudieron relacionar la representación verbal con la representación de la simulación, identificaron los intervalos de cambios de velocidad, con respecto a la pendiente podemos afirmar que identificaron en la gráfica que una recta con menor inclinación representaba que su velocidad era más lenta que aquella que tuviera mayor inclinación, transitaron entre las diferentes representaciones que estaban en juego como son la verbal, la gráfica y por supuesto la de la simulación.

Con la secuencia propuesta ocurre de forma natural una interacción entre las gráficas de los estudiantes y los significados asociados con las gráficas que resultan de simular con el uso de la tecnología la situación del movimiento establecida. Una de las variables que se determinan en la situación es la instrucción de construir una gráfica que represente la situación antes de la simulación con tecnología. Una vez que los estudiantes hayan logrado hacer la grafica del movimiento sin el uso de tecnología, pasarán a realizar la simulación del fenómeno con el sensor y la graficadora. El sensor toma datos de tiempo y distancia que transfiere a la calculadora, ésta a través de sus programas los guarda en listas l1, l2, l3 y l4 que representan respectivamente el tiempo, la distancia, la velocidad y la aceleración, de esta manera se obtienen la gráfica de la distancia contra tiempo, la velocidad contra tiempo y la aceleración contra tiempo.

Los ciclos de exploraciones, discusiones y reflexiones de *situación-simulación-situación* permiten incorporar los significados generados por los estudiantes para la construcción de una apreciación cualitativa y cuantitativa de la velocidad durante el recorrido a partir de la gráfica de la posición con respecto al tiempo. [Véase Figura 4] En este sentido la actividad de aprendizaje planteada permite la construcción de conocimiento a partir de la simulación y modelación.

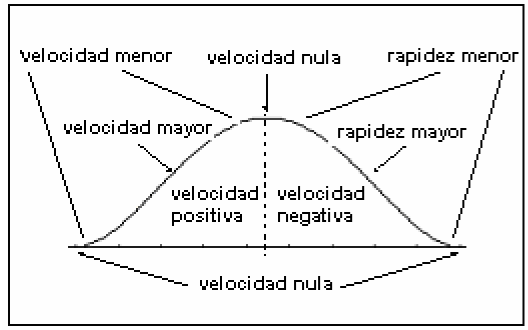


Figura 3. Descripción cualitativa de la velocidad

Logros de los estudiantes al trabajar la situación de modelación del movimiento

<u>Visión global de la gráfica</u>
Todos los equipos lograron hacer una gráfica correspondiente a los cambios de posición. Las primeras descripciones son principalmente a través de trazos rectos, sin embargo hay equipos que logran trazos curvos. La naturaleza de la tarea, es decir, partir de una situación para graficarla, hace que los estudiantes recurran a todo lo que saben para lograr la gráfica que se pide.

Los equipos pudieron relacionar adecuadamente la representación verbal con la representación de la simulación, ya que pudieron realizar la simulación de la situación planteada sin ningún problema. Al observar las gráficas obtenidas con el sensor y la calculadora graficadora, se dieron cuenta que los trazos no siempre deberían de ser rectos.

<u>Visiones locales de la gráfica</u>
Sólo un equipo conformado con alumnos de quinto semestre pudieron terminar claramente los intervalos de velocidad como rápido, detenido y más rápido en la gráfica.

Todos los equipos pudieron identificar sin problema en las gráficas los intervalos de cambios de velocidad, así como también lograron establecer las relaciones que existían entre las gráficas de la posición y velocidad como los intervalos donde la velocidad es constante, cuando se hace cero, cuando es positiva y cuando es negativa.

<u>Construcción con respecto a la pendiente</u>
Tenemos evidencias de participantes que discuten acerca de la inclinación de las rectas que aparece en la gráfica de la posición, y que la relacionan con el sentido de la velocidad (positiva o negativa). Dado que no tenemos transcripciones de todos los equipos no podemos dar cuenta de lo que pasó, sin embargo, creemos que las intervenciones fueron aprobadas y adoptadas por todo el grupo. Con respecto a la pendiente podemos afirmar que todos los estudiantes lograron identificar en la gráfica que una recta con menor inclinación representaba que su velocidad era más lenta que aquella que tuviera mayor inclinación, y que era positiva cuando iba de ida y negativa cuando iba de regreso.

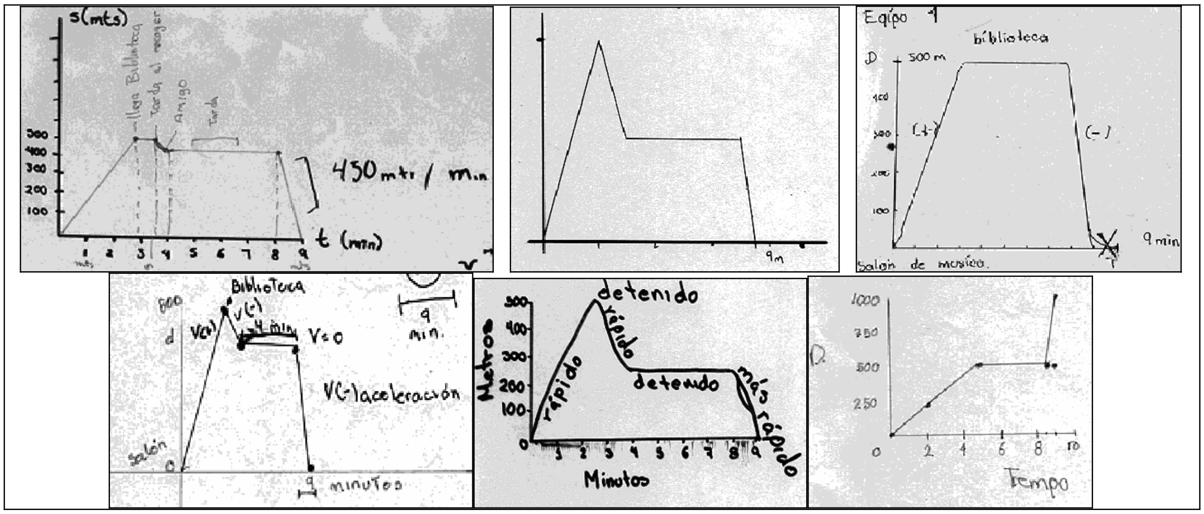


Figura 4. Descripción gráfica de la situación de movimiento.

Las actividades de modelación con tecnología permite tener una visión global y local, tanto cualitativa como cuantitativa de la gráfica, en la que los estudiantes pueden explorar y dar explicaciones de lo que sucede con la situación, por lo que será necesario plantear problemas de situaciones reales en las que los estudiantes puedan transitar con facilidad entre las diferentes representaciones: simulación, verbal, tabular, gráfica y algebraica antes y después de usar la tecnología. Las actividades propuestas a los estudiantes deben estar encaminadas a generar conocimientos matemáticos integradores.

Un marco para describir un nuevo uso de las gráficas

Tomando en cuenta la revisión anterior podemos caracterizar el uso de las gráficas a partir de las actividades de modelación con las características del Comportamiento Tendencial de la Funciones (Cordero, 1998), de acuerdo con el siguiente análisis:

Los significados y sistemas simbólicos se encuentran directamente en las gráficas, estos significados pueden detectarse a través del análisis cualitativo y cuantitativo de las gráficas de la posición y de la velocidad. Los significados se verán reflejados en las relaciones que los estudiantes logren establecer, es decir, a través de las gráficas de la posición y de la velocidad se pueden identificar intervalos que indiquen cuándo el movimiento es más lento, más rápido o el cuerpo se detiene, cuándo la velocidad es positiva o negativa. Con respecto al análisis cuantitativo (que no se tomó en cuenta en esta investigación) las expresiones analíticas de la posición (función primitiva) y la velocidad, se pueden describir mediante funciones a trozos. O bien, una vez encontrada una de las funciones obtener la segunda por medio de las operaciones de derivación o integración.

La base de los procedimientos se apoya en las actividades de modelación y simulación que los estudiantes realizan, en este sentido, nos referimos a las gráficas que se construyen antes y después de usar tecnología. La base de los procesos y objetos se encuentra en las formas de las gráficas que se obtienen con el sensor y la calculadora graficadora. En cuanto a los argumentos son las explicaciones que los estudiantes dan con respecto a la actividad de aprendizaje desde los puntos de vista individual y grupal.

Con esta caracterización se cuenta ahora con un marco para entender la naturaleza de las construcciones que un estudiante del NMS del IPN puede realizar usando tecnología para modelar situaciones de movimiento. Sin embargo, las realizaciones de los estudiantes están ancladas tanto en la estructura de la actividad de modelación de la situación de aprendizaje, como en las propias características del grupo de estudiantes que asistió voluntariamente al taller extracurricular. Será importante observar las realizaciones que puedan lograr profesores y estudiantes en cursos regulares. Para llevar a cabo esta tarea se incluirá en el Paquete Didáctico de los libros de Álgebra y Cálculo módulos con esta actividad que describa el potencial que tiene para cumplir con los objetivos curriculares de estos cursos.

Referencias Bibliográficas

AIM-MNS-IPN. (2000). *Plan de trabajo de la Academia Institucional de Matemáticas del Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional*. México.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático*. México: Prentice Hall y Pearson Education.

Cordero, F. (en prensa). La modelación y la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa 21 IPN*. México.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcción del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 4*(2), 103-128.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del Cálculo y Análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1*(1), 57-74.

Cordero, F. y Solís M. (2001). *Las gráficas de las Funciones como una Argumentación del Cálculo*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Flores, R. (2003). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. *Resúmenes de la VII Escuela de Invierno y VII Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. Chilpancingo, Guerrero. México.

Phillips, E., Butts, T. y Shaughnessy, M. (1999). *Álgebra con Aplicaciones*. Editorial Oxford.

Quiroz, M. (1989) *Instalación de un lenguaje gráfico en estudiantes que inician estudios universitarios: un enfoque alternativo para la reconstrucción del discurso matemático escolar del precálculo*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Romano, S., Suárez, L. y Ortega P. (2003). Los dispositivos de transducción para la modelación en las clases de matemáticas. *Memorias del Primer Congreso de Investigación del Nivel Medio Superior*. México.

Suárez, L. (2000). *El trabajo en equipo y la elaboración de reportes en un ambiente de resolución de problemas*. Tesis de maestría no publicada, DME, Cinvestav-IPN, México.

Suárez, L., Carrillo, C. y López, J. (2003). Diseño de gráficas a partir de actividades de modelación. *Resúmenes de la VII Escuela de Invierno y VII Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. Chilpancingo, Guerrero. México.

Torres, A. (2004). *La modelación y las gráficas en el estudio del movimiento con tecnología.* Tesis de maestría no publicada, Programa de Matemática Educativa, CICATA-IPN, México.

Categoría 4:

Educación a Distancia y Empleo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en el Aprendizaje de las Matemáticas

Introducción

La repercusión que tiene el uso de tecnología en los procesos educativos depende en gran medida del nivel de dominio y formación que tiene el docente para usarlas en beneficio del aprendizaje, ya que cualquiera que sea la herramienta tecnológica involucrada no ha sido construida con el fin de educar en un ambiente mediado por condiciones sociales y culturales particulares. Es decir, la incorporación de la tecnología requiere de investigación sistemática, difusión de resultados e intercambio de experiencias.

El Acta Latinoamericana de Matemática Educativa ha sido testigo del surgimiento de un área de investigación que se distingue por el uso de las Tecnologías de la Comunicación e Información en los procesos de enseñanza-aprendizaje a distancia. En comparación con otras áreas de investigación de la disciplina, la Educación Matemática a Distancia es un campo de estudio en estado incipiente. No obstante, esta situación no es privativa de la comunidad científica latinoamericana: una revisión de la literatura especializada a nivel mundial pondría en evidencia el reducido conjunto de investigaciones al respecto.

Afortunadamente, el interés de la Comunidad Latinoamericana de Matemáticos Educativos por los nuevos retos, las preguntas y las posibles respuestas que plantea la utilización de medios electrónicos en la constitución de nuevos escenarios de instrucción matemática toma cada vez más fuerza, prueba de ello es el reconocimiento otorgado por esta comunidad[1] a la investigación realizada por Gisela Montiel Espinosa, la cual se reporta de manera sintética en la Revista RELIME, publicación oficial del CLAME (ver Montiel, 2005). Desde el Volumen 14 del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, en la línea de "Educación y Nuevas Tecnologías", se reportan investigaciones y experiencias de enseñanza y formación docente con el uso de las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación. El incremento de estas investigaciones, pero sobretodo su distinción con el uso de software matemático-didáctico, calculadoras, dispositivos de colección de datos, etc. ha devenido en la apertura de la línea de "Educación a Distancia", que da cabida a las diversas perspectivas que abordamos en Latinoamérica.

Como se podrá constatar, los métodos empleados, las teorías utilizadas, los usos asignados a las herramientas virtuales y el foco de atención de estos trabajos son variados. Podemos encontrar investigaciones en las que se utilizan metodologías de naturaleza cuantitativa como el trabajo de Rafael Pantoja y Ricardo Ulloa de la Universidad de Guadalajara, México, en el que se realiza una comparación entre las medias de dos muestras con la prueba t y el apoyo de software estadístico; existen otros casos como el presentado por Dario Santiago y Lourdes Quezada del Tecnológico de Monterrey, México, quienes muestran un análisis comparativo entre las opiniones de estudiantes y profesores que tienen la experiencia de haber participado en cursos de matemáticas de nivel universitario impartidos mediante el empleo de plataformas virtuales.

En cuanto a las herramientas teóricas utilizadas, se percibe una tendencia a transponer teorías de la Didáctica de las Matemáticas que se han desarrollado para su aplicación en escenarios presenciales hacia estos nuevos espacios de instrucción. Por ejemplo, el trabajo de Mario Sánchez y Rosa María Farfán del Cicata-IPN y Cinvestav-IPN, México, muestra un ejercicio de

[1] Nos referimos al Premio Simón Bolivar 2003.

extrapolación de ciertos elementos teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico; por otro lado es posible encontrar trabajos que proponen ampliaciones teóricas como las presentadas en el trabajo de Gisela Montiel del Cicata-IPN, México, en relación a ciertos aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas.

Los usos que se le dan a estos nuevos espacios educativos son diversos. En el trabajo de Carlos García y Martha Alvarado del Instituto Tecnológico de Puebla, México, se puede observar el empleo que hace de una plataforma virtual institucional para distribuir los materiales de estudio a alumnos de nivel universitario. En el caso de Mónica García, Gustavo Escobar, Gloria Suhit, Marta Vidal, Martín De Lucca, Carlos Frank y Eduardo Bambill de la Facultad Regional Bahía Blanca-UTN, Argentina, se utiliza una plataforma virtual como herramienta para implementar un Seminario de ingreso en el área de Matemática.

Un punto importante a resaltar es el relativo a los objetos de estudio de los investigadores. Unos, como Yanet Villanueva, se centran en el *diseño* y planeación de modelos didácticos, de la misma manera que lo hacen Nazly E. Salas y Harold Castillo de la Pontificia Universidad Javeriana, Colombia; otros estudian la *integración* de estas nuevas tecnologías como herramientas de apoyo en la Enseñanza de las Matemáticas como es el caso del estudio de Rafael Pantoja y Ricardo Ulloa.

Uno más de los ejes de estudio es la dimensión *epistemológica*. En el trabajo de Gisela Montiel se puede observar como indaga en este aspecto mediante el análisis de las prácticas propias de los escenarios a distancia.

Finalmente, el estudio de las formas de representación de las ideas matemáticas y su evolución presente en el trabajo de Mario Sánchez y Rosa María Farfán da muestra de un interés en la dimensión *semiótica* de los procesos de comunicación en estos escenarios.

Es de esperarse que en años venideros nuestra comunidad sea testigo de un incremento en el número de investigadores que incursionen y se comprometan con el desarrollo de esta área de investigación. Así mismo sería conveniente que este conjunto de investigadores participara activamente en la generación de conocimientos relativos a preguntas de investigación que se consideran de actualidad (Engelbrecht y Harding, 2005) tales como la situación de los estudiantes como aprendices independientes, el papel del profesor dentro de este modo de enseñanza, el efecto de las herramientas visuales propias del Internet, la naturaleza de la evaluación, y el acceso a este tipo de instrucción, entre otras.

Referencias

Engelbrecht, J. y Harding, A. (2005). Teaching undergraduate mathematics on the Internet. Part 2: Attributes and possibilities. *Educational Studies in Mathematics 58*, 253 – 276.

Montiel, G. (2005). Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socioepistemología en la resignificacion del concepto de derivada. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8*(2), 219 – 235.

Educación a Distancia: Una Experiencia para el Ingreso en la FRBB

Mónica García, Gustavo Escobar, Gloria Suhit, Marta Vidal, Martín De Lucca, Carlos Frank y Eduardo Bambill
Facultad Regional Bahía Blanca, UTN
Argentina
garciazatti@hotmail.com
Educación a Distancia – Nivel Medio, Superior

Resumen

La sociedad plantea una variedad de demandas de educación dependiendo de su situación y circunstancias particulares. La educación a distancia representa una realidad mundial en constante crecimiento cuantitativo y cualitativo potenciada últimamente con nuevos medios de comunicación.

La Facultad Regional Bahía Blanca (F.R.B.B.) de la Universidad Tecnológica Nacional (U.T.N.) para responder al desafío que implica proporcionar oportunidades para aprender a entender y a utilizar de manera eficaz las grandes cantidades de información que caracterizan a la sociedad actual y para ello debe prever su inserción al tipo de universidad a distancia. Como un primer paso, y como una alternativa al Seminario de Ingreso en el área de matemática modalidad presencial, implementó el Seminario de Ingreso en el área de matemática en su modalidad a distancia.

El Seminario de Ingreso a Distancia (Siad) se organiza como un seminario tutorial virtual.
La característica fundamental del sistema tutorial es la de cumplir la función de ser el nexo interactuante entre la organización general del sistema y los alumnos, capaz de captar las expectativas, necesidades, intereses y reacciones y de intervenir en el proceso de retroalimentación académica y pedagógica (García Aretio, 2002; Lugo y Schulman, 1999).
Si bien es cierto que los materiales establecen un nexo entre las partes, es el tutor el que cumple la tarea de asegurar la efectividad de dicho nexo, poniéndose en contacto con los destinatarios durante el proceso cuando sea necesario.

El tutor no es un profesor en el sentido tradicional, su trabajo esencial no es transmitir información. Debe ser un crítico constructivo, que ayuda al alumno a salir de ciertas dificultades y explorar nuevos campos.

El principal objetivo del tutor es orientar al alumno para que trabaje por sí mismo, piense por sí mismo y construya su propio cuerpo de conocimientos sobre el material que estudia.

La tutoría facilita la presencialidad necesaria en los programas a distancia y garantiza la presencia institucional frente al alumno. Por medio del tutor se realiza en gran parte, el proceso de retroalimentación académica y pedagógica, se facilita y mantiene la motivación de los usuarios y se apoyan los procesos de aprendizaje de los mismos, ya que el verdadero papel del profesor consiste en actuar de intermediario entre los contenidos del aprendizaje y la actividad constructiva que despliegan los alumnos para asimilarlos. Es el profesor quien determina en gran medida, con sus actuaciones, que la actividad del alumno sea mas o menos constructiva,

que se oriente en uno u otro sentido y en definitiva, que genere unos determinados aprendizajes (Palacios, 1990)
Para que esta tarea se desarrolle eficientemente es imprescindible una adecuada programación. La programación como elemento constitutivo de la planificación, es la que ayuda a establecer un plan ordenado de actuación y organiza la tarea según las posibilidades concretas de cada alumno.

La modalidad a distancia se implementó para el ingreso correspondiente a los años 2003 y 2004. Para ello la FRBB desarrolló una plataforma digital propia dentro de su sitio on line: http://ingreso.frbb.utn.edu.ar, considerando así a Internet como el medio principal en esta primera etapa. La evaluación correspondiente a la primera experiencia permitió mejorar algunos aspectos e incorporar algunos elementos que fueron considerados necesarios para organizar el trabajo de los alumnos y mejorar su rendimiento.

El ingreso al sitio en Internet permite a los interesados obtener información sobre requisitos para el ingreso, período de inscripción, acceso al material de estudio, consultas al docente - tutor, autoevaluaciones, cronograma de actividades y condiciones para la promoción del Seminario.

El Centro de Cómputos de la Facultad, a través de personal asignado a estas tareas, garantiza la disponibilidad en línea del sitio web mencionado de todo el contenido del curso y atiende las consultas técnicas de docentes y alumnos, sobre los procedimientos para acceder al material, el que se diseñó en formato html.

Los contenidos del curso se organizan en tres módulos*: número real, funciones y trigonometría.* Cada módulo contiene: objetivos, diagrama conceptual, breve reseña histórica del contenido principal, desarrollo de los contenidos, actividades, síntesis del tema, actividades de integración y profundización, autoevaluación. El formato virtual respeta los contenidos y las actividades prácticas del presencial.

Las actividades se diseñaron considerando que al finalizar el Seminario de Ingreso los alumnos deben dominar los aspectos operatorios y conceptuales básicos que les posibiliten afrontar con éxito el cursado de las asignaturas iniciales de la especialidad elegida, otorgando gran importancia al lenguaje gráfico, con la intención de establecer un isomorfismo operativo entre el lenguaje gráfico y el lenguaje algebraico (Cantoral, 2000) y donde la situación problemática es el punto de partida para construir el conocimiento matemático.

El cronograma se diagrama en tres etapas: una por cada módulo. Al finalizar cada una de estas etapas los alumnos reciben una evaluación que involucra a los temas presentes en el correspondiente módulo. Para tener posibilidad de acceder a rendir el examen presencial de admisión, los alumnos deben enviar las evaluaciones de acuerdo a las fechas límite establecidas en el cronograma, las que deben ser satisfactorias al menos en un 60%.

La evaluación de ambas experiencias llevada a cabo por el grupo de trabajo asignado al Siad (coordinadora, tutora y asistentes técnicos) puede sintetizarse como se indica a continuación.

Alumnos: en la mayoría de los estudiantes se observa:

- Falta de hábito de estudio y en particular utilizando la computadora.

- Falta de dominio de algún sistema operativo.
- Serias dificultades para expresarse y plantear sus dudas y/o consultas.
- No han desarrollado habilidades de autoaprendizaje.
- Falta de recursos argumentativos para justificar y validar sus respuestas.

Material: en general calificado por los alumnos como claro y completo, pero es necesario adecuar su estructura a las cualidades de hipermedia para posibilitar espacios de interacción y búsqueda y donde la interactividad no sólo resulte posible entre el (los) tutor (es) y los estudiantes, sino también debe incentivar el trabajo grupal, colaborativo y promover la construcción del conocimiento.

Cronograma del curso: como los estudiantes deben asimilar los contenidos en un determinado tiempo y muchos de ellos no están preparados para el autoaprendizaje ni dominan la tecnología básica para un buen desempeño, se considera necesario elaborar un cronograma más detallado para orientarlos especialmente en el cumplimiento de los tiempos prefijados para el estudio de cada tema.

Difusión e información del Siad: consideramos que aún deben optimizarse los medios para la difusión del curso y asegurar que llegue en el tiempo planificado a los ámbitos pertinentes.

Referencias Bibliográficas

Cantoral, R., Farfán, R.M., Cordero, F., Alanís, J., Rodríguez, R. y Garza, A., (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Editorial Trillas

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática 4*(2), 103-128.

Palacios, J., Coll, C. y Marchesi, A. (Eds.) (1990). *Desarrollo psicológico y educación II.* Madrid: Alianza.

García, L. (2002). *La educación a distancia. De la teoría a la práctica.* Barcelona: Ariel Educación.

Lugo, M y Schulman, D. (1999). *Capacitación a distancia: acercar la lejanía. Herramientas para el desarrollo de programas a distancia,* Buenos Aires: Magisterio del Río de la Plata.

Montiel, G. y Farfán Márquez, R.M. (2002) Investigación en educación a distancia. Un acercamiento sistémico. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Vol . 15, Tomo 2, pp. 1287 – 1292). México.

Visión Estudiantil de la Recta y Continuidad

Carlos García y Martha Alvarado
Instituto Tecnológico de Puebla
México
cgfranchini@yahoo.com, maraare@yahoo.com
Educación a Distancia – Nivel Superior

Resumen

Dentro del curso de *Cálculo Diferencial e Int*egral del nivel superior, correspondiente a Matemáticas I de Ingeniería y Matemáticas II de la carrera de Informática, se presenta en la primera unidad el estudio de los Números Reales. El objetivo de esta unidad, es comprender las propiedades axiomáticas de los números reales, para que desde ellas se pueda formalizar el estudio del cálculo. El presente estudio pretende estudiar como el estudiante "ve" a la recta, en el momento en que se axiomatiza a los números reales y se discute la "superdensidad de los reales". El problema específico es: "*determinar si las acciones didácticas con que pretendemos explicar la continuidad de los reales y su superdensidad implican la comprensión de estas mismas propiedades en la recta*".

Introducción y planteamiento del problema

Entender la naturaleza del *Límite* implica comprender cada uno de los elementos de la expresión:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Sí bien, no se está hablando de la definición estrictamente formal de límite, si no de la comprensión de los elementos que la componen, resulta que el primer elemento (supuestamente) ajeno a las estructuras cognitivas del estudiante –hasta ese momento– es la expresión $x \to a$; sin embargo, dicha expresión es traducida en los textos "tan cerca como se quiera", "aproximándose a '*a*' pero sin tocarla", etc.

Esta expresión $x \to a$ resulta ser la primera operación "dinámica" que se encuentra dentro de las matemáticas, ya que las expresiones estudiadas hasta ese momento –por el alumno– esencialmente son manipulaciones algebraicas, desde luego, la experiencia muestra que tal expresión "parece ser comprendida" y que implica poder recorrer a los números reales –es decir, la recta numérica– sin ningún tipo de restricción.

De esta manera el problema específico que se pretende abordar es: "*determinar si las acciones didácticas con que pretendemos explicar la conti
nuidad de los reales y su superdensidad implican la comprensión de estas mismas propiedades en la recta*".

Objetivo

El concepto de derivada e integral depende del concepto de infinitesimal, y el infinitesimal es visto a la manera de Cauchy (citado en Edwards, 1937) como un "*infiniment petit*", ya que implican que una cantidad $\varepsilon \to 0$, pero en el terreno de la discusión nos centramos a decir que "nunca es cero". Esto implica una dificultad al realizar cocientes en los cuales dicho infinitesimal divide a otra cantidad ¿pero como podemos estar seguros que $\varepsilon \rightarrow 0$ nunca toca al cero? Si este concepto se comprende habrá de ser más sencillo discutir en el resto del curso los elementos básicos del curso de Cálculo, como son el de: límite, recta tangente a un punto, continuidad de funciones en un punto, teorema del valor intermedio, teorema de Rolle, derivada, integral, puntos críticos en una función, entre otros.

De esto se desprende que el objetivo específico de esta investigación es responder a la pregunta: ***¿Es la actividad didáctica empleada en el curso de Cálculo Diferencial e Integral, efectiva para lograr que el estudiante comprenda el concepto de continuidad y superdensidad de la recta?***

Hipótesis

El supuesto básico que mueve esta investigación, se asocia a la creencia de que los estudiantes en esta etapa de su currículo, ya cuentan con un modelo de recta que responde a las propiedades de continuidad y superdensidad. De tal forma que dentro del curso de cálculo se parte de este supuesto y sobre él se centra toda la construcción de los procesos formales de esta rama de las Matemáticas.

De estos hechos observados desprendemos nuestra hipótesis de trabajo: *"La actividad didáctica de un curso tradicional de Cálculo Diferencial e Integral,* ***no logra*** *que el estudiante comprenda el concepto de densidad de la recta numérica".*

Es importante aclarar que en este trabajo entendemos como "*la actividad didáctica de un curso tradicional*", al contenido y las sugerencias didácticas que se establecen en los programas oficiales de Matemáticas del SNIT (Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos), por lo que el presente trabajo se circunscribe exclusivamente a este contexto.

Marco de Referencia

El marco de referencia se da desde dos ópticas: el de la óptica matemática y el de la didáctica y las teorías del aprendizaje. Según las Matemáticas: el concepto de continuidad fue en la antigüedad más asociado al de contigüidad, y fue Bolzano el que dio una primera precisa definición de continuidad (citado en Edwards, C. H., 1937), cuando probó analíticamente la propuesta a su teorema, hoy denominado teorema de Bolzano, sobre los signos opuestos de los valores funcionales alrededor de una raíz de una función. Más tarde Cauchy, Dedekind, Cantor y Riemman a finales de siglo XIX establecieron las construcciones formales del cálculo centradas en la definición de continuidad que prácticamente hoy empleamos, pero que comenzaron con los procesos definidos por Eudoxus, estudiante de Platón, 300 años antes de cristo, quien formalizó el método de "exhausión" para el cálculo de áreas. Si bien fue Dedekind, por medio de sus cortaduras quien estableció definitivamente la continuidad de los reales y por tanto la existencia de los números irracionales, que llenaron los huecos dejados por los racionales, finalmente cerró el ciclo de la gran formalización que le dio al Cálculo, Leonhard Euler a finales del siglo XVIII. Esta parte de la historia de las Matemáticas, muestra el tiempo que tardó la humanidad para poder establecer una característica esencial de los números que desencadena la formalización del Cálculo, fortalecida ya en el siglo pasado por Henry Lebesgue y Abraham Robinson, quienes finalmente le dieron cohesión y sustento a muchas de las técnicas con infinitesimales empleadas durante los siglos XVII y XVIII. Por tanto, desde el punto de vista de diversos teóricos de la matemática educativa, si la formalización de la continuidad llevó tanto tiempo y grandes discusiones, entonces tal concepto presenta dificultades epistemológicas que cada estudioso habrá de resolver en su propia historia de aprendizaje.

Por otro lado, para establecer las estrategias didácticas se considera el paradigma cognitivista, desde donde según Piaget (Ginsburg y Opper,1977) los estudiantes de este nivel de la educación se encuentran en la etapa de las operaciones formales, por lo que en esta etapa se está en capacidad de abstraer y realizar las más complejas actividades de razonamiento. Adicionalmente, Ausubel (Ausubel, Novak y Hanessian, 1983) mediante el enfoque constructivista de las teorías cognitivas, establece que para lograr la interiorización satisfactoria de los conceptos, el aprendizaje debe ser significativo y con ello, se modificarán las estructuras cognitivas, dando cabida a la construcción y asimilación de nuevos conceptos, siempre que los cambios en las estructuras cognitivas se fundamenten en un adecuado empleo de lo que el estudiante ya sabe, por lo que de acuerdo a sus conceptos, se deben presentar situaciones que permitan abstraer la citada propiedad bajo estudio y que esencialmente dependerá de los conceptos que el estudiante ya ha interiorizado previamente. Paralelamente se emplean los aspectos citados por Lev S. Vygotsky (Schunk, 1997) en su teoría sociocultural, en la que establece que el cambio cognitivo es el resultado de emplear los instrumentos culturales y las interrelaciones sociales y de internalizarlas y transformarlas mentalmente, su postura es de un constructivismo dialéctico porque recalca la interacción de los individuos y su entorno, uno de sus conceptos que más impacta en las acciones educativas es el de la Zona de Desarrollo Próximo, misma que Onrubia (Coll y col., 1993) estudia como intervenir en ella y propiciar el aprendizaje significativo, por eso en las actividades desarrolladas dentro del curso se espera que los estudiantes socialicen sus ideas para que de manera individual y grupal se internalicen los conceptos.

Metodología

El estudio realizado corresponde a una *investigación cualitativa de alcance exploratorio* con una población bajo estudio compuesta de 40 estudiantes de ingeniería y 22 de informática integrantes de dos grupos que cursan su correspondiente asignatura de Matemáticas I y Matemáticas II, dentro del Instituto Tecnológico de Puebla. Para generar la información que requiere la investigación se emplea el material del "Concepto 1: Números Reales" de "Un libro de Cálculo Diferencial e Integral para su empleo en las carreras del SNIT por medio de Internet" (Alvarado, M. ,2002). Este material está disponible en Internet (http:// www.itpuebla.edu.mx) y de manera complementaria se les entrega a los estudiantes en un CD. El momento didáctico en que se presenta el tema de continuidad de la recta como modelo equivalente al conjunto de los números reales, está ubicada en la unidad I del curso de Matemáticas, aunque no señalado específicamente como tema "la recta numérica", por lo que previamente a este concepto únicamente se ha dado la introducción al curso y los axiomas de los reales, dentro de los cuales se discute brevemente sobre las características globales de los números reales como conjunto y se habla de su densidad y del problema, ya citado, de encontrar el mínimo en el intervalo abierto (a,b).

Paralelamente a las sesiones presenciales del curso, dentro del libro de Cálculo, el estudiante ya ha resuelto las acciones del "Concepto cero: Introducción" (Alvarado M., 2002) y en el "Concepto 1: Números Reales" la focalización se presenta en la sección 3 que específicamente presenta el siguiente texto en las acciones 1.3.1 y 1.3.2 cuyos contenidos, base de esta investigación, son los siguientes:

Números Reales ***Acción 1.3.1***

Imagina la recta numérica y adicionalmente un lente de aumento muy poderoso enfocado a la recta, ¿qué verías?

- ¿A los puntos amarrados uno a uno como cuentas en un rosario?
- ¿Puntos acomodados como piedras para pasar un arroyo?
- ¿Bolitas muy apretaditas unas junto a otras?
- ¿Lo mismo que sin el lente?

Enfoca con más aumento lo que estás viendo e imagina un pequeñísimo insecto –del tamaño de un punto– caminado sobre la recta, que ves ahora:

- El insecto salta de punto en punto cuidando de no pisar entre los huecos.
- El insecto camina despreocupado, y pide que hasta le cubras los millones de ojos que tiene ya que está seguro que donde pise habrá un punto.
- No veo al insecto, creo que ya se cayó. –no sea payaso, esta opción no es válida–

¿Cuantos puntos tiene un segmento de recta de 1 cm de largo? ¿y de un metro de largo? ...¿y de 1 kilómetro? Puedes probar tu afirmación.

Ahora observa a tu alrededor y podrás identificar algunos segmentos de recta en las cosas materiales. Si la materia se compone de átomos, ¿la recta tiene átomos? ... la materia sí tiene huecos entre los átomos y ¿la recta?

Comparte tus apreciaciones con tus compañeros y con tu facilitador de ser necesario.

Números Reales ***Acción 1.3.2***

Los números enteros poseen la cualidad de que cada uno tiene un antecedente y un consecuente, es decir un número único que está *justamente* antes y otro que está *justamente* después (porque hay infinitos antes e infinitos después de cada número ¿o no?), es fácil encontrarlos porque su diferencia es uno, esto es: para el número **n**, su antecedente es ***n-1*** y su consecuente es ***n+1***.

Ahora si tomo la recta de los reales y me fijo en el 1 ¿cuál es su siguiente número? o ¿el anterior? No lo puedo encontrar ya que si supongo que lo encontré se puede representar por $1+\delta$, pero automáticamente $1+\delta/2$ está más cerca del uno y el número no puede ser el que dije. ¡Luego los números reales no tienen antecedente ni consecuente! Están tan "pegaditos que se confunden".

Ahora si tomo un pedacito de la recta, digamos el que está entre 1 y 5, se debe de tomar la decisión:

¿me llevo al 1 o no? ¿me llevo al 5 o no?
Si identifico el pedacito que tomé por sus extremos y además, con un paréntesis cuadrado "si me lo llevo" y con paréntesis circular si "no me lo llevo", se pueden generar 4 casos:

a. (1,5) b. (1,5] c. [1,5) d. [1,5]

¿Cuáles casos tiene elemento menor? y ¿cuáles elemento mayor? Explica porqué.
Ahora:

- Si tu tienes (2,7] y regalas (3,5) ¿con que te quedas?
- Si tienes (-1,1) y (3,10]; pero te regalan [0,11), ¿qué tienes ahora?
- ¿qué quiere decir [1,1]?
- Es cierto que [5,5) es una barbaridad, ¿porqué?

Cuando tomas de la recta todo lo que queda a un lado se emplea el símbolo ∞ para identificar el lado derecho de la recta que no termina o bien -∞ si es a la izquierda. Por lo que toda la recta será (-∞,∞).
Con esta notación que quiere decir:

- [5, ∞)
- (-∞,67)

Muchos dicen que esto tiene un error tú que opinas y porqué:

- [-2, ∞]
- [2,-4)
- [-∞,5)
- (5,- ∞)
- (8,2)

Ahora imagínate un insecto del tamaño de un punto y le pides que –con los miles de ojos que tiene vendados– camine a ciegas sobre los pedazos de recta de tu propiedad definidos por [2,5) y (5,7). Lo pones sobre el 2, lo orientas hacia el 7, y tú lo esperas con los brazos abiertos en el 7. ¿Llegará o no llegará?

Comparte tus apreciaciones con tus compañeros y con tu facilitador de ser necesario.

Fin de Acción 1.3.2

Con estos elementos se establece la siguiente metodología:

1. Se realiza la sesión presencial sobre Axiomas de los reales, que corresponde a las secciones 1 y 2 del Libro virtual. Dentro de estas sesiones se discute la continuidad de los reales.
2. Se asocia el modelo de los números reales con la recta y se discute el traslado de las propiedades axiomáticas a la naturaleza geométrica de la recta. Ya que un curso tradicional así lo espera, en este punto no se hace un refuerzo sobre la superdensidad de los reales, únicamente sobre su continuidad y con estos elementos se pide responder a las acciones 1.3.1 y 1.3.2 aquí citadas.
3. La información de los ensayos sobre las acciones 1.3.1 y 1.3.2 se reciben por internet.
4. La información recibida de los alumnos de analiza y se concluye.

Resultados

Los resultados a las dos acciones representaron una diversidad no esperada, potenciando la libre expresión, en lo general se esperaba que los resultados únicamente marcaran que opción les parecía más adecuada a la que ellos creían.

- Respecto de la *Acción 1.3.1* se obtuvieron los siguientes resultados:
  a) ¿A los puntos amarrados uno a uno como cuentas en un rosario?
  b) ¿Puntos acomodados como piedras para pasar un arroyo?
  c) ¿Bolitas muy apretaditas unas junto a otras?
  d) ¿Lo mismo que sin el lente?

De 62 estudiantes: Sólo 9 respondieron (d) que sería la respuesta esperada. 15 respondieron (a), (b) y (c) simultáneamente, 4 dijeron que todas son válidas, 12 respondieron (a) y (c) son validas y 32 respondieron (c).

- A la siguiente pregunta, se tuvo la siguiente respuesta:
  a) El insecto salta de punto en punto cuidando de no pisar entre los huecos.
  b) El insecto camina despreocupado, y pide que hasta le cubras los millones de ojos que tiene ya que está seguro que donde pise habrá un punto.
  c) No veo al insecto, creo que ya se cayó. –no sea payaso, esta opción no es válida–

De 62 estudiantes: 49 respondieron (a), y solamente 13 (b), algunos hicieron comentarios divertidos sobre (c).

- A la pregunta:

¿Cuantos puntos tiene un segmento de recta de 1 cm de largo? ¿y de un metro de largo? ...¿y de 1 kilómetro?

15 respondieron que infinitos puntos, el resto supuso que eran diferentes dependiendo de la longitud o de que tan grandes fueran los puntos.

- A la pregunta:

Si la materia se compone de átomos, ¿la recta tiene átomos? ... la materia sí tiene huecos entre los átomos y ¿la recta?

23 respondieron que depende de donde se dibuje la recta, 5 afirmaron que sí tiene átomos y finalmente 34 dijeron que no porque es "ideal".

- Respecto de la Acción 1.3.2 la última pregunta:

"Ahora imagínate un insecto del tamaño de un punto y le pides que –con los miles de ojos que tiene vendados– camine a ciegas sobre los pedazos de recta de tu propiedad definidos por [2,5) y (5,7). Lo pones sobre el 2, lo orientas hacia el 7, y tú lo esperas con los brazos abiertos en el 7. ¿Legará o no llegará?"

La respuesta fue no llegará en el 100% de los casos.

Conclusiones y Recomendaciones

En cuanto al tipo de respuestas no hubo diferencia entre los estudiantes del área de Ingeniería e Informática, la proporción de los tipos de respuesta fue aproximadamente la misma, este resultado no se pretendía averiguar. De igual forma la presentación de los reportes es más colorido y más creativo en cuanto a los estudiantes de informática, lo que muestra más experiencia en el uso de la computadora, adicionalmente su lenguaje es más ingenuo. Respecto de la pregunta de investigación se encontró solamente que 9 de 62, respondieron a lo esperado, lo cual representa una proporción muy baja, la visión estudiantil de la recta se asocia más a "bolitas muy pegaditas unas a otras" lo que permite inferir una conceptualización material de "punto". Adicionalmente muchas de sus respuestas son contradictorias, ya que se comenta "que los puntos son de diferentes tamaños" ó "ya que el espacio entre los puntos se llena por otros más *pequeñitos*"; y definitivamente a la pregunta fundamental sobre la cantidad de puntos en un segmento solamente 15 concluyeron que son infinitos. Resulta interesante la concepción inmaterial de la recta, a la cual respondieron 34 sobre el ideal que representa y el resto lo asoció al dibujo y por tanto a la materia. Sin embargo, la respuesta generalizada a la última pregunta de la acción 1.3.2, muestra que el concepto de continuidad en un punto si es interiorizado, por lo que consideramos que el concepto de continuidad resulta ser independiente del concepto de recta y que por tanto, al estar más definido su preconcepto, se debe de emplear como andamiaje para soportar los conceptos más importantes del cálculo.

Referencias Bibliográficas

Alvarado, A. M. y González, M. E. (2002). *Un libro electrónico de Cálculo Diferencial e Integral para su empleo en las carreras del SNIT por medio de Internet*. Tesis de maestría no publicada, CIIDET, México.

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* (2a. ed.). Mexico: Trillas.

Coll, C., Martín, E., Mauri, T., Miras, M., Onrubia, J., Solé, I. y Zabala, A. (1993). *El constructivismo en el aula.* (1a. ed.) España: Graó.

Edwards, C.H., Jr. (1979). *The historical development of the Calculus*. USA: Springer-Verlag. (Trabajo original publicado en 1937)

García, A.L. (2001). *La educación a distancia – De la teoría a la práctica.* España: Ariel Educación.

Ginsburg, H. y Opper, S. (1977). *Piaget y la teoría del desarrollo intelectual.* México: Prentice- Hall Internacional.

Good, L. y Brophy, J. (1996). *Psicología educativa contemporánea.* (5a. ed.). México: McGraw-Hill/Interamericana editores.

Pérez, M. y López, E. (2000). *Aprendizaje y currículo. Diseños curriculares aplicados.* Argentina: Ediciones Novedades Educativas.

Schunk, D.H. (1997). *Teorías del Aprendizaje.* (2a. ed.) México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Una Caracterización del Contrato Didáctico en un Escenario Virtual[1]

Gisela Montiel Espinosa
CICATA del IPN
México
gmontiel@ipn.mx
Educación a Distancia, Socioepistemología – Nivel Superior

Resumen

Los estudios o las investigaciones ligadas a los fenómenos de enseñanza y aprendizaje toman paradigmas diversos acordes a las teorías que han mostrado pertinencia dentro de la disciplina o área de conocimiento particular que se trate. En este sentido, al incursionar en la investigación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en escenarios de educación a distancia, nos planteamos el *cómo viven los fundamentos teóricos de nuestra disciplina*, la matemática educativa, en dichos escenarios.

La idea central de nuestra investigación consistió en estudiar las interacciones entre el profesor, el alumno y el saber matemático, en condiciones particulares. La base teórica de la que partimos es la categoría *Contrato Didáctico* de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997). Sin embargo, presentamos tres ampliaciones de aplicación de la teoría. Nuestro análisis del contrato didáctico se hace en un escenario virtual a diferencia del presencial de donde nace la teoría, los procesos de interacción se dan dentro de un programa de formación docente con el tratamiento de conceptos matemáticos de nivel superior, mientras que la teoría nace del estudio de fenómenos de la escuela elemental. Los diseños y las intervenciones del profesor, en la dirección de la *socioepistemología* (Cantoral, 2001b), impregnan las interacciones del sistema didáctico, de donde se desprendió una caracterización para el escenario específico observado. El elemento crucial para esta caracterización fue la negociación de significados y la construcción de argumentos en el alumno, de donde se localizaron episodios de interacción: *ruptura de la tradición escolar*, *adhesión al discurso*, *ruptura del contrato didáctico* y *devolución de la situación*, y s*ituación de aprendizaje* (Montiel, 2003).

Tomar a la noción de Contrato Didáctico como variable central para nuestro análisis mostró, a la luz de una reflexión teórica, un cambio de la noción misma de interacción en los escenarios de educación a distancia. Es decir, dado que el contrato didáctico no se reduce a las interacciones entendidas al nivel del contacto entre alumno y profesor, se convierte en el instrumento que nos permite ver cómo actúa el alumno en el mileu, y en ese sentido cómo es que se enfrenta a una situación problema negociando continuamente significados con su profesor. Es claro que estas interacciones toman características propias de cada escenario, pero no constituyen diferencias entre ellos, sino variables de control de cada uno. Con el análisis y los resultados obtenidos en la investigación encontramos que la interacción debe entenderse como la negociación de significados y la apropiación de conocimiento, de donde desprendemos que el contrato didáctico es una categoría teórica que vive como instrumento de análisis independiente de los escenarios.

[1] Esta investigación obtuvo el Premio Simón Bolívar 2003, que otorga bianualmente el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa a las mejores tesis de posgrado en Matemática Educativa y fue el título de una Cátedra Simón Bolívar en la Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa celebrada en Chiapas, México, en Julio de 2004.

Aproximación socioepistemológica al problema de investigación.

La aproximación socioepistemológica en la caracterización de los episodios antes mencionados, incorpora al análisis de las interacciones del sistema didáctico *las prácticas sociales asociadas a la construcción del concepto de derivada*. Ello modifica la estructura del concepto matemático en juego y su funcionamiento en el escenario escolar en línea, de manera que se afectan las relaciones que se establecen entre los estudiantes y su profesor.

Esta aproximación teórica abandona el acercamiento a la derivada a partir de *la definición de límite del cociente incremental y la explicación de la secante que deviene tangente*, ya que ello deja de lado la actividad que rodeó, acompañó y dio significado a la derivada en su contexto de origen, y por el cual se constituye como un conocimiento matemático. Cantoral (2001a) ha documentado un fenómeno análogo al de la transposición didáctica (Chevallard, 1991), pero parte de las *prácticas sociales* que dan origen y significado al concepto, no del saber erudito como concepto ya inmerso en la cultura matemática. Cantoral encontró que fue la idea de *predicción* la que generó una cantidad considerable de resultados matemáticos y que sirvió como base de la actividad matemática a partir del siglo XVII. Por esa razón, se requiere entender cuáles son los mecanismos funcionales que operan la relación, considerada dialéctica, entre las nociones de *predicción*, propia de las ciencias físicas y de la ingeniería, y de lo *analítico*, peculiar de las matemáticas (Cantoral, 2001a).

Bajo esta perspectiva, el conocimiento matemático en juego cambia radicalmente en los escenarios escolares, porque entonces no se busca trabajar con la derivada o sus estructuraciones conceptuales, sino modelar, medir, aproximar, calcular, en situaciones de variación para generar, a través de diseños pertinentes, la necesidad de una herramienta matemática que explique y resuelva dichas situaciones. Esta perspectiva teórica recibe el nombre de *socioepistemología* y asume que la *noción de derivada sólo será adquirida hasta que ésta sea vista como una organización de las variaciones sucesivas* (Cantoral y Farfán, 1998).

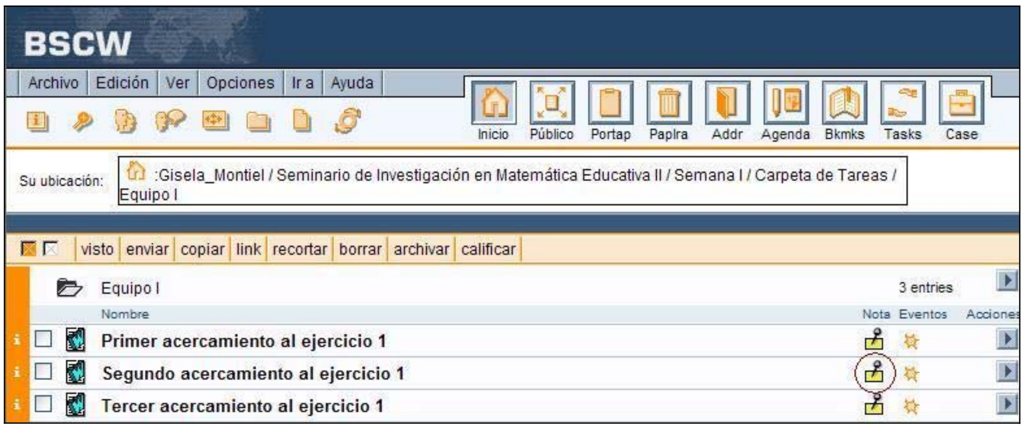
Un Escenario Virtual

Las interacciones analizadas se tomaron de un Seminario de la Maestría en Ciencias en Matemática Educativa, del CICATA del IPN que se desarrolla en la modalidad *en línea*. El ambiente tecnológico donde se llevó acabo el Seminario fue la plataforma de trabajo BSCW (Basic Support for Cooperative Work) que facilitó el trabajo a través de Internet, organizando los contenidos del seminario en carpetas de documentos. En la plataforma se abrió una carpeta por cada semana de trabajo (cuatro en total), una carpeta para la Biblioteca y se colocó un documento general que presentaba el contenido del seminario y exponía la dinámica de trabajo.

La Biblioteca contenía artículos de investigación en formato digital, videos, presentaciones e hipervínculos a sitios en la Web. Cada semana tenía un calendario, un conjunto de actividades, el foro de discusión correspondiente al tema de la semana y una carpeta para que los estudiantes colocaran sus tareas (resueltas en Procesador de Texto Word que incluían imágenes de diversas herramientas de graficación).

Todo esto constituye un espacio educativo a distancia, comúnmente denominado *virtual*, de carácter *asíncrono*, cuyos medios de interacción directa, entre profesor y estudiantes, fueron solamente los foros de discusión y el correo electrónico. Sin embargo, para efectos del análisis realizado en (Montiel, 2002), se consideraron exclusivamente las interacciones del foro de discusión.

El foro de discusión fue de fundamental importancia, en él se llevaron acabo las intervenciones que, por parte del profesor, llevaron al estudiante a la *resignificación* del concepto de derivada. El foro se dio de dos tipos, uno que iniciaba con una pregunta por parte del profesor y el otro que surgía de las dudas sobre las actividades resueltas por el estudiante o los equipos de trabajo (que estaba asociado al archivo con las respuestas a los ejercicios, ver Pantalla) y en los que intervenía el profesor con observaciones y nuevas preguntas.



La modalidad *en línea* y sobre todo el carácter *asíncrono* de las interacciones dio oportunidad a la consulta bibliográfica sin restricción, a intervalos amplios de reflexión y al uso de herramientas didácticas (como software para hacer graficas) para la resolución de los ejercicios.
BSCW registra, con día y hora, todos los movimientos que el usuario hace en la plataforma, desde visitar, crear o borrar las carpetas; abrir, guardar, borrar o colocar documentos; participar en los foros y editar o borrar las participaciones.

El papel de la práctica social en las interacciones del sistema didáctico.

El diseño del curso, las interacciones del sistema y en análisis de resultados se reportan completos en (Montiel, 2002). Para efectos de este escrito mostraremos un extracto de la situación de aprendizaje que caracterizamos en nuestro trabajo. Después de la resolución de una serie de ejercicios tradicionales complejos los estudiantes resolvieron un ejercicio no tradicional que pedía indicar los intervalos en los que una función y sus derivadas de primer, segundo y tercer orden eran positivas. La única información sobre la función que proveía el ejercicio era una gráfica, por lo que para responde dónde $f>0$, $f'>0$ y $f''>0$ se uso el recurso de dibujar sobre la curva (en diferente color) los intervalos respuesta. Sin embargo, y como ya se reporta en (Cantoral y Farfán, 1998), los estudiantes carecen de herramientas algorítmicas o analíticas para responder dónde $f'''>0$. De aquí se desprende la interacción más significativa entre estudiantes y profesor, justo cuando entra en conflicto el conocimiento previo con una nueva pregunta.
Después de algunos intentos, un equipo de estudiantes propone[2]:

---

[2] Este extracto se obtuvo directamente de la tarea entregada por el equipo ya que todas eran entregadas en formato Word.

Cada vez más cerca de f'''

Buscamos a partir de la gráfica de la función *f* generar argumentos geométricos de la variación de *f* para obtener el signo de f', de la variación de f' para obtener el signo de f'' y de la variación de f'' para obtener el signo de f'''.

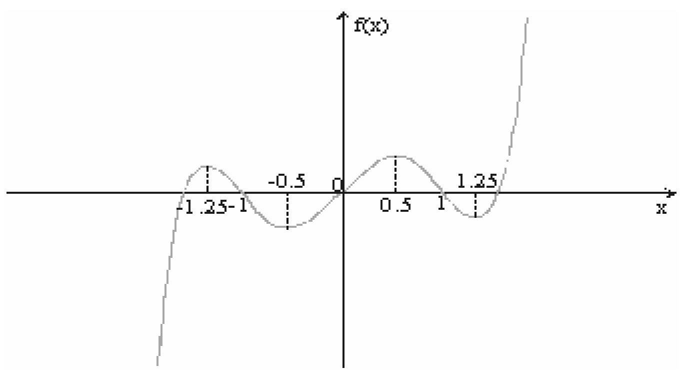
Nos basamos en el hecho de que si una función *f* es creciente en un intervalo entonces su derivada primera es positiva o cero. Para que *f* sea creciente y su derivada primera valga 0, debería tener un punto de inflexión con tangente horizontal, cosa que no ocurre en la gráfica de la función que se nos presenta.

Para esta función podremos decir que si *f* es creciente en un intervalo entonces su derivada será positiva en dicho intervalo.

Siguiendo un razonamiento análogo podríamos decir que si f' es creciente entonces f''>0 y si f'' es creciente entonces f'''>0.

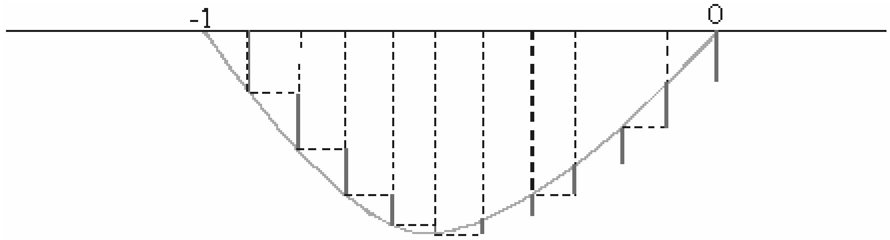
Las restricciones serían similares a las ya expuestas. Para marcar la zona de la gráfica en la f'>0 necesitamos ver que *f* sea creciente. Los valores que se tomaron son arbitrarios. El razonamiento es independiente de los mismos.

En la siguiente gráfica podemos observar que en los intervalos (-∞, -1.25), (-0.5, 0.5) y (1.25, +∞) la función *f* verifica la definición de función creciente: $\forall x_1 \in \mathrm{I}, \forall x_2 \in \mathrm{I},\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



De todo lo anterior afirmamos que f' >0 en dichos intervalos.

En este caso necesitamos "ver" que f' sea creciente para realizar un razonamiento similar al del problema 2. Para ello tomamos el intervalo (-1, 0) (por ejemplo), lo dividimos en intervalos infinitesimales iguales y construyendo los respectivos triángulos característicos podemos apreciar la variación de la derivada primera en los segmentos verticales.



Vemos en este caso que la derivada primera pasa de negativa a positiva. f' crece en este intervalo lo que nos garantiza que $f''>0$ en dicho intervalo. En este caso necesitamos "ver" donde f'' es creciente.

Esta respuesta y el análisis que hacen los estudiantes del problema están orientados por la intervención que ha tenido el profesor en el transcurso de las interacciones, y que forma parte del diseño basado en la práctica de predicción en situaciones de variación y cambio.

Cantoral y Farfán (2004) resaltan, con ejemplos particulares, cómo para Leibniz y Newton los objetos de estudio son las curvas, trayectorias y ciertas expresiones analíticas. En estos ejemplos podemos observar los argumentos de variación con apoyos geométricos y analíticos que más adelante L'Hospital (1696) y Agnesi (1748) expondrán en forma sistemática en obras concebidas para la difusión del cálculo. Castañeda (2000 y 2004) en un amplio estudio de estas obras de difusión y enfocado al punto de inflexión distingue dos caracterizaciones de este *concepto*: la geométrica y la analítica. En la caracterización geométrica se destaca el uso de las magnitudes (ordenadas) y el análisis de las curvas a través de la comparación (diferencia) entre éstas (señalando el crecimiento o decrecimiento dependiendo el signo de las diferencias). Justamente ésta caracterización constituye uno de los argumentos que presentaron los estudiantes para responder dónde la tercera derivada de una función, representada únicamente por su gráfica, es positiva.

Conclusiones Finales

Plantear un diseño escolar y hacer la devolución de la situación problema con base en la concepción de la derivada como la organización de las variaciones sucesivas, provoca la construcción de argumentos predictivos similares a aquellos que explican y caracterizan la obra matemática en su origen, y que le dan significados que hoy se han anulado con las presentaciones algorítmicas. Con esta presentación de la derivada se vieron modificadas las interacciones del sistema a nivel del lenguaje, del uso de distintos contextos para las argumentaciones y de los procesos de validación de sus conjeturas. Estos comportamientos son intencionados, a través del diseño que parte de una *epistemología basada en las prácticas sociales3* que producen o favorecen la necesidad de los conceptos matemáticos. En el caso particular del fenómeno didáctico que analizamos la base es la *práctica social de la predicción mediante la matematización de fenómenos de cambio*.

[3] Esto podría caracterizar en primera instancia el término socioepistemología, del cual nace toda nuestra reflexión.

Referencias Bibliográficas

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. En N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield (Eds). Holanda: Kluwer Academic Publishers

Cantoral, R. (2001a) *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2001b). Sobre la construcción social del pensamiento matemático avanzado. En Domínguez, J. A. y Sierra, M. (Eds.), *Actas de la Semana de las Matemáticas: Tendencias Actuales de las Matemáticas, su Historia y su Enseñanza*. Salamanca, España.

Cantoral, R., y Farfán, R.M. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. México, Thomson.

Cantoral, R. y Farfán, R.M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilón 42,* 353 – 369.

Castañeda, A. (2000). *Estudio didáctico del punto de inflexión, una aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Castañeda, A. (2004). *Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica.* Disertación doctoral no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México

Chevallard, Y. (1991) *La Transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Aique.

Montiel, G. y Farfán, R.M. (2003). El contrato didáctico en el escenario virtual. En J.R. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Vol. 16, Tomo II, pp. 803 - 809). México.

Montiel, G. (2002) *Una caracterización del contrato didáctico en un escenario virtual*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Ambiente Virtual con Soporte en la Multimedia y el Software Mathcad para el Aprendizaje de la Teoría de Polinomios

Rafael Pantoja y Ricardo Ulloa
Universidad de Guadalajara
México
rpantoja@ccip.udg.mx
Educación a Distancia y Tecnología Avanzada – Nivel Superior

Resumen

Las nuevas tecnologías, la innovación educativa, el aprendizaje significativo, la multimedia, el software Mathcad y la educación a distancia fueron sustento del ambiente virtual para propiciar el aprendizaje autogestivo de la Teoría de Polinomios de grado superior, para la Maestría en Ciencias en la Enseñanza de las Matemáticas (MCEM) modalidad presencial y a distancia. La fase de experimentación se planteo como un estudio de caso con los grupos presencial y a distancia de primer semestre. Se efectuó una comparación entre las medias de dos muestras con la prueba ***t***, con lo que se demostró que se mejora el aprovechamiento de los estudiantes. Se aplicó el modelo de regresión lineal múltiple a una encuesta y se empleo un cuestionario sobre el ambiente, de donde se concluye que la propuesta didáctica se valora en forma positiva.

Introducción

En Mason y Rennie (2004) se menciona que el diseño y la producción de material multimedia es costoso, pero provee a un curso no presencial, de una herramienta potente y sofisticada que tiene el efecto pedagógico deseado, y no debe importar el costo de diseño y producción. Desde esta perspectiva, un programa multimedia, es un elemento importante que se incluyó en la propuesta didáctica para el aprendizaje de la Teoría de Polinomios de grado superior, para las modalidades educativas presenciales y a distancia ofertada en la MCEM.

En 1993, la Universidad de Guadalajara (UDG) se transforma en una red universitaria y se crea la Coordinación de Educación Continua, Abierta y a Distancia (CEDUCA), con funciones que inciden en tres áreas relacionadas de manera directa con este proyecto de desarrollo, cuasiexperimental, cualitativo y cuantitativo: Vinculación, Diseño y Reproducción de materiales. (Ortiz, 2002, p. 45). Al ofertar la modalidad a distancia en la MCEM en 1997, la primera etapa fue rediseñar los cursos presenciales para acondicionarlos a la modalidad no convencional, en los que se nota un vacío en programas multimedia, software especializado de matemáticas, la video conferencia, los foros de discusión y los libros de texto generados especialmente para la asignatura en cuestión. De esto, surgió el propósito de diseñar este ambiente virtual de aprendizaje autogestivo para la Teoría de Polinomios de grado superior.

La fase de experimentación se planteó como un estudio de caso y se enfocó a evaluar el efecto de un ambiente virtual para el aprendizaje de la Teoría de Polinomios de grado superior. Para determinar el nivel de conocimientos se compararon las calificaciones obtenidas por los estudiantes sujetos a la experimentación *vs* las calificaciones obtenidos por los estudiantes que cursaron la materia desde 1994 al 2003, con lo que se determinó el efecto positivo de la alternativa didáctica. La comparación de los resultados de la población experimental con los productos obtenidos por las generaciones anteriores, puede ser una fuente de invalidez interna de la propuesta, pero ambas poblaciones fueron consideradas independientes, porque se trata de validar un ambiente virtual de aprendizaje muy distinto al utilizado en las mencionadas generaciones, lo que se realizó con una comparación entre las medias mediante la prueba estadística ***t***.

Los datos para el análisis cualitativo se obtuvieron de la aplicación de una encuesta y un cuestionario. La encuesta se aplicó para obtener información acerca de la satisfacción del estudiante por los medios y materiales incluidos en el ambiente virtual para el aprendizaje. Con los datos de la encuesta se utilizó el método de regresión lineal múltiple, técnica estadística que estudia la relación lineal entre una variable (criterio) y una o más variables (predictoras); se estudió la influencia de los medios y materiales que conformaron el ambiente virtual para el aprendizaje, sobre la calificación de los alumnos, emitida por el instructor para el curso de álgebra superior, *ie*, la preferencia que tuvieron los alumnos por los medios y materiales (predictoras) sobre la calificación obtenida por los estudiantes (criterio). El análisis del modelo estadístico se realizó con el programa Statgraphics.

En la encuesta se cuestionó sobre la satisfacción que produjo en los estudiantes el correo electrónico, los foros, la guía de estudio, el libro de texto, el software Mathcad y los multimedia, que se cuantificaron con una escala de Likert (González, V., 2005) del uno al cinco, a saber: (1) Completamente en desacuerdo, (2) En desacuerdo, (3) Indiferente, (4) De acuerdo y (5) Completamente de acuerdo.

Con el cuestionario (Hervaz, C. y Martín, J. 2001), se valoró en forma positiva el escenario desde el punto de vista de ser una propuesta con base en las nuevas tecnologías. Se integra de 36 ítems con 8 factores: relaciones de comunicación, motivación, participación, tecnología adecuada, autonomía, actitud, trabajo en equipo y aprendizaje
Como producto del diseño del ambiente virtual para el aprendizaje se generó un cdrom autoejecutable e interactivo que se entregó a los alumnos sujetos a la experimentación y que incluye: 5 programas multimedia: MATHCAD, ASUPERIOR, POLMULTI, NCOMPLEJOS, y MNUMÉRICOS; un libro de texto en formato PDF; la guía de estudio en formato multimedia y PDF; el modelo didáctico con el que se diseñaron los tutoriales y la descripción del método de Estudio de Caso.

Metodología

Ambiente Virtual de Aprendizaje. La educación a distancia, es una modalidad educativa instaurada en universidades del mundo para ofrecer servicios de instrucción, capacitación y actualización (UNESCO, 1998, p. 82). Aunado a esto, las nuevas tecnologías han permitido crear entornos virtuales de aprendizaje (Pimentel, 1999, p 75) que aminoran los problemas generados por la distancia física existente entre los actores de la enseñanza y el aprendizaje, que permiten la interacción y favorecen el progreso social y económico (Materi, R. y Fahy, P., 2004). *Un aula virtual es el medio en la WWW en el cual los educadores y educandos se reúnen para realizar actividades que conducen al aprendizaje* (Horton, 2000 en Scagnoli, 2001, ¶ 1 de la sección El aula Virtual). El aula virtual de la MCEM que se utilizó para la etapa de la experimentación tiene por dirección http://matedu.intranets.com.

Innovación Educativa. Las instituciones educativas son testigos de un acelerado crecimiento sobre el uso de la tecnología en el siglo XXI, que ha provocado grandes cambios en el ambiente educativo, que ha transformado la forma de vivir, de tal forma que ninguna escuela ha quedado al margen de la innovación educativa. Moreno (1997, p. 2 y 2004,) afirma que la educación es el proceso de formación y producción cultural en todas las áreas del conocimiento humano, mientras que la innovación es una práctica educativa que se liga al concepto de creatividad y ello implica el reconocimiento de un problema, la identificación de formas de resolverlo, la toma de decisiones para lograrlo e instrumentar las acciones. Así, la Innovación Educativa debe ser concebida como los cambios en las prácticas educativas institucionales que guíen a procesos que respondan de mejor manera a los requerimientos formativos de la sociedad a la que debe servir. Esto implica que todos los integrantes del sector educativo se deben capacitar y actualizar para poder enfrentar los retos que se marcan a nivel mundial, como puede ser el manejo de las nuevas tecnologías y los sistemas educativos no presenciales, incluidos en este estudio.

Nuevas Tecnologías. "*The Mathematics Framework For California Publics School*" (MFCPS, 2000), incluyó la reforma de los cursos de matemáticas desde la educación inicial hasta el bachillerato en el estado de California, USA. Uno de los puntos centrales del MFCPS, fue desarrollar materiales con sustento en las nuevas tecnologías, para que el profesor de matemáticas los utilizara en el aula, con la premisa de que las nuevas tecnologías ayudan a lograr un aprendizaje significativo de las matemáticas, a través de solucionar un problema mediante el uso de videos, hypertextos, laboratorios, acertijos, rompecabezas, software o multimedia. Para el diseño de los programas multimedia y de las actividades con el software Mathcad, se llevó a cabo una experiencia semejante al MFCPS, sólo que en el contexto educativo de la MCEM, restringido a los contenidos de la Teoría de Polinomios.

Software Mathcad. Estudios indican que la computadora y el software de matemáticas son una alternativa para aprender matemáticas (Zehavi, 1997; Yelland y Masters, 1997; Hitt, F., 1997; Puga, K. 1997; Villalobos, R. 2000; López, L, 2000). Con respecto al software Mathcad, las actividades de aprendizaje programadas que se concibieron giran en torno a los cálculos tediosos o de procesos repetitivos, como los realizados para: el cálculo de las raíces de un número complejo, encontrar las cotas de las raíces de un polinomio, determinar el intervalo donde se encuentran las raíces reales y el cálculo de raíces racionales e irracionales de un polinomio de grado *n*. Como apoyo al estudiante se elaboró un tutorial multimedia del MathCad, un programa multimedia de Métodos Numéricos y el libro "Teoría de Polinomios con soporte en el Mathcad".

Aprendizaje Significativo. El proceso de aprendizaje no es idéntico para todos los seres humanos, quienes se introducen en situaciones problémicas con estilos diferentes. Asociado con el estilo de aprendizaje se han creado teorías sobre cómo las personas aprenden, o más específicamente, sobre cómo aprenden mejor (Woolfolk, 1999, pp. 27- 50). La base teórica seleccionada para el proyecto fue el aprendizaje significativo de David Ausubel, Joseph Novak y Helen Hanesian (1983). En esta teoría se afirma que para aprender es necesario construir los nuevos conocimientos a partir de las ideas previas del alumno. Desde esta perspectiva, el aprendizaje es un proceso de contraste, de modificación de los esquemas del conocimiento, de equilibrio, de conflicto y de nuevo equilibrio otra vez (Ballester, 2002, p. 16). Según Ausubel, Novak y Hanesian "el mismo proceso de adquirir información produce una modificación tanto en la información adquirida como en el aspecto específico de la estructura cognoscitiva con la cual aquella está vinculada". (Ausubel et a, p. 14)

Los programas multimedia, el libro de texto y el Mathcad son potencialmente significativos y al final de la experimentación se corroboró que mediante el desarrollo de las actividades planeadas, los estudiantes lograron un aprendizaje significativo. Los materiales elaborados presentaron al estudiante ejemplos ilustrativos e interesantes relacionados con el nuevo conocimiento, fomentan el aprendizaje, a la vez que motivan y generan interés por el aprender.

Diseño de un Curso a Distancia. Amaral (2000) propone que el diseño de un curso a distancia debe contemplar dos conceptos: la estructura y el diálogo. Sugiere al profesor planear el curso con una ponderación orientada hacia una estructura sólida, en la que se plasmen las actividades que realizará el estudiante, además de proporcionar todos los medios y materiales que se han planeado para el desarrollo de las actividades propuestas, porque de otra manera se podría generar un diálogo intenso profesor-estudiante, estudiante-estudiante o estudiante-coordinador del programa, que pudiera redundar en una serie de conflictos para la institución y llegar, en caso extremo, a la deserción del estudiante. Con esta directriz se generó el curso de álgebra superior que se describe en forma completa en la guía de estudio (Ulloa, R, 1999, pp. 49-59) en formato multimedia y PDF y se incluye en el cdrom.

Programas Multimedia. Los proyectos de multimedia aumentan la motivación, son auténticos, promueven el aprendizaje, inspiran habilidades de pensamiento superior y son constructivistas. Un multimedia integra video, audio, gráficas y animaciones digitales. Para el proyecto se seleccionaron los programas computacionales AUTHORWARE y TOOLBOOK, porque trabajan con la plataforma Windows y permiten interaccionar con el estudiante de una manera sencilla. Los contenidos son: polinomios, números complejos, cotas de raíces, separación de raíces, regla de Descartes, el teorema fundamental del álgebra y fórmulas de Vieta.

En la realización de una opción multimedia, lo ideal es que participen dos equipos interdisciplinarios de especialistas, quienes elaboran el guión y la estructura computacional. A los expertos del área académica se les identifica como los GUIONISTAS, y tienen la responsabilidad de organizar los contenidos seleccionados para incluirlos en el multimedia. El otro equipo son los DESARROLLADORES, hábiles en programación capaces de instalar, dar mantenimiento al equipo y son los que seleccionan el software a usar. Se hace mención que quien fungió como desarrollador y guionista fue quien desarrolló el proyecto.

Modelo didáctico. La estrategia propuesta para el desarrollo de los medios y materiales didácticos inicia con la selección del tema, subtema o concepto, para después desarrollar las diez fases siguientes: definir las funciones de los actores, los propósitos de material, desglosar el contenido, elegir los principios, seleccionar los métodos y las técnicas, escoger los medios y materiales, diseñar el ambiente de aprendizaje, la evaluación de la propuesta, el diseño del proceso y creación del modelo didáctico. El material didáctico elaborado se debe experimentar varias veces, analizar sus bondades y sus defectos dado que son múltiples las variables que entran en juego, ie, propiciar la retroalimentación.

Reporte

Comparación de medias. Del informe del Statgraphics, las variancias de las muestras G2004 (grupo experimental) y Total (grupo de control) son estadísticamente iguales (F=0.786258), porque el valor de P es mayor que 0.05, ie, valor P =0.472705. Con la prueba estadística **t** se comprobó que el aprovechamiento de los alumnos sujetos a la experimentación fue mejor que el aprovechamiento logrado por las diez generaciones de estudiantes que cursaron álgebra superior de 1994 a 2003, en las modalidades presencial y a distancia. Tal afirmación se hace porque el valor de P es menor que 0.05, *ie*, P = 0.00184132 y por lo tanto se concluye que existe una diferencia significativa entre los grupos experimental y de control, así que se rechaza la hipótesis nula (H_0) y se acepta la hipótesis alternativa (H_1). Otro resultado interesante del informe, es que el intervalo de confianza para la diferencia entre las medias, [2.39548, 10.5011], no contiene el valor cero, entonces hay una diferencia estadística significativa con un nivel de confianza del 95 % entre las dos muestras.

Análisis del modelo de regresión lineal múltiple. Con la opción: *Special*➔*Advanced regression*➔ *Regression model selection* del Statgraphics se realiza un análisis de las 64 combinaciones de las 6 variables predictoras tomadas de una, dos, tres, cuatro, cinco y seis a la vez, a saber: A=Email, B=Foros, C=Guía, D=Libro, E=Mathcad, F=Multimedia. De la columna del estadístico MSE del informe, se seleccionó el menor valor, que se relaciona con la mejor combinación de las variables predictoras:

MSE	R-Cuadrado	R-cuadrado ajustado	Cp	Variables incluidas
38.898	33.9462	26.0197	2.53682	DEF

Análisis de la encuesta. A cada uno de los item de la encuesta se les asignó un valor de acuerdo a la escala de Likert. El promedio general es 4.03 y es superior al asignado a la opción **De acuerdo** de la encuesta, que fue cuatro. Las medias para el libro, los Multimedia y el Mathcad son superiores a cuatro, lo que significa que su nivel de satisfacción es superior a la opción **De acuerdo** de la escala de Likert. Los promedios para la Guía, los Foros y el Email son mayores que tres y menores que cuatro lo que considera que están **De acuerdo** en que los medios y materiales producen satisfacción. Diecinueve de los alumnos tienen promedio superior a la opción **De acuerdo**, nueve están por encima de **Indiferente** y sólo a un alumno no le producen satisfacción los medios y materiales.

Análisis del cuestionario CANTE. El cuestionario se aplicó a la población sujeta a la experimentación y se afirma en lo general que la media calculada de todos los datos supera el promedio de los valores de la escala de Likert, 3.87260586 > 3, lo que se considera que los alumnos valoran positivamente el ambiente virtual de aprendizaje. En lo individual, siete medias de los factores del I al VII superan el promedio, mientras que para el Factor VIII el promedio arrojado es menor que tres, es decir, 2.57471264 < 3.

Desarrollo del curso: El papel de observador del proceso por parte del profesor, durante la fase de experimentación, se orientó a registrar aspectos relacionados con el desempeño de los estudiantes como lo fueron: el trabajo con el cdrom para consulta de la teoría, la contestación de los doce cuestionarios, la entrega de los problemarios, la participación en los foros y el trabajo colaborativo La participación de los alumnos presenciales fue un elemento que se cuidó en detalle, porque durante las 10 sesiones de la experimentación se trató de que el trabajo colaborativo se efectuara en el aula y que al final se sobrepuso a la inercia del trabajo individual, situación que incidió en forma directa en las discusiones grupales y que las enriqueció. Lo relevante de la participación es que la interacción alumno-alumno fue mas intensa que la de alumno-profesor. En el aula virtual de la MCEM, los 22 alumnos a distancia fueron entes muy activos, reflejado en los once foros de discusión desarrollados en este sitio en internet, con 222 participaciones de un total de 259.

Conclusiones

El efecto que produjo la alternativa instruccional propuesta sobre el aprendizaje de la Teoría de Polinomios, se reflejó en las aportaciones que los alumnos de las dos modalidades hicieron durante el proceso de aprendizaje. La entrega puntual y la calidad de las respuestas a los cuestionarios y a los problemarios, así como la participación y aportación en los foros y correos electrónicos, son parámetros que se correlacionan directamente con lo respondido en la encuesta y en el cuestionario por los estudiantes, en las que manifestaron satisfacción por el ambiente virtual, lo que conllevó paralelamente a un beneficio en su aprendizaje.

El diseño del curso reafirma la posibilidad de implementar la técnica del estudio de caso en la MCEM, porque los resultados permiten evidenciar que con el uso adecuado de las tecnologías se provee de ventajas didácticas al contexto educativo, ya sea presencial o a distancia, o bien, sincrónico o asíncrono.

La encuesta asevera la satisfacción de los estudiantes por los medios y materiales que soportaron el ambiente de aprendizaje y que ayudaron a solucionar las dudas metodológicas y tecnológicas surgidas durante el proceso educativo.

Se confirma la hipótesis de que la propuesta mejoró el aprovechamiento del grupo sujeto a la experimentación con respecto al aprovechamiento de los estudiantes de la MCEM que cursaron álgebra superior de 1994 a 2003.

Una vez analizados los datos obtenidos con los instrumentos de evaluación del proceso educativo experimentado, del desempeño de los estudiantes y de las calificaciones finales, se afirma que los medios y materiales que integraron la alternativa instruccional propuesta, fueron efectivos como apoyo para lograr un aprendizaje independiente, en los estudiantes en las modalidades presencial y a distancia.

Referencias Bibliográficas

Amaral, F. (Ed.). (2000). *Strategic Planning Toward Quality of Distance Education Courses*. Obtenido en junio 14, 2005, de http://et.sdsu.edu/FRezende/eduDist.html

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1983). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Ballester, A. (2002*). El aprendizaje significativo. Cómo hacer el aprendizaje significativo en el aula*. Obtenido en junio 14, 2005, de http://www.cibereduca.com/aprendizaje/LIBRO.pdf

González, V. (2005). Método de Escalamiento Unidimensional de Likert. Obtenido en junio 14, 2005, del sitio web de la Universitat de València: http://www.uv.es/~hbaeza/PS_TEMA5_Likert.pdf

California Department of Education (2000). *Mathematics Framework for California Publics School. Kindergarden throught twelve*. California Department of Education.

Moreno, M. (1997). [Notas del Diplomado en Innovación Educativa.] Datos en bruto no publicados.

Moreno, M. (2004). *Historias de Innovación Educativa. "Un documento conmemorativo"*. Guadalajara, México: INNOVA.

Ortiz, M. (2002). Evaluación del Diseño de materiales educativo a distancia. *Una experiencia de apoyo al estilo independiente*. Guadalajara, México: INNOVA.

Pimentel, R. (1999), Design of Net-learning Systems Based on Experiential Learning. *Journal of Asynchronous Learning Networks 3*(2), 70 – 88. Obtenido en junio, 2004, de http://www.aln.org/alnweb/journal/Vol3_issue2/pimentel.htm

La Enseñanza del Concepto de Número Real en Ambientes Virtuales Interactivos

Nazly E. Salas y Harold Castillo
Pontificia Universidad Javeriana
Colombia
nazlyes@puj.edu.co, hcastillo@puj.edu.co
Pensamiento Matemático Avanzado, Tecnología Avanzada – Nivel Medio, Superior

Resumen

En este documento, se presentarán las etapas para diseñar un Modelo Instruccional en ambientes virtuales interactivos para la enseñanza de Los Números Reales, que tiene en cuenta: la formación matemática de los estudiantes, sus "niveles", sus ritmos de aprendizaje, sus obstáculos en el aprendizaje y el tiempo oficial propuesto por la institución educativa para abordar los temas. Además, se explicitan, organizan y relacionan muchos de los elementos que se conjugan, y se camuflan, en la enseñanza y el aprendizaje de los temas matemáticos; este diseño plantea ciertos elementos para el análisis del Discurso Matemático, del discurso didáctico y toma ciertos resultados de las investigaciones en Educación Matemática (Taxonomía SOLO [1] y la Teoría de Súper-ítemes[2] entre otras) para poner en relación los niveles en el discurso didáctico con los niveles de abstracción de los estudiantes.

Esquema de un concepto matemática desde una perspectiva didáctica[3].

La primera etapa para diseñar un Modelo Instruccional para enseñar un tema matemático, no sólo en ambientes virtuales interactivos, sino en cualquier ambiente educativo, es tener un esquema que permita organizar y analizar los diferentes elementos que intervienen en el discurso matemático escolar; al tratar de realizar este esquema, que oriente la enseñanza de un concepto matemático, se debe tener en cuenta que cada concepto de las matemáticas, se presenta en diversos contextos (matemáticos, en disciplinas no matemáticas y en la cotidianidad), que en estos contextos se presentan problemas (problemas por resolver y problemas por demostrar), que están presentados en ciertos sistemas de representación (Simbólica, Gráfica, Verbal, tablas, etc.) y que para su solución requieren no sólo de los sistemas de representación, sino de ciertos elementos de la estructura teórica del tema (Axiomas, definiciones, proposiciones) y de los procedimientos necesarios, en uno o varios sistemas de representación (Procedimientos demostrativas y algorítmicos).

La selección de los problemas que se deben trabajar en un tema matemático dependen de los contextos con los cuales el tema matemático pueda interrelacionarse y deben permitir el desarrollo de la estructura teórica del tema; algunos serán comunes a todos los contextos, otros inherentes al contexto matemático y otros a los contextos no matemáticos. De igual forma sucede con los sistemas de representación, algunos se podrán generalizar a todos los temas matemáticos, otros serán inherentes a cada tema matemático y otros inherentes a cada contexto no matemático.

A continuación, se va a presentar el esquema general, de un tema cualquiera, que se utilizó para analizar el discurso de las matemáticas desde una perspectiva didáctica en el curso de

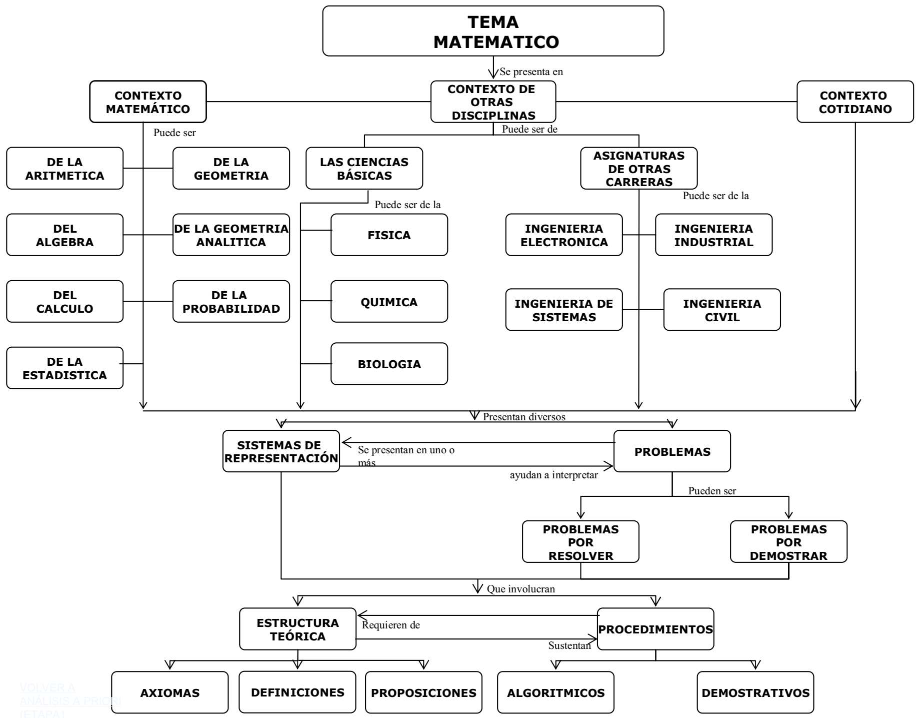
---

[1] "la sigla SOLO corresponde a: Structure of the Observed Learning Outcome" (Biggs and Collis, (1982))

[2] Romberg y otros, (1982)

[3] Muchos de los elementos que aquí se toman han tenido como base los Planteamientos de la Fenomenología Didáctica. (Freudenthal, 1983)

Cálculo I de la Facultad de Ingeniería de la Pontificia Universidad Javeriana. Cali. En él se han hecho explícitos todos aquellos elementos que se tuvieron en cuenta para la enseñanza de un tema.



Esquema de números reales desde el discurso matemático y desde lo didáctico.

En la segunda etapa se seleccionó el tema, en este caso, Los Números Reales; a este tema, se le aplicó la estructura del esquema general, relacionando: La estructura teórico conceptual (ETC), Los Contextos (CX), Los sistemas de Representación (SR) y los procedimientos (P), en los Números Reales. la cuales se les asignó el nombre de Categorías de análisis del discurso matemático. En la siguiente tabla se presenta la relación:

<table>
<tr><td colspan="5">TEMA DE ESTUDIO :Números Reales.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">Contexto
(Problemas por Resolver o por Demostrar)</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">ESTRUCTURA TEORICO - CONCEPTUAL</td><td>SR</td><td>P</td></tr>
<tr><td>DESCRIPCIÓN DEL TEMA</td><td>TEMA (incluye Axiomas, Definiciones, Proposiciones)</td><td>SUBTEMA (incluye Axiomas, Definiciones, Proposiciones)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Conjuntos Numéricos</td><td>Naturales</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Enteros</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Racionales</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Irracionales			
Relaciones entre los elementos de un conjunto numérico y el conjunto numérico y entre conjuntos numéricos.	**Relaciones de pertenencia**			
	Relación de Inclusión			
Operaciones entre los elementos de los conjuntos numéricos.	**Suma (+)**			
	Resta(-)			
	Producto (*)			
	División (÷)			
Relaciones de acuerdo con el conjunto y con la igualdad o la desigualdad entre sus elementos	**De equivalencia**			
	De Orden	**Sucesor, Buen ordenamiento, Densidad**		
Densidad de conjuntos numéricos y entre los números	**Densidad**	**- Del conjunto numérico. - Del conjunto numérico en otro conjunto numérico**		
	Propiedad Arquimediana			
Estructura de acuerdo con el conjunto, con las operaciones entre sus elementos y sus relaciones de orden	**Cuerpo**	**Propiedades: Clausurativa, Uniforme, Conmutativa, Asociativa, Modulativa, Invertiva, Distributiva**		
	Cuerpo Ordenado	**Suma de Positivos, Producto de positivos, # elevado al cuadrado.**		
	Cuerpo Ordenado Completo	**Cotas superiores, Cotas inferiores, Supremo, Máximo, Ínfimo, mínimo**		

Esquema desde lo cognitivo e interrelación de lo cognitivo con el discurso matemático a enseñar.

En una tercera etapa, se realizó un análisis cognitivo del estudiante para el aprendizaje de un tema matemático, para esto, se tomaron: (1) los elementos para la comprensión, en forma general, de un concepto matemático (Sierpinska,1992), (2) Los Niveles planteados en la Taxonomía SOLO (Biggs and Collis, 1982) y (3) los obstáculos[4] que los estudiantes presentan en el aprendizaje de este concepto. Para los obstáculos se utilizaron algunos resultados de investigaciones (Tall, 1992); así como dificultades detectadas en los estudiantes a lo largo de la experiencia docente de cada uno de los profesores que han enseñado el curso de Cálculo I de la Facultad de Ingeniería de la Pontificia Universidad Javeriana. Cali[5]. Este análisis se aplicó al tema de Números Reales.

Proceso de selección y elaboración de tareas para los números Reales.

En una cuarta etapa, se seleccionaron las tareas, donde se eligieron los problemas por resolver o por demostrar; para esto, fue necesario hacer un barrido de los libros de texto más significativos y ver, en ellos, lo que los autores esperan al terminar el tema de números reales. Los libros de texto no sólo fueron de matemáticas, sino de las otras disciplinas. También hubo necesidad de recurrir a las investigaciones hechas en números reales o en subconjuntos de éste, dónde se habían identificado problemas de aprendizaje.

En la Tabla Anexa, se presentan: las características de cada tema de los Números Reales, los objetivos finales del curso en el concepto de Número Real, los contextos, los obstáculos a priori y el título de las tareas que el estudiante deberá resolver.

Elaboración de tareas donde se interrelacionan los elementos del discurso matemático a enseñar y los niveles SOLO.

En una quinta etapa se elaboraron las tareas, en éstas, se planteó *el problema o problemas principales* que el estudiante debía resolver al finalizar el tema o subtema de Números Reales, y se plantean *problemas de menor nivel* que sirvan para que el estudiante evolucione, logrando, con la solución de *los problemas de menor nivel,* niveles de abstracción cada vez *mayores* y que le permitan resolver *el problema o problemas principales*. La forma de de organizaron y plantearon los diversos problemas y la forma como van nivelados, se apoyaron en la teoría de SUPER ITEMES (Romberg y otros (1982)); que adicionalmente, permitió establecer una correspondencia entre los problemas en niveles con los niveles planteados en la Taxonomía SOLO; es así, como los SUPERITEMES, se convirtió en el elemento que puso en correspondencia los niveles del discurso matemático a enseñar, con los niveles de abstracción de los estudiantes.

En la Tabla, se presentan los elementos que se consideraron en la selección y elaboración de las tareas; en ella se muestra un tronco de súper ítem que abarca todos los niveles SOLO y en dónde aparecen las categorías de análisis del Discurso Matemático con fines didácticos; pero, al plantear el tronco que dará solución a una problemática, las tareas pertenecientes a los niveles preestructural, uniestructural, multiestructural, relacional y de abstracción extendida no deberán pertenecer necesariamente a la misma categoría, puede ser que en un tronco resulten tareas que abarquen una categoría o distintas categorías.

[4] Para los obstáculos, se han considerado algunos resultados de investigaciones en Pensamiento Avanzado. (Tall, 1992).
[5] El grupo de profesores está conformado por una base de siete docentes que desde el año 2001 ha venido trabajando en la problemática: Transición bachillerato – Universidad. Y ha conformado un Grupo de Trabajo Sobre Evaluación en Matemáticas que hace parte de la Linea de Investigación: Educación Matemática y Tecnología de la Pontificia Universidad Javeriana. Cali. Colombia.

Aplicación de las tareas, recolección de datos y análisis de las respuestas.

En una sexta etapa se aplicaron las tareas en forma de cuestionarios a todos los estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Pontificia Universidad Javeriana. Cali del segundo semestre de 2003, donde las respuestas fueron caracterizadas, agrupándolas en respuestas de índole semejante, y donde se verificaron los niveles establecidos a priori, con base en la frecuencia de respuestas correctas.

El modelo instruccional[6].

Una séptima etapa fue el diseño del Modelo Instruccional, el cual, se fundamenta en una herramienta computacional que el estudiante puede acceder desde cualquier lugar donde tenga acceso a Internet y que consta de un examen diagnóstico con el que se establece los niveles de los estudiantes en cada una de las problemáticas establecidas en la enseñanza de los Números Reales y, a partir del nivel mostrado en el examen, la herramienta le plantea tareas con opciones de respuesta y opciones de justificación (en troncos de SUPERITEMES), que de acuerdo a un porcentaje de aciertos, le permite evolucionar en su nivel. Con la herramienta computacional, el aula de clase se convierte en un sitio de discusión y no de presentación expositiva de los temas.

Referencias Bibliográficas

Alvarez, J. (1991). El Concepto de Modelo Instruccional y su Utilidad en un Programa de Mejoramiento de la Enseñanza de las Matemáticas a Nivel Universitario. *lecturas matematicas*. Vol. XII, Números 1-2-3. Cali, Colombia.

Alvarez, J. y Marmolejo, M. (1990). Sobre el Bajo Aprovechamiento Estudiantil en los primeros cursos universitarios de matemáticas en la universidad del valle. *Matematicas: Enseñanza Universitaria*. Vol. 1, No.2. Cali, Colombia.

Biggs, J. y Collis, K. (1982). *Evaluating the Quality of learning: The Solo*. New York, Academy Press.

Biggs, J. (1991): Multimodal Learning and the Quality of intelligent Behaviour, en Rowe, H. (ed.) Intelligence: Reconceptualization and Measurement. LEA, *Australian Council for Educational Research,* pp. 57 – 76.

Freudenthal, H. (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Reidel, Dordrecht.

Romberg, T. (1982): *The Development of Mathematical Problem-Solving Superitems*. A report on the NIE/ECS Item Development Project. Wisconsin Center for Education Research, The University of Wisconsin, USA: Madinson, Wisconsin.

Tall, D. (1992). The transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. *Handbook of Research on math. Teaching and Learning (NCTM).*

[6] Este modelo instruccional ha tenido diversas pruebas piloto para establecer claramente los niveles de las situaciones problemas o tareas, y determinar las preguntas del examen diagnóstico.

Un Estudio sobre Interacciones y Comunicación en Educación Matemática a Distancia

Mario Sánchez y Rosa María Farfán
Cicata-IPN, Cinvestav-IPN
México
mosanchez@ipn.mx
Educación a Distancia – Nivel Superior

Resumen

Con base en el supuesto de que cuando se está tratando de comunicar una idea o un concepto matemático, lo que se comunica no es el objeto mismo, sino representaciones de éste, las cuales pueden manifestarse en contextos algebraicos, gráficos, numéricos y otros; nos cuestionamos acerca de los procesos de comunicación de tales representaciones en un medio escrito como los chat y los foros asincrónicos. En nuestra investigación hemos tratado de identificar y caracterizar los objetos ostensivos (Bosch y Chevallard, 1999) que son activados cuando se intenta comunicar una identidad matemática particular en situación escolar utilizando los medios de comunicación escrita, propios de la educación a distancia. En particular centramos nuestra atención en el fenómeno didáctico que hemos denominado *estabilización ostensiva*.

Introducción

La educación matemática a distancia, vía internet, es hoy una realidad en el escenario educativo mundial. El avance de la tecnología continúa abriendo nuevas posibilidades y modos de instrucción en esta área lo cual está originando que en México, cada vez más instituciones educativas se sumen con sus respectivas ofertas y propuestas educativas a esta nueva modalidad de instrucción. Como consecuencia de este crecimiento en el sistema educativo de nuestro país, cada vez más ciudadanos están recibiendo su formación profesional por este tipo de medios, aún y que desconocemos gran parte de las consecuencias didácticas y de los nuevos fenómenos que se generan en esta modalidad de instrucción.

Antes de continuar, nos gustaría aclarar nuestra concepción de lo que es educación a distancia: La educación a distancia es una forma de instrucción en la que estudiantes y profesores se encuentran interactuando en torno a un objeto de conocimiento, además de que entre los participantes de tal interacción existe un distanciamiento físico y la comunicación entre ellos se encuentra mediada por el uso de la computadora. En este tipo de escenarios (al igual que en otros escenarios de instrucción), la interacción es considerada por docentes e investigadores como un elemento fundamental de la práctica educativa:

> El profesor, el estudiante, el objeto de conocimiento y los objetivos de enseñanza son los elementos de cualquier práctica educativa, pero es la interacción entre ellos la que determina dicha práctica. La interacción es entonces el elemento intrínseco de la efectividad de cualquier ambiente educativo, en la educación a distancia es el componente nuclear de toda estrategia instruccional. (Montiel, 2002, p. 25).

En el caso de la educación a distancia, el concepto de interacción puede ser mucho más amplio que el considerado en la educación presencial debido a que se consideran categorías de interacción [1] que son exclusivas de este tipo de escenarios dada la naturaleza tecnológica

[1] Un estudio sobre tales categorías de interacción puede ser encontrado en Sánchez (2003).

de los mismos. En nuestro trabajo hemos acotado el área de análisis, enfocándonos en el estudio de las interacciones de tipo estudiante – estudiante debido a que nos interesa conocer y caracterizar los fenómenos didácticos (en particular aquellos asociados a la comunicación de ideas matemáticas) que se pueden presentar cuando la figura del profesor no interviene en el proceso de interacción.

El escenario

Para desarrollar este estudio, se estuvieron registrando y analizando durante un semestre las interacciones realizadas entre algunos de los estudiantes del programa de Matemática Educativa a distancia del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional (Cicata-IPN) en México, Distrito Federal. Como estudiantes de este posgrado, los profesores[2] se encuentran involucrados en la resolución de diferentes actividades matemáticas a lo largo de sus cursos. Más adelante mostraremos algunas de las actividades matemáticas que se propusieron a los profesores y algunos de los resultados encontrados al analizar las interacciones generadas en la resolución grupal de las mismas.

La aproximación teórica

Para efectuar el estudio, fue necesario encontrar un elemento teórico-metodológico que cubriera nuestras necesidades de investigación, esto es, que nos permita mirar de una manera fina y detallada la interacción de los estudiantes insertados en un medio virtual y que dé un énfasis especial al rol de la comunicación durante las interacciones. La necesidad de localizar un instrumento metodológico con tales características nos llevó a indagar en los instrumentos metodológicos propuestos en la literatura especializada de educación a distancia para el estudio específico de interacciones entre estudiantes. En esta búsqueda se encontraron algunas herramientas metodológicas especialmente diseñadas para llevar a cabo las observaciones de las interacciones (ver Sánchez, 2003), sin embargo, dada la naturaleza de las mismas, el utilizar este tipo de metodologías nos permitiría mirar el curso y desarrollo de las interacciones de los estudiantes, pero nos ocultaría el papel que juega la comunicación en el surgimiento de objetos matemáticos durante las interacciones. Es así que la atención de nuestra búsqueda de un instrumento metodológico que se adecuara a las necesidades de nuestra investigación abandonó el campo de la educación distancia, para enfocarse al campo de la investigación en Matemática Educativa con miras en realizar alguna adaptación teórica como lo proponen algunos investigadores:

> The recent developments in technology and growing interest for using virtual means and online materials in the teaching of mathematics in general and [linear] algebra in particular necessitate a study of these phenomena from a educational point of view... [These studies] should explore theorical frameworks that can explain mathematics teaching and learning in these environments. These research might include a look at the existing frameworks to verify if and how they fit into the new environments, and see what modifications are necessary to explain the new phenomena. (Oktaç, 2001, p. 502).

El instrumento metodológico que empleamos para el análisis de las interacciones entre estudiantes se basa en los supuestos teóricos establecidos en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1992) y en particular en el trabajo desarrollado por Bosch & Chevallard (1999) referente a la dimensión ostensiva de la actividad matemática. La TAD

[2] En la actualidad, la mayoría de los estudiantes de este posgrado son profesores de matemáticas activos.

establece que la actividad matemática se encuentra condicionada por objetos materiales, ya que los objetos matemáticos no son directamente accesibles a los sentidos; esto quiere decir que cuando se está trabajando con objetos matemáticos, en realidad se están manejando *representaciones* de los mismos. Es en este punto que la TAD establece una diferencia entre dos tipos de objetos: los objetos *ostensivos* y los *no ostensivos*:

> Nous parlerons d'*objet ostensif* – du latin *ostendere*, <<montrer, présenter avec insistanse>> – pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible. Ainsi en est – il d'un objet matériel quelconque et, notamment, de ces objets matériels particuliers que sont le sons (parmi lesquels les mots de la langue), les graphismes (parmi lesquels les graphèmes permettant l'écriture des langues naturelles ou constitutifs des langues formelles), et les gestes. Les objets *non ostensifs* sont alors tous ces <<objets>> qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement – au sens où on leur attribue une existence – sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, percus ou montrés par eux-mêmes: ils ne peuvent qu'être *evoqués* ou *invoqués* par la manipulation adécuate de certains objets ostensifs asocies (un mot, une phrase, un graphisme, une écriture, un geste ou tout un long discours). (Bosch y Chevallard, 1999, p. 90).

Según la TAD, cuando se está realizando una actividad matemática, los ostensivos asociados que se activan se manifiestan en diferentes *registros ostensivos*, como el registro oral, el registro escrito (que incluye gráficos y escrituras) y el registro gestual. Es en este momento que surge una de las preguntas centrales de esta investigación:

¿Cuáles son las características de los objetos ostensivos manifestados en la educación matemática a distancia?

Con la finalidad de ilustrar esta respuesta, a continuación mostraremos dos pequeños extractos de dos diferentes episodios de interacción entre estudiantes cuando éstos se encuentran discutiendo una actividad matemática asignada durante el curso

Sobre la articulación de discursos gráficos

La siguiente actividad fue discutida y solucionada por los estudiantes en un foro asincrónico. Elegimos analizar esta discusión porque la actividad requería de la formulación de argumentos en un contexto gráfico y nos interesaba conocer cómo se comunicaban tales ideas:

La actividad matemática
Estudie los efectos gráficos de variación de parámetros A, B, y C, y elabore explicaciones de los motivos de tales efectos gráficos.

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

Enseguida se muestra la explicación que da uno de los profesores a la actividad anterior durante el desarrollo de un foro de discusión asincrónico y el posterior análisis de la misma:

Actividad A1.1 Expuesto por Pablo	5/22/2003 11:13 PM
A1.1.1 **[304]**	

y=x^n cuando n=1; obtenemos una recta que cruza el eje coordenado en el origen y su crecimiento será del tercer cuadrante al primer cuadrante, con un angulo de inclinación de 45°. **[305]** cuando n es par; la gráfica será una parabola con vertive en el origen; conforme auente "n" sus "brazos" seran cada vez más cerrados (se acercan al eje "y"), y los puntos más cercanos al vertice cada vez se pegan al eje "x" en el intervalo (-1,1). **[306]** Cuando n es impar: obtendremos una curva cuyo crecimiento será : en el lado negativo el "brazo" hacia abajo (para valores muy pequeños de "x" obtendremos tambien valores muy pequeños de "Y") con un punto de inflexión en el origen y en el lado positivo el "brazo hacia arriba (para valores grandes de "x" valores más grandes de "y"); si aumentamos los valores de n los Brazos seran cada vez más cerrados (se acercan al eje "y"); es decir su crecimiento es más rápido; mientras que en los puntos más cercanos al punto de inflexión la función se pega al eje "x" en el intervalo de (-1,1).

Como podemos observar Pablo trata de articular un discurso que le permite describir características puntuales y globales de la representación gráfica de una expresión algebraica particular. Un discurso descriptivo de este tipo puede estar presente durante una situación de instrucción matemática presencial, muy probablemente en un formato oral-gesticular acompañado de algún gráfico en particular al que el discurso está haciendo referencia; sin embargo, dadas las características del foro asincrónico, el estudiante elabora un discurso escrito pero que en conjunto está haciendo referencia a características gráficas del objeto matemático, es decir, aunque el discurso se desarrolla en un registro escrito, la intención del estudiante es evocar un registro gráfico. Es importante destacar la utilización por parte del estudiante de *símbolos* dentro de su discurso gráfico: el medio escrito permite al estudiante la utilización de símbolos dentro de su discurso que en un discurso oral sería imposible de utilizar, por ejemplo, en lugar de utilizar expresiones como: "con un ángulo de inclinación de cuarenta y cinco grados", el estudiante utiliza el símbolo 45° para denotar la magnitud de inclinación de la recta. Pasemos ahora al análisis de la enunciación [305]. Nuevamente se presenta un discurso gráfico, pero con algunos elementos que le dan un carácter diferente al anterior discurso. Tratemos de aclarar lo anterior: El discurso presentado por Pablo en la enunciación [304], es un conjunto de palabras que describe las características de una representación gráfica *estática*, es decir, Pablo nos describe algunas características de la representación grafica de una expresión en particular, $y = x$. En cambio, el nuevo discurso gráfico desarrollado en [305] nos describe comportamientos gráficos no estáticos que representan procesos y lo más interesante de esta situación es que utiliza una especie de *metáforas* (además de símbolos) para evocar dichos procesos. Por ejemplo, el empleo de palabras en el discurso gráfico tales como "vértice" u "origen", le permite al interlocutor hacer referencia a *características puntuales* de la representación gráfica en cuestión; en cambio el uso de palabras o frases como "brazos", "cada vez más cerrados" o "se pegan" dan la posibilidad al estudiante de representar *características globales* del gráfico e incluso referirse a procesos como lo hace Pablo para tratar de explicar el comportamiento gráfico de las ramas de la parábola al aumentar n en la expresión $y = x^n$. Pareciera ser que Pablo otorga un estatus diferente a estas palabras metafóricas dentro de su discurso, ya que como podemos apreciar éstas son escritas entre comillas (el caso de "brazos") o proporciona una explicación adicional sobre su significado (en el caso de "serán cada vez más cerrados", refiriéndose a que las ramas de la parábola se acercan al eje de las ordenadas).

Sobre la adaptación de los ostensivos algebraicos y su estabilización

Como hemos podido apreciar, al verse imposibilitado a utilizar representaciones algebraicas tales como x^2, el estudiante como parte de un proceso de adaptación al medio, utiliza modos de representación algebraica adaptados a la interfase como x^2. Este fenómeno de la correspondencia entre los conceptos conocidos por el usuario de la computadora y su representación en la interfase ha sido denominado *correspondencia semántica directa*. Si los conceptos representados al interfase son diferentes de los conceptos habituales, la interfase obliga al usuario a hacer un esfuerzo de adaptación de sus conceptos a los que se le presentan. (Nanard, 1990, citado en Jean, 2000).
Un fenómeno que nos llama la atención, es que casi en la totalidad de las interacciones observadas, los estudiantes utilizan el símbolo "^" para denotar un determinado exponente, y lo utilizan sin dar una explicación previa sobre el significado de la notación; es muy probable que el origen de la utilización de dicha simbología este relacionado con la utilización de software matemático o calculadoras graficas, ya que en la mayoría de estas herramientas tecnológicas, la representación de expresiones exponenciales se realiza empleando este símbolo.

Finalmente, hemos encontrado que los procesos de interacción prolongados entre estudiantes (de varios días de duración) tienden a conducir hacia un estado de *estabilización ostensiva*, esto es, acordar de manera implícita el empleo de ciertos símbolos para denotar ideas matemáticas. Por ejemplo, en una discusión en que se involucraron dos estudiantes, constantemente hacían referencia a la expresión $\sqrt{x}$ mediante las adaptaciones SQRT (x) y raíz (x) respectivamente. Después de analizar diferentes episodios de la interacción entre estos estudiantes fue notable encontrar que estas adaptaciones ostensivas se estabilizaban mediante el acuerdo implícito de la utilización de sólo uno de los símbolos por parte de ambos estudiantes, es decir, apartir de cierto momento en la interacción, los dos estudiantes se encontraban utilizando la expresión raíz(x) sin antes haber tenido un acuerdo al respecto. Este no fue el único caso observado en el que la acción de la interacción conducía a este proceso de estabilización.

Consideraciones finales

A pesar de que los medios de comunicación escrita propios de la educación a distancia no poseen herramientas de comunicación tales como el recurso oral o la gesticulación, esto no impide que los estudiantes puedan comunicar características gráficas, numéricas o algebraicas de los objetos matemáticos. Para comunicar tales ideas matemáticas es necesario realizar ciertas adaptaciones ostensivas.
Los procesos de interacción pueden facilitar la generación de consensos en la comunicación de entidades matemáticas como la que hemos denominado estabilidad ostensiva. Por esta razón probablemente sea necesario desarrollar proyectos de investigación que observen y reporten cómo este tipo de fenómenos evolucionan a lo largo del tiempo. Es así que la educación matemática a distancia se plantea como un campo de investigación fértil para la Matemática Educativa.

Referencias Bibliográficas

Chevallard, Y. (1992). Concepts Fondamentaux de la Didactique: Perspectives Aportes par une Approche Anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 12*(1), 73 – 112.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1998). *Estudiar Matemáticas. El Eslabón Perdido entre Enseñanza y Aprendizaje*. México: Biblioteca del Normalista, SEP.

Bosh, M. y Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'etude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19*(1), 77 – 124.

Jean, S. (2000). *PÉPITE : un système d'assistance au diagnostic de compétences*, Disertación doctoral no publicada, Université du Maine, Francia. Obtenido en junio, 2003 del sitio web de Université Claude Bernard Lyon 1: http://www710.univ-lyon1.fr/~sdaubias/these_HTML/soutenance/

Montiel, G. (2002). *Una caracterización del contrato didáctico en un escenario virtual*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Nanard, J. (1990) *La manipulation directe en interface homme* – machine. Disertación doctoral no publicada, Université de Montpellier II, Francia.

Oktaç, A. (2001). The Teaching and Learning of Linear Algebra: Is it the same at a distance? En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, vol. 2* (pp. 501-506). Melbourne, Australia.

Sánchez, M. (2003). *Un estudio sobre interacciones y comunicación en educación matemática a distancia*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México

El Uso de las Nuevas Tecnologías de la Información en la Enseñanza de las Matemáticas

Dario Santiago y Lourdes Quezada
Tecnológico de Monterrey
México
ruben.dario@itesm.mx
Tecnología Avanzada – Nivel Superior

Resumen

Los cursos de matemáticas para estudiantes de ingeniería, del Campus Estado de México del Tecnológico de Monterrey, fueron diseñados considerando el uso de ciclos de aprendizaje, técnicas didácticas, herramientas de apoyo tecnológico y nuevas tecnologías de información. Cada curso se organizó en pequeñas unidades de aprendizaje basadas en la teoría APOE y los ciclos ACE incorporando al final del ciclo actividades complejas de resolución de problemas o de aprendizaje basado en problemas. Los cursos son apoyados por las plataformas Blackboard y WebTec donde se organizan los materiales, se programan actividades e interactúan de forma remota profesores y alumnos. El objetivo de este trabajo es presentar las ideas que sustentan el diseño de cada curso, las tecnologías de información utilizadas y algunas de las conclusiones obtenidas en el proceso de implantación.

Introducción:

Las nuevas tecnologías de información han generado un cúmulo de avances y abren nuevas perspectivas de desarrollo en todos los ámbitos educativos. En particular, en el área de la educación en matemáticas permiten, por ejemplo: ampliar la cantidad de información (cualitativa y cuantitativa) que se ofrece a los estudiantes; crear escenarios más flexibles para el aprendizaje (audiovisuales, multimedia, animaciones, simulación de procesos); eliminar las barreras espacio-temporales para la interacción entre el profesor y los estudiantes; incrementar las modalidades de comunicación (conversación el línea, correo electrónico, grupos de discusión); favorecer los aprendizaje autónomo y colaborativo; ofrecer nuevas posibilidades para la orientación y el tutoreo y crear nuevas modalidades de organizar la actividad docente (Blázquez et al., 2004).

En el departamento de Física y Matemáticas del Campus Estado de México (CEM) del Tecnológico de Monterrey, hemos elaborado un plan de acción para incorporar estas tecnologías emergentes a los cursos que imparte el departamento. El plan incluye capacitación de los profesores en didáctica, diseño instruccional, plataformas tecnológicas, tecnología Web, análisis y evaluación del proceso de implantación de los cursos. En el área de Matemáticas para Ingeniería hemos desarrollado cursos de cálculo diferencial e integral de una y varias variables, ecuaciones diferenciales, álgebra lineal, métodos numéricos y probabilidad y estadística.

En este trabajo presentaremos primero la metodología de diseño seguida en la preparación de los cursos. Posteriormente el esquema de capacitación de profesores y finalmente algunos resultados obtenidos en el proceso de implantación de los cursos indicados.

Metodología de diseño.
Los elementos fundamentales considerados en el diseño de nuestros cursos son:

- El Modelo Educativo del Tecnológico (MET)
- Uso de ciclos de aprendizaje.
- Uso de técnicas didácticas como Resolución de Problemas (RP), Aprendizaje basado en Problemas (ABP) y Aprendizaje Colaborativo (AC).
- Uso de plataformas tecnológicas de comunicación electrónica, como BlackBoard (BB) y WebTec (WT) que tienen incorporadas herramientas como grupos de discusión, conversación en línea, áreas para trabajo de equipos, sección de intercambio de archivos, áreas para exámenes en línea, áreas para colocar materiales del curso.
- Uso de paquetes computacionales de matemáticas para apoyar la enseñanza y el aprendizaje.

El MET surge a partir de la Misión del Tecnológico y considera el desarrollo de habilidades, actitudes y valores de forma premeditada en cada uno de los cursos que se imparten en la institución. Para ello cada curso debe incluir objetivos, contenidos, actividades y evaluación (Martin,2002).

El ciclo de aprendizaje que se considera en cada una de las unidades de nuestros cursos contiene los siguientes cuatro aspectos:

- Actividades individuales de exploración computacional por medio de los paquetes Mathematica y Excel.
- Cátedra del profesor.
- Actividades colaborativas de resolución de ejercicios o de problemas.
- Vinculación con la realidad a través de problemas complejos.

Este ciclo tiene su origen en los ciclos ACE y la teoría APOE (Asiala et al., 1996).

Al incorporar las técnicas ABP y RP en los cursos se han seguido tres principios básicos (Torp & Sage, 1998):

- El entendimiento de una situación o problema real se produce por las interacciones con el medio ambiente.
- El conflicto cognitivo al enfrentar cada nueva situación estimula el aprendizaje.
- El conocimiento se desarrolla mediante el reconocimiento y aceptación de los procesos sociales y de la evaluación de las diferentes interpretaciones individuales del mismo fenómeno

La caracterización del problema marca la diferencia fundamental entre estas dos técnicas. En el caso de RP el problema está definido y estructurado (Ortega et al., 1998) mientras que en ABP el problema es una situación no bien estructurada o definida. En el diseño de las actividades de RP se considera la metodología de los cuatro pasos de Polya (Polya, 1965) que consiste en: comprender el problema, concebir el plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida. Para esto se proporcionan a los alumnos apoyos orientadores de su aprendizaje. En el caso de las actividades de ABP se considera en el diseño la metodología siguiente:

- Presentar el problema o escenario (clarificar términos).
- Definir el problema.

- Listar "Qué se conoce" y "Qué se necesita conocer".
- Listar posibles estrategias de solución (acciones, recomendaciones, hipótesis). Llevar a cabo la estrategia.
- Presentar y fundamentar la solución
- Evaluación y retroalimentación

Las dos técnicas mencionadas se apoyan en la filosofía del AC cuyos componentes básicos son: interdependencia positiva, responsabilidad individual, procesamiento grupal, habilidades sociales e interacción cara a cara (Johnson, Jonson y Holubec 1995). En las actividades de AC se debe determinar: el tipo de colaboración, el papel que juega cada miembro del equipo, el papel del profesor, la programación de los componentes básicos, las rúbricas de evaluación, el material requerido, y la descripción de cómo se debe desarrollar la actividad. Existe gran cantidad de técnicas colaborativas, entre las seleccionadas para nuestros cursos destacan: investigaciones dirigidas en el Web, actividades de exploración computacional, actividades de resolución de ejercicios, de resolución de problemas guiados, etc. Todas estas técnicas permiten estructurar los cursos deliberadamente de acuerdo a las habilidades, actitudes y valores que promueve la Misión del Tecnológico.

Las plataformas tecnológicas permiten organizar el curso en módulos temáticos presentando a los alumnos la programación de las actividades a desarrollar en el curso, las formas de evaluación y los materiales requeridos para su realización. Con las plataformas orientamos el aprendizaje manteniendo un acercamiento entre los alumnos y los profesores y obtenemos las ventajas señaladas en la introducción (ITESM, 1995).

Los paquetes computacionales de apoyo matemático usados en nuestros cursos son Excel y Mathematica, En los cursos se tienen prácticas orientadas a conocer los paquetes, a utilizarlos para fortalecer los conceptos matemáticos y como una herramienta para resolver problemas complejos.

Elementos de un curso

Los documentos que se incorporan en cada uno de los cursos se agrupan en la guía didáctica y las unidades de aprendizaje. En la guía se incorporan documentos como: introducción, intenciones educativas, objetivos, contenido, mapa conceptual, estrategia didáctica, qué se espera de los participantes, sistema de evaluación, fuentes de información y recursos tecnológicos. Cada uno de ellos tiene una razón de ser.
Los elementos de cada unidad de aprendizaje son: título, introducción, objetivos, actividades en el aula, actividades en línea, material didáctico relacionado con el contenido del curso y guía para el profesor adoptante. Cada unidad de aprendizaje cuenta con una o más actividades. Los elementos de una actividad son generalmente: título, objetivos, instrucciones para el desarrollo (dentro o fuera del aula), material para el alumno y formatos de evaluación.

Evaluación de los cursos

Para evaluar los cursos se tienen los siguientes criterios mínimos:

1. Intenciones educativas relacionadas con el perfil formativo de los alumnos
2. Contenidos agrupados en unidades de aprendizaje.
3. Actividades programadas que utilizan una técnica didáctica.
4. Actividades a realizarse dentro y fuera del aula, auxiliándose de las herramientas contenidas en las plataformas tecnológicas.
5. Las actividades programadas en la plataforma indican lugar de realización, tiempos estimados de realización, evaluación, materiales.
6. Fuentes de información actualizadas
7. Existe información sobre los recursos tecnológicos requeridos por el curso.
8. Sistema de evaluación acorde con la filosofía del curso.
9. Existe un documento orientador de la metodología y de los compromisos de alumnos y profesores.
10. Existe un uso racional de la plataforma tecnológica.
11. Existe un documento de apoyo al profesor adoptante

Se cuenta también con otros criterios relacionados con las unidades de aprendizaje y con las técnicas didácticas usadas en los cursos. Estos criterios son una guía para los profesores autores y son la base para la elaboración de los cursos.

Capacitación de profesores

La capacitación de profesores tiene dos vertientes. La primera está enfocada a los profesores autores de los cursos y la segunda a los profesores adoptantes. Los profesores autores reciben capacitación en diseño instruccional, en tecnología de diseño Web y en técnicas didácticas de corte presencial y técnicas didácticas con uso de tecnología de comunicación electrónica.
Los adoptantes reciben un curso de transferencia del curso impartido por los profesores autores, cursos sobre tecnología Web y didáctica y un curso básico de seguimiento de la práctica docente. En la primera los profesores conocen el curso, los materiales y las actividades a realizar. En la segunda conocen las herramientas tecnológicas y didácticas que son el fundamento del curso. En la tercera se les instruye para ir recolectando información sobre el impacto del curso en los alumnos. Entre las acciones que los profesores realizan en la última fase se encuentran un examen diagnóstico de conocimientos y habilidades previos, análisis del curso (objetivos, actividades, material didáctico, evaluación), encuesta sobre el ambiente en el aula, reflexión del profesor sobre su práctica docente y el uso que le da a las herramientas tecnológicas. Estos resultados permiten ir adecuando el curso a las necesidades del grupo de profesores que lo imparte.

Opinión de alumnos y profesores

Al término de los semestres agosto-diciembre de 2003 y enero-mayo de 2004 se aplicó una encuesta a 78 alumnos y 23 profesores sobre su percepción del impacto de los cursos. La encuesta para alumnos consistió de 18 preguntas divididas en cuatro rubros: trabajo del alumno, trabajo del profesor, técnica didáctica y uso de tecnología. En cambio la encuesta para profesores constó de 16 preguntas relacionadas con su papel en el aula, resultados de los alumnos, uso de la tecnología y uso de la técnica didáctica. De los resultados de las encuestas, presentados en las Figuras 1-2, se puede concluir que las opiniones de alumnos y profesores no

difieren significativamente en cuanto al uso de las plataformas tecnológicas ni en las habilidades que se desarrollan en los cursos.
Los profesores señalan, en otros resultados obtenidos de la encuesta, que el proceso de implantación es bueno, pero que puede hacerse mejor y que requieren más apoyo en sus áreas de especialidad. Los resultados no difieren mucho de semestre a semestre. En la Figura 3 mostramos los resultados sobre la implantación.

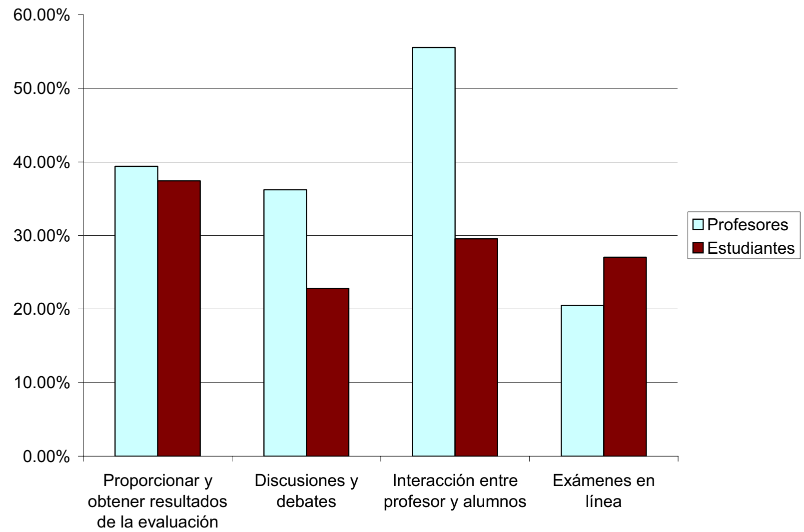


Figura 1. Usos que alumnos y profesores dan a la plataforma tecnológica.

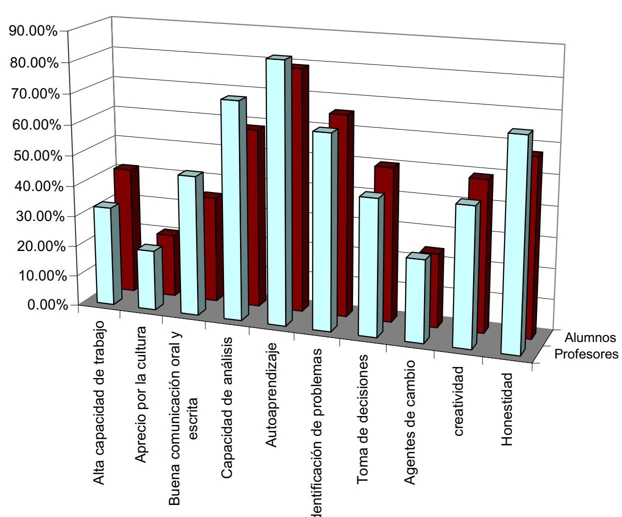


Figura 2. Habilidades que desarrollan los alumnos de acuerdo a la percepción de ellos mismos y de sus profesores.

Conclusiones

El modelo que hemos seguido para elaborar los cursos de matemáticas para estudiantes de ingeniería ha incorporado los elementos principales del modelo educativo del Tecnológico: el profesor, los estudiantes y el apoyo de plataformas tecnológicas de comunicación electrónica.
Los profesores han tenido que modificar sus técnicas de enseñanza, basados en las características de la educación de nuestros días. Por esta razón se les ha proporcionado capacitación en tecnología y didáctica. Su trabajo incluye adecuarse a las nuevas tendencias educativas que se apoyan en la redes de información, entonces adoptan e incorporan nuevas tecnologías. Al mismo tiempo adecuan el material de sus cursos. El tercer paso ha sido reflexionar sobre su actividad docente usando el nuevo modelo y continuar con la mejora de los cursos.

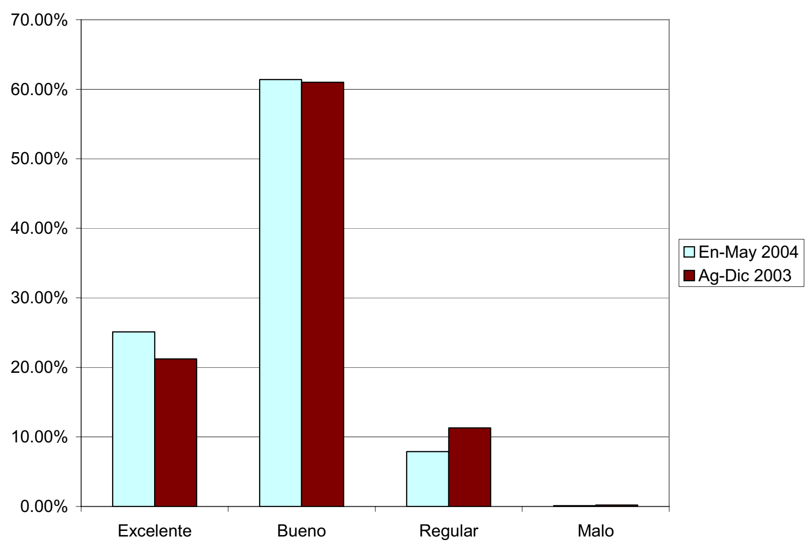


Figura 3. Resultados obtenidos de la pregunta hecha a profesores ¿cómo ha sido el resultado de la implantación de la técnica didáctica en su curso?

Por otro lado los estudiantes han sido parte de este proceso de cambio, incorporando en sus actividades, técnicas mas definidas que requieren de mas responsabilidad, trabajo en grupo y colaboración, análisis y síntesis y compromiso con los otros alumnos.

Como corolario, los resultados indican que existe una percepción favorable, tanto de profesores como de alumnos, sobre el uso de los cursos (material, actividades) y sobre el impacto en aprendizajes que se obtienen en los alumnos.

Referencias Bibliográficas

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A.H. Schoenfeld, y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II*. CBMS Issues in Mathematics Education *6,* 1 – 32.

Blázquez, F., Cabero, J. y Loscertales, F. (1994). *Nuevas tecnologías de la información y comunicación para la educación*. España: Alfar

ITESM. (1995). *Tecnología para la educación*. México: ITESM

Johnson, D., Johnson, R. y Holubec, E.J. (1995). *New circles of learning.* E.U.A: ASCD.

Martin, M. (2002). *El modelo educativo del Tecnológico de Monterrey.* México: ITESM

Ortega, P., Suárez, L., Lezama J., Torres, J., Ruiz, B. y López, A. (1998). La resolución de problemas en las clases de matemáticas ilustrada. *Una red que prepara algunas situaciones típicas del cálculo*. México: IPN.

Polya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas*. Mexico: Trillas.

Torp, L. y Sage, S. (1998). *Problems as possibilities: Problem-based learning for K-12 education*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Tendencias Actuales en la Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas y la Utilización de las Nuevas Tecnologías de la Información y las Comunicaciones en la Educación

Yanet Villanueva
Universidad de las Ciencias Informáticas
Cuba
villanueva@uci.cu
Uso de las TIC en el Proceso de Enseñanza, Aprendizaje de la Matemática– Nivel Superior

Resumen

La investigación aborda la necesidad de asimilación, aplicación y difusión de las TIC como una alternativa de cambio hacia un modelo educativo centrado en el desarrollo integral de la personalidad que potencie los procesos de aprender a aprender, aprender a ser y aprender a desaprender. La investigación contiene la definición del medio informático, como una tipología de medio de enseñanza y aprendizaje, e incluye el diseño de un modelo didáctico para elaborar medios informáticos de enseñanza y aprendizaje orientados a la transformación de la práctica educativa de la Matemática; contribuyendo a la transición del modelo pedagógico centrado en la enseñanza al centrado en el aprendizaje como resultado de la conjugación de aspectos pedagógicos y tecnológicos.

Introducción

En las condiciones de la globalización del mundo actual, las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) han tenido un efecto en la sociedad, que expresa la necesidad de crear una cultura informática en grandes sectores de la población. Por ello es posible hablar en la actualidad del tránsito hacia un modelo de enseñanza aprendizaje en el cual la Informática va ocupando un lugar cada vez más preponderante.

El impacto de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) en la producción y difusión de literatura docente y materiales didácticos es incuestionable. *"La docencia universitaria de calidad, ha de tener en cuenta las TIC, ya que éstas pueden suponer un cambio esencial en la didáctica universitaria, pero el fin último no es saber utilizar la tecnología, sino lograr que los estudiantes aprendan bien el contenido de la asignatura a la vez que se formen y desarrollen en ellos, valores e intereses profesionales". (Celestino, A 2003).*

Dentro de los objetivos fundamentales del Ministerio Educación Superior (MES) se encuentra el desarrollo de la Estrategia Maestra de Informatización para los cursos del 2003 al 2007, cuyo objetivo es *"Transformar cualitativamente los procesos sustantivos de la Educación Superior mediante el empleo de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC), alcanzando una posición destacada en la Informatización de la Sociedad, niveles superiores de integración, colaboración en redes y de formación y superación del Capital Humano" (MES, 2004).* Para lograr este objetivo el MES ha trazado estrategias específicas como "Monitorear, investigar y desarrollar aplicaciones que garanticen la transformación de los procesos sustantivos de la Educación Superior" , *"Contribuir al financiamiento de la Educación Superior a partir del desarrollo y la comercialización de productos y servicios informáticos" (MES, 2004) y ha declarado acciones tales como "Elevar la participación en el desarrollo de software y otros servicios informáticos" (MES, 2004).*

Como resultado de esta política se mejoran progresivamente importantes indicadores, tales como cantidad de estudiantes por computadora, cantidad de computadoras en red con acceso a Internet, se han establecido redes locales e Intranets en todos los Centros de Educación Superior(CES) y se trabaja intensamente en el desarrollo de una red nacional universitaria. También se ejecutan proyectos de investigación científica para incrementar y dinamizar la innovación de las TIC en la educación y se manifiesta una comprensión creciente por parte de directivos y claustros, de la importancia de la introducción de las TIC en la formación de profesionales.

Por un lado existe el reconocimiento del impacto y la importancia de las TIC en la educación de los estudiantes y por otro, la necesidad de realizar estudios e investigaciones que garanticen el desarrollo de las funciones pedagógicas y didácticas a través de la introducción de estas poderosas tecnologías de la educación contemporánea, pues no se ha derivado aún una concepción que las incorpore al proceso de enseñanza–aprendizaje. En ello radica la necesidad e importancia de la temática de investigación seleccionada.

Por ello, el *OBJETIVO* planteado en la investigación es: Diseñar un modelo didáctico para elaborar medios informáticos como una tipología de medio de enseñanza y aprendizaje que contribuya a promover un cambio en el modelo de enseñanza y aprendizaje en profesores y estudiantes.

La utilización de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones en la educación y en la Matemática

"Las llamadas Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) son el resultado de las posibilidades creadas por la humanidad en torno a la digitalización de datos, productos, servicios y procesos, y de su transportación a través de diferentes medios, a grandes distancias y en pequeños intervalos de tiempo, de forma confiable, y con relaciones costo-beneficio nunca antes alcanzados por el hombre" (Castañeda, 2003).

Las TIC en el ámbito educacional son una herramienta de apoyo pedagógico, fortaleciendo las actividades escolares y contribuyendo a la educación no formal y alternativa, especialmente con la niñez y la juventud. Independientemente de lo controvertido del tema, de las insuficientes prácticas realizadas para llegar a un consenso que garantice y trasforme el trabajo educacional con el uso de las TIC, es importante seguir recopilando y compartiendo experiencias, abriendo camino a las prácticas transformadoras, proponiendo alternativas.

Dentro de las características más importantes del proceso de enseñanza–aprendizaje con la introducción de las TIC podemos citar:

- La introducción en los currículos de nuevos contenidos y competencias relacionados con el uso de las TIC.
- La accesibilidad de la información a través de las redes.
- La enseñanza presencial comienza a ceder espacio a la enseñanza semi presencial o a distancia.
- El aprendizaje se personaliza.
- El aprendizaje se extiende fuera de las instituciones.

- El profesor pasa de ser la principal fuente de información a ser un orientador para los estudiantes.
- Se crean ambientes cooperativos de trabajo a través de nuevos canales.

"Es necesario procurar que se conozca qué posibilidades nos ofrecen las TIC y cómo podemos alcanzar un mejor aprovechamiento; cuáles son los riesgos y las limitaciones de la evidente revolución que presenta ese avance. Se trata, en definitiva, de obtener las claves para sobrevivir en el nuevo paraíso digital, en esa ínsula barataria donde la capacidad de hacer y analizar del hombre se multiplican gracias a la tecnología, haciendo quizá su vida más fácil y quizá también, más plena y humana". (Cremades, 2000).

La introducción de las TIC en el proceso de enseñanza – aprendizaje no es un problema esencialmente tecnológico pues se trata de la asimilación y adaptación de la transferencia de tecnología para esta esfera social. El proceso de asimilación es un problema esencialmente pedagógico, debe estar regulado fundamentalmente por las regularidades y los requerimientos psicopedagógicos y didácticos del propio proceso educativo, sin desconocer su papel transformador y de cambio de los propios procesos.

Las TIC brindan condiciones para la transformación de los procesos educativos y de sus modelos pedagógicos, lo cual exige de diferentes actores, sobre todo profesores e instituciones educativas dominio y comprensión de los contenidos específicos, de los valores esenciales de las TIC y de las concepciones pedagógicas y ciencias de a educación avanzadas del mundo.

El cambio esencial no reside en las TIC sino en los paradigmas educativos. Los aspectos fundamentales que merecen resaltarse en la relación TIC –paradigmas educativos son:

- Flexibilidad de las concepciones espacio temporales del PEA que permite la asincronía en los estudios reglada y disminuir las exigencias de movilidad de todos los participantes.
- Cada estudiante en su interrelación con el material docente, con su profesor y con sus colegas de estudio puede adecuar el PEA a sus intereses, posibilidades, capacidades intelectuales y motivaciones. Así mismo el profesor diseñará materiales docentes que respondan a diferentes estrategias de aprendizaje. Con ello el proceso se torna centrado en el aprendizaje, en el sujeto que aprende y la enseñanza personalizada.
- La posibilidad de construir de manera práctica modelos de comunicación educativa que fortalecen el papel de los estudiantes como seres activos, emisores, pensantes, colaborativos e involucrados en el PEA. Es el cambio más impactante, que más demorará en su comprensión y en la utilización de todas sus potencialidades Modelo interactivo, dialógico y bidireccional de carácter informativo y relacional, es decir, cognitivo-instrumental y afectivo motivacional.
- Adquiere competencias básicas en el uso de herramientas para el acceso y procesamiento de la información que cambian la actitud y las formas de gestión de la información y los conocimientos. Educarse en ellas desde edades tempranas puede modificar el interés deformado de conformarse con el interés deformado de aprobar el examen, por el deseo de saber, un aprendizaje activo y colaborativo.
- Transformación de los roles del profesor y de sus competencias para el ejercicio de la profesión. El profesor sigue siendo el factor fundamental de cambio que dirige el PEA, pero es al mismo tiempo sujeto en transformación, que debe haber asimilado las TIC

en sus tendencias de cambio, tener competencias para la elaboración y utilización de materiales educativos interactivos, sobre todo en los temas de mas difícil comprensión y ser un gestor del aprendizaje colectivo e individual de sus estudiantes. Por ello la motivación y la calificación de los profesores constituyen una premisa esencial para el éxito de las aplicaciones educativas digitales.
- Las diferentes posibilidades de las TIC promueven una mayor formación de modos de actuación y habilidades generales conscientes e intencionales y asigna un mayor papel a la memoria audiovisual frente a la memoria motora. Cuando el estudiante aprende a interactuar con ellas, el proceso se transforma; el aprendizaje se torna activo, el conocimiento se adquiere con un objetivo claro y se convierte en una fuente de poder que es experimentada como tal por el estudiante en el momento en que comienza a formarse en su mente.
- Cambios en los paradigmas de experimentación, utilizando programas de simulación de procesos e instrumentos, realización de prácticas de laboratorio virtuales, etc.

En resumen, las TIC brindan condiciones tecnológicas para la transformación de la enseñanza tradicional en un proceso educativo más personalizado, participativo, centrado en el aprendizaje significativo y dirigido a lograr una dimensión humana y desarrolladora de la personalidad de todos los participantes.

Son diversos los usos que se le ha dado a la computadora en la enseñanza de la Matemática, *Alemán de Sánchez, en "La enseñanza de la Matemática asistida por computadora destaca:*

- *Computadora como pizarrón electrónico.*
- *Computadora como tutor.*
- *Para ejercitación y práctica.*
- *En la simulación.*
- *Juegos educativos.*
- *Lenguajes de programación para el aprendizaje de conceptos.*
- *Como apoyo a la administración de la docencia." (Alemán de Sánchez, 2001).*

Teniendo en cuenta que la utilización de nuevas tecnologías informáticas favorece la simulación de fenómenos de la realidad, ayudan y motivan a un trabajo más creativo en el aula al utilizarlas para formular conjeturas, buscar soluciones, explorar patrones, y permiten, junto con los medios educativos tradicionales mejorar el aprendizaje, que la incorporación de elementos visuales al enfrentar problemas propicia que se vea a las funciones no sólo como un objeto, sino que además permite transitar entre los contextos algebraico, geométrico, numérico y verbal, es posible dar cumplimiento a las nuevas exigencias de los programas y contribuir de una manera más eficiente al desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Es sugerente pensar que las actitudes que los profesores tengan hacia los medios de enseñanza y aprendizaje condicionarán, en primer lugar su inserción o no en el proceso, y en segundo lugar la forma en que se insertan. Esta última puede ir desde una posición de descanso para el profesor, hasta una inserción reflexiva, motivacional, innovadora y en definitiva curricular.

Por este rol que juega el profesor en la selección de uno u otro medio de enseñanza y aprendizaje es que podemos plantear que en situaciones de enseñanza ningún medio es superior a otro en lo que concierne al aprendizaje de una tarea dada.

Los medios de enseñanza cumplen funciones instructivas, cibernéticas, formativas, y recreativas (González, 1989), a las cuales le sumamos las funciones: motivadora-innovadora-creadora, lúdica-recreativa y desarrolladora-control, ya que su uso de manera científica favorece el desarrollo de la personalidad de los estudiantes.

A los efectos de la investigación adoptamos el término de **medio informático** entendido como: ***aquel medio de enseñanza y aprendizaje que incluye un conjunto de recursos e instrumentos que permite el tratamiento digital de la información, la transmisión de información entre sujetos a través de ordenadores y el tratamiento electrónico y magnético de la imagen y el audio.***

El término construido se basa en la definición de medio de enseñanza y aprendizaje de Zilberstein y los conceptos claves de Ana Duarte, referidos a medio informático, medios de comunicación social, redes electrónicas y vídeo.

Conclusiones

Las principales conclusiones, derivadas de esta investigación son las siguientes:

1. Se definió el medio informático como una tipología de medio de enseñanza y aprendizaje, la cual sirvió de base para el diseño del medio informático propuesto.
2. El modelo didáctico diseñado contribuye a la transición del modelo pedagógico centrado en la enseñanza al centrado en el aprendizaje por ser un resultado de la conjugación de aspectos pedagógicos y tecnológicos, que potencia los procesos de aprender a aprender, aprender a ser y aprender a desaprender.

Referencias Bibliográficas

Alemán, A. (1999). *La enseñanza de la Matemática asistida por computadora*. Obtenido en junio 6, 2005, del sitio web de la Universidad Tecnológica de Panamá: http://www.utp.ac.pa/articulos/ensenarmatematica.html

Castañeda, Á.E. (2003). El papel de las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC) en el proceso de enseñanza-aprendizaje a comienzos del siglo XXI. ISPJAE. *Preparación Pedagógica Integral para profesores universitarios.* Cuba: Félix Varela

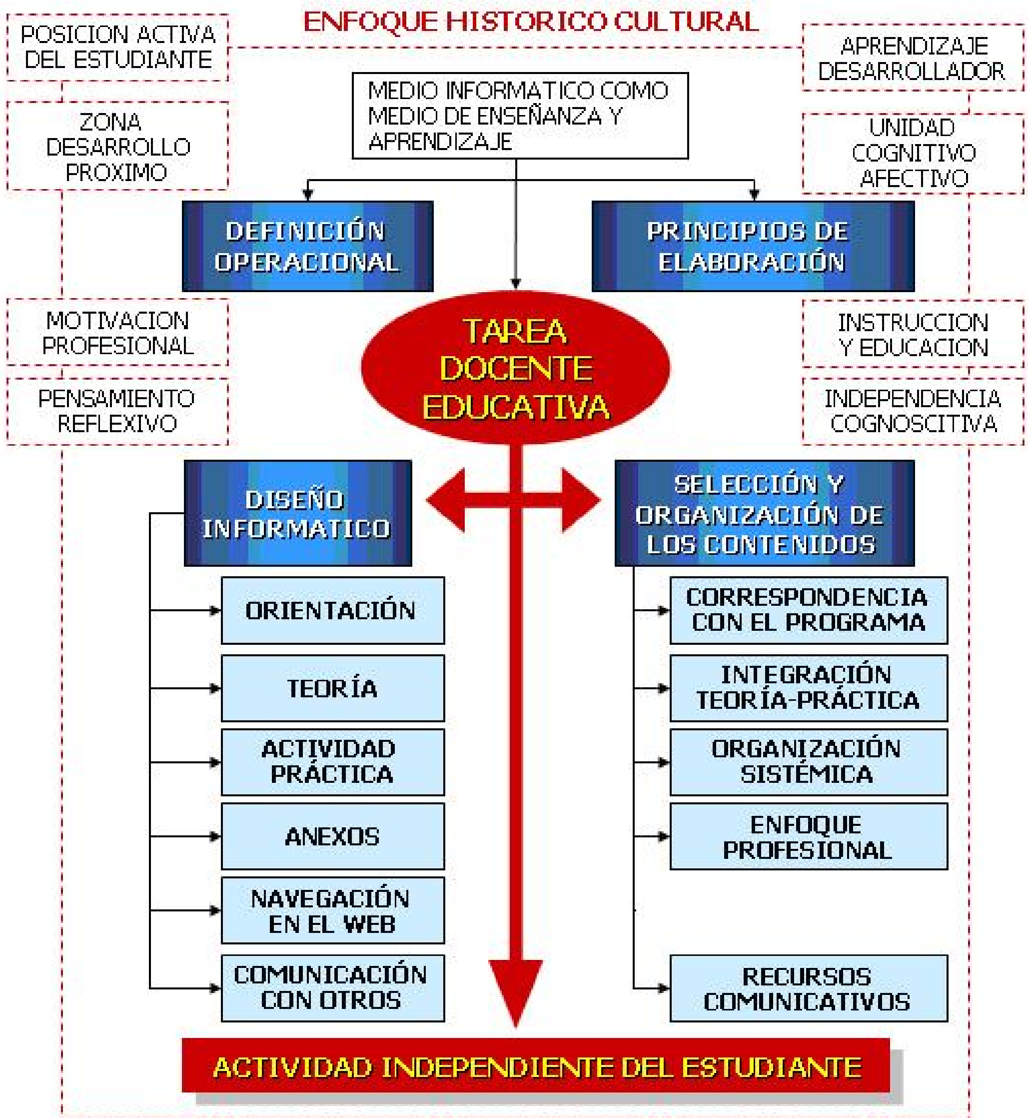
Celestino, A., Echegaray, O. y Guenaga, G. (2000) Integración de la TIC en la Educación Superior. *Píxel-Bit 21*, 21-28. Obtenido en junio 14, 2005, de http://www.sav.us.es/pixelbit/articulos/n21/n21art/art2103.htm

Cremades, J. (2001). *El paraíso Digital*. Barcelona: Editora Plaza & Janés.

MES, Dirección de Informatización. (2004). *Selección de Documentos. Para la capacitación de profesores e investigadores en el manejo de información electrónica*. (Capítulo 1: 5).

Zilbertsein, J. (2003). Los medios de enseñanza y aprendizaje. En *Preparación Pedagógica Integral para profesores universitarios*. Cuba: ISPJAE, Editorial Félix Varela.

Anexo1. Modelo Didáctico para elaborar medios informáticos de enseñanza y aprendizaje



Categoría 5:

Uso de la Tecnología en el Proceso de Aprendizaje de las Matemáticas

Introducción

Es un hecho conocido que la evolución tecnológica que está experimentando la sociedad en general (la aparición y desarrollo de más y mejores computadoras, el uso generalizado de nuevos dispositivos de comunicación, los avances en investigación genómica, etc.) ha ido modificando muchas de las prácticas que los individuos ejercen en los ámbitos profesional, familiar, educativo, cultural y otros.

La escuela, como una institución insertada en la sociedad, no permanece ajena a esta evolución, de la misma manera en que las prácticas sociales propias de esta entidad no permanecen invariantes. Un escenario más particular dentro de la escuela, como lo es la clase de matemáticas, también es susceptible de experimentar dichos cambios.

Una comunidad como la nuestra, la de Matemáticos Educativos Latinoamericanos, asume como propia la responsabilidad de estudiar estos cambios y modificaciones que de alguna manera repercutirán en la organización y la estructura de las clases de matemáticas; así como organizar y proporcionar una explicación de los efectos y consecuencias que pueden generar estas transformaciones.

La respuesta de la comunidad no se ha hecho esperar: desde hace varios años hemos presenciado un interés creciente por investigar y reportar situaciones y experiencias en las que se han empleado artefactos tecnológicos particulares para la representación y estudio de objetos matemáticos tales como software, calculadoras y sensores.

En este Volumen 18 del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa encontraremos una interesante colección de reportes de investigación que nos permite obtener un panorama del estado actual y el rumbo que ha tomado la investigación de nuestro grupo en este campo.

En primer lugar, es posible notar como muchos investigadores han centrado su atención en las dimensiones *semiótica* e *instrumental* de los artefactos, es decir, están mirando la influencia de la tecnología en las representaciones empleadas en la actividad matemática, así como las nuevas posibilidades que ofrecen estos dispositivos. Por ejemplo, el trabajo de Walter F. Castro y Hugo F. Pardo de la Pontificia Universidad Javeriana de Colombia muestra una experiencia didáctica que busca favorecer el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias mediante la articulación de los contextos gráfico y numérico soportados por la utilización de un software matemático. Otro ejemplo es el de Emir Martínez, Jaime L. Arrieta y Antonio Canul, de la Universidad Autónoma de Guerrero y el Instituto Tecnológico de Acapulco, México, donde se resalta la posibilidad de sustituir laboratorios e instrumentos para la experimentación física mediante el empleo de laboratorios virtuales de experimentación desarrollados con software.

Otra dimensión que se aborda es la *cognitiva*, una muestra de este tipo de estudios es presentada por Víctor Larios de la Universidad Autónoma de Querétaro, México quien abordando el tema de la demostración en un ambiente de geometría dinámica logra identificar y clasificar algunas de las conductas manifestadas por los estudiantes en la puesta experimental.

El escrito presentado por Edison de Faria de la Universidad de Costa Rica aborda de alguna manera la dimensión *Institucional* al presentarnos una interesante revisión de los trabajos de investigación y programas relacionados con el uso de calculadoras y computadoras en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que se han realizado en varios ámbitos educativos costarricenses durante la década de los noventa con el apoyo de diferentes instituciones educativas y científicas.

También es importante destacar el trabajo de Ana Guadalupe del Castillo, José Ramón Jiménez, Enrique Hugues y Lucía Guadalupe Dórame de la Universidad de Sonora en México quienes están enfocando su trabajo a la dimensión del *Profesor* mediante un proyecto en proceso de actualización de profesores en el uso didáctico del CAS.

Una mirada reflexiva a los trabajos contenidos en esta categoría del Acta Latinoamericana nos permitirá percibir cómo, algunos miembros de nuestra comunidad dedicados a esta área de investigación comienzan a abandonar paulatinamente la aproximación 'entusiasta' que caracteriza un primer momento en la evolución de las comunidades interesadas en estudiar la *integración* de estas tecnologías en sus sistemas educativos:

> Después de un periodo de entusiasmo, y después de otro de indecisión, parece llegar un tiempo de conciencia de las dificultades de integrar las nuevas herramientas de cálculo, en las instituciones educativas y al nivel de investigación. Estas dificultades están en el corazón de los problemas que confronta la institución (problemas de igualdad social, del número de estudiantes en clase, de la formación de los profesores, del desarrollo de las matemáticas, de la modificación del currículum, del estatus de las matemáticas experimentales, de la ayuda individual, de la investigación del trabajo del estudiante). En todos estos puntos, la integración de las calculadoras [y de la tecnología en general] abre nuevas posibilidades y plantea nuevos problemas. (Trouche, 2005, p. 35)[1].

Este es un momento dentro de la comunidad en el que debe presentarse una evolución de sus problemáticas (Cantoral y Farfán, 2003), es decir, consideramos que el reconocimiento no sólo de las ventajas que ofrecen estas tecnologías, sino también de la complejidad multidimensional de la integración de éstas dentro de nuestros escenarios educativos constituirá un avance significativo en el desarrollo y madurez de nuestra agrupación Latinoamericana.

Referencias

Cantoral, R. y Farfán, R.M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6*(1), 27 – 40.

Lagrange, J.B., Artigue, M., Laborde, C. y Trouche, L. (2003). Technology and Mathematics Education: A Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation. En A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F.K.S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 239 – 271). Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Trouche, L. (2005). Calculators in Mathematics Education: A Rapid Evolution of Tools, with Differential Effects. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument* (pp. 9 – 39). E.U.A.: Springer.

[1] Nuestra traducción.

Un Proceso de Actualización Integral de Profesores de Matemáticas en el Uso Didáctico de los Sistemas de Cómputo Simbólico: Resultados Preliminares y Reflexiones

Ana Guadalupe del Castillo, José Ramón Jiménez, Enrique Hugues y Lucía Guadalupe Dórame
Universidad de Sonora
México
acastillo@gauss.mat.uson.mx, jimenez@gauss.mat.uson.mx, ehugues@gauss.mat.uson.mx, lucyd65@yahoo.com.mx
Formación de Profesores, Tecnología Avanzada – Nivel Superior

Resumen

Se presentan los resultados parciales de la primera etapa de un proyecto de actualización de profesores de matemáticas del nivel superior en torno al uso didáctico de los sistemas de cómputo simbólico CAS. El proyecto en su conjunto asume un enfoque integral, cuya principal característica estriba en concebir la actualización no como el resultado de un curso más o menos breve de capacitación instrumental, sino como el de un proceso (experimentado por el profesor en conjunto con un equipo de investigación) de reflexión, discusión, conocimiento de tecnología, diseño de materiales y mejoramiento gradual de sus prácticas docentes, como un proceso de cambio paulatino, observable y controlado, en el que el profesor está involucrado como protagonista.

Objetivo

Se presenta un proyecto de actualización de profesores de matemáticas del nivel superior en torno al uso didáctico de los sistemas de cómputo simbólico CAS actualmente en desarrollo, y que pretende tener repercusiones observables en el salón de clase. El proyecto tiene como propósito central investigar bajo qué condiciones, tanto por parte de los profesores como de los estudiantes, es más factible y eficiente la modernización de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas mediante la integración de dichos sistemas CAS a ambos procesos (enseñanza y aprendizaje) en los cursos básicos del nivel superior. Se pretende estudiar el potencial que ofrece un ambiente en el que concurren la actualización participativa de los profesores, la integración sistemática de calculadoras simbólicas en el proceso educativo, el uso de materiales diseñados ex profeso, y la investigación educativa en matemáticas, a través de observar durante varios ciclos semestrales los efectos de un programa de actualización y mejoramiento de las prácticas docentes de los profesores y de las prácticas de aprendizaje de los estudiantes en un ambiente de innovación educativa.

El proyecto en su conjunto asume un enfoque integral, cuya principal característica estriba en concebir la actualización no como el resultado de un curso más o menos breve de capacitación instrumental, sino como el de un proceso (experimentado por el profesor en conjunto con un equipo de investigación) de reflexión, discusión, conocimiento de tecnología, diseño de materiales y mejoramiento gradual de sus prácticas docentes, como un proceso de cambio paulatino, observable y controlado, en el que el profesor está involucrado como protagonista. Esta estrategia de actualización intenta conjuntar la investigación educativa y la docencia, en el caso en que ambas actividades se realizan en el seno del mismo Departamento académico.

Marco teórico

Como lo muestran las investigaciones científicas de los procesos de actualización de profesores en muchos países, y particularmente en México, no resulta fácil ni inmediato lograr una modificación real de las prácticas docentes tradicionales. La adaptación de los profesores que durante muchos años se han desempeñado en un modelo de docencia tradicional expositivo, a un modelo dinámico y participativo centrado en el alumno, y además con la incorporación de nuevas tecnologías, es un proceso largo y difícil, en el que los obstáculos tienen que ser identificados in situ y superados de manera consecuente y paulatina. En particular, el paso de un modelo expositivo a uno centrado en el aprendizaje y en el uso sistemático de la tecnología parece ser un salto enorme para la mayoría de los profesores. Parecería por lo tanto adecuado organizar este salto en etapas más asequibles y congruentes con la evolución de las concepciones teóricas de los profesores.
En particular, los avances del proyecto sugieren tres etapas o componentes en dicha evolución:

1. La actualización didáctico-metodológica de los profesores, y particularmente, el cambio de paradigma teórico para explicar y comprender el aprendizaje: de una argumentación empirista basada en la enseñanza como transmisión de conocimientos, a una explicación teórica basada en la participación activa –aunque dirigida– del estudiante (el constructivismo).
2. La actualización de los profesores en lo relativo al uso de las nuevas tecnologías, y particularmente, de las que han sido denominadas "tecnologías cognitivas", entre las que se encuentran los sistemas de cómputo simbólico.
3. La actualización de los profesores en lo relativo al uso, diseño y experimentación de secuencias didácticas centradas en el aprendizaje y que incorporen de manera consecuente el uso de los sistemas de cómputo simbólico.

Metodología

Dado que los datos que se obtendrán, tanto del desempeño y actitudes de los profesores como de los estudiantes, se basan en eventos observables in situ en el salón de clases en el momento de su ocurrencia, se considera adecuado emplear el método de análisis cualitativo. En particular, se aplicarán varias herramientas para el estudio cualitativo de los eventos: a) encuestas, b) entrevistas, tanto formales (grabadas en video o en cinta de audio y sujetas en cierto modo a un listado de preguntas previamente elaboradas), como informales, sin un guión previo y sin necesidad de la grabación, c) observaciones sistemáticas en el salón de clase, d) análisis de productos (en el caso de los estudiantes, la resolución de paquetes de hojas de trabajo y diversas actividades didácticas; en el caso de los profesores, el diseño, ya sea en forma conjunta con los investigadores o de manera independiente, de actividades de aprendizaje para los estudiantes, materializadas en hojas de trabajo, lecturas, programas interactivos para el sistema CAS, etcétera).

Partiendo del supuesto de que toda acción de actualización que se emprenda puede impactar las concepciones que los profesores tengan respecto a la enseñanza y el aprendizaje a dos niveles, el del discurso y el de la acción, pretendemos procesar la información que se recabe de los profesores mediante las cuatro herramientas ya mencionadas, en dos planos correlacionados. En el primer plano, las encuestas y las entrevistas nos permitirán tener una idea bastante aproximada respecto al impacto que el programa esté teniendo sobre el discurso didáctico–metodológico de los profesores. Pero partiendo de la experiencia previa y de los estudios al respecto, que muestran que las acciones tradicionales de actualización, en términos generales, impactan sobre todo el discurso del profesor pero tienen poco efecto en su práctica cotidiana, también nos preocupamos por valorar por otras fuentes diferentes el impacto de nuestra estrategia en la acción cotidiana de los profesores en el aula. Por esta razón, en un segundo plano procesaremos la información recopilada durante las observaciones directas y sistemáticas del trabajo del profesor en el aula, en su interacción con los alumnos, al aplicar las hojas de trabajo, confrontando los hechos observados con las declaraciones expresadas por los profesores, e intentando establecer el grado de correspondencia o de concordancia entre lo dicho y lo hecho. En ese mismo sentido, los diseños de actividades de aprendizaje que produzcan los profesores nos servirán como elementos para juzgar respecto a la profundidad y solidez de las concepciones que previamente hayan expresado. En otras palabras, la información obtenida a partir de las dos primeras herramientas, las encuestas y entrevistas, se contrastará con la información recopilada mediante las otras dos herramientas, las observaciones directas en el aula y el diseño de actividades de aprendizaje. De manera completamente análoga procesaremos la información que se recabe de los alumnos, para quienes en el primer plano estarán las encuestas y entrevistas, y en el segundo plano las observaciones directas en el aula y la resolución de las hojas de trabajo.

Resultados parciales

Se presentan los resultados parciales de una primera etapa de un proyecto de actualización de profesores de matemáticas del nivel superior en torno al uso didáctico de los sistemas de cómputo simbólico CAS. Dicho proyecto consta de dos Diplomados en secuencia, uno denominado Nivel Básico y otro de Nivel Avanzado, cada uno de un semestre de duración. Aquí se reportan resultados parciales del primero de dichos Diplomados, realizado de agosto de 2003 a enero de 2004. Los resultados de la primera etapa arrojan evidencia interesante relativa a la modificación de las concepciones y creencias de los profesores en los siguientes aspectos:

- Las matemáticas como asignatura. Se le distingue de la Matemática como ciencia de manera muy tenue, de tal modo que se le asemeja a un conocimiento organizado abstraído de la realidad, y con un carácter pragmático orientado hacia su aplicación a "problemas".
- Su aprendizaje y su enseñanza. En gran medida se tiene una visión que delega en el profesor el saber y su reproducción y comunicación, asignando al estudiante la responsabilidad de seguir al profesor para la resolución de ejercicios y "problemas".
- El papel que los recursos tecnológicos pueden jugar en dichos procesos. Es un papel incierto, no habiendo mucha familiaridad al respecto pero sí cierto entusiasmo. En parte se les concibe como objeto de conocimiento en sí mismos, con un impacto inmediato en la enseñanza como facilitadores de ciertas elaboraciones del profesor.
- El papel del profesor en un cambio de innovación curricular. No se concibe al profesor como un participante activo y con capacidad de decisión en dicho proceso, sino como un ejecutor entusiasta de las directrices curriculares elaboradas por otras instancias (Dirección Académica, Academias, Comisiones, etcétera).

Con el fin de que el proceso de familiarización del profesor, tanto con el manejo del dispositivo de cómputo simbólico, como con el marco teórico–conceptual (desarrollado en relación con el uso de tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y particularmente con el uso de los dispositivos CAS) fuera profundo y reflexivo, se implementaron una serie de acciones. Se promovió la participación de los profesores en las discusiones durante las asesorías que se ofrecieron en el Diplomado. Se analizaron y discutieron un total de catorce artículos y reportes de investigación, seleccionados de diversos sitios en Internet, relativos a la problemática abordada. Estas lecturas fueron asignadas a cada uno de los profesores para ser traducidas. En la fase final (de evaluación) del primer Diplomado, se exigió que cada profesor eligiera un tópico de matemáticas y desarrollara una propuesta didáctica para abordarlo en un ambiente que integrara el uso de la calculadora simbólica. Esta propuesta didáctica fue desarrollada gradualmente, hasta convertirse en un documento escrito y en una ponencia. Estos trabajos reflejan los dos aspectos esenciales que fueron abordados: su grado de dominio y conocimiento de la herramienta de cómputo simbólico, y la profundidad de la reflexión teórica en relación con la problemática asociada al uso didáctico de dicha herramienta. Una mirada atenta a cada uno de esos trabajos nos puede dar una idea de las diferentes visiones que los profesores, a su paso por este primer Diplomado, han logrado desarrollar. El panorama de tales visiones es amplio, y va desde las propuestas más cercanas al enfoque tradicional expositivo, centrado en el profesor a cuya actividad se supedita el uso de los recursos didácticos, hasta propuestas francamente innovadoras que pretenden centrar la actividad en el alumno y poner a la disposición de él las capacidades técnicas de los recursos didácticos para favorecer el aprendizaje. Entre estas dos visiones literalmente extremas hay también las posiciones intermedias.

Durante este primer Diplomado del proyecto los profesores participantes generaron dos productos: una Antología conformada por artículos y reportes de investigación referentes al uso didáctico de los sistemas de cómputo simbólico, cuya lectura, traducción, análisis y discusión se les encomendó como parte de las tareas del Diplomado, y el desarrollo por escrito de una propuesta didáctica elemental para la integración de la calculadora simbólica en los cursos que habitualmente imparten. Ambos trabajos serán analizados y comentados, en conjunto con los elementos arriba señalados.

Las reflexiones emanadas a partir del análisis preliminar de estos resultados parciales serán tomadas en cuenta para orientar el trabajo del segundo Diplomado, que se ofrecerá de febrero a junio de 2004.

La investigación in situ de las prácticas docentes de los profesores y de las prácticas de aprendizaje de los estudiantes en un ambiente caracterizado por el uso didáctico de un sistema de cómputo simbólico, está ahora en condiciones de llevarse a cabo a partir de agosto de 2004, toda vez que varios de los profesores participantes ya se han enrolado voluntariamente en el proceso de ensayar propuestas personales dentro de esta modalidad.

Referencias Bibliográficas

Akbaba, S. y Kurubacak, G. (1998). Teacher´s Attitudes Towards Technology. Technology and Teacher Education Annual. Society for Information Technology and Teacher Education. [CD-ROM]. Charlottesville, VA: Association for the Advancement of Computing in Education.

Artigue, M. (2001). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *2nd Computer Algebra in Mathematics Education Symposium*. The Netherlands: Freudenthal Institute, Utrecht University [En línea] Disponible en: http://www.lonklab.ac.uk/came/events/freudenthal/1-Presentation-Artigue.pdf

Baldin, Y. (2002). On some important aspects in preparing teachers to teach mathematics with technology. *2nd International Conference on Teaching Mathematics ICTM*. [En línea] Disponible en: http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap325.pdf

Barton, S. (1995). Reluctant Reformer´s Instructional Practice and Conceptions of Teaching Calculus When Using Supercalculators. En P. Bogacki, E.D. Fife y L. Husch (Eds.), *Electronic Proceedings of the Eight Annual Conference on Technology in Collegiate Mathematics* [En línea] Disponible en: http://archives.math.utk.edu/ICTCM/EP-8/C7/pdf/paper.pdf

De Souza, B. y Elia, M. (1998). Physics Teacher´s Attitudes: How do They Affect the Reality of the Classroom and Models for Change. En A. Tiberghien, E. L. Jossem y J. Barojas (Eds.), *Connecting Research in Physics Education with Teacher Education*. An ICPE Book. International Commision on Physics Education. [En línea] Disponible en: http://www.physics.ohio-state.edu/~jossem/ICPE/D2.html

Fleener, J. (1995). A Survey of Mathematics Teacher´s Attitudes About Calculators: The Impact of Philosophical Orientation. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching 14*(3), 53-70.

Guzmán, Z. (2001). Formación, concepciones y práctica de los profesores de matemáticas. *Educación Matemática 13 (3)*, 93-106.

Harshbarger, R. (1995). Training In-Service and Pre-service Teachers in the Use of Technology. En P. Bogacki, E.D. Fife y L. Husch (Eds.), *Electronic Proceedings of the Eight Annual Conference on Technology in Collegiate Mathematics*. [En línea] Disponible en: http://archives.math.utk.edu/ICTCM/EP-8/C85/pdf/paper.pdf

Laborde, C. (2000). Why Technology is Indispensable Today in Teaching and Learning Mathematics. The World Wide Conference. [En línea] Disponible en: http://emptweb.mps.ohio-state.edu/ dwme/publications/posticme2000/laborde.pdf

Myers, K. (1997). Designing Teacher In-service for the TI-92. *Proceedings of the AMATYC 23rd Annual Conference* [En línea] Disponible en: http://www.amatyc.org/Proceedings/Atlanta23/Myers/Myers.pdf

Pelton, L. y Pelton, T. (1996). Building Attitudes: How a Technology Course Affects Preservice Teacher´s Attitudes About Technology. [En línea] Disponible en: http://web.uvic.ca/~tpelton/attitudesite.htm

Universidad de Sonora (2003). *Lineamientos generales para un Nuevo modelo curricular de la Universidad de Sonora.* (Gaceta, Edición Especial, Febrero). Hermosillo, Sonora: Universidad de Sonora

Zbiek**,** R. (2001)**.** Influences on Mathematics Teacher's Transitional Journeys in Teaching With CAS. *2nd Computer Algebra in Mathematics Education Symposium*. The Netherlands: Freudenthal Institute, Utrecht University [En línea] Disponible en: http://www.lonklab.ac.uk/came/events /freudenthal/2-Reaction-Zbiek.pdf

Determinación de Raíces de Ecuaciones utilizando la Calculadora Gráfica como Medio de Enseñanza y Aprendizaje

Esther Ansola y Eugenio Carlos
Instituto Superior Politécnico "José A. Echeverría"
Cuba
e_hazday@yahoo.com, ecarlos48@yahoo.com
Tecnología avanzada – Nivel Superior

Resumen

Obtener las raíces de una ecuación algebraica de primero, segundo y tercer grado es un problema muy simple que se resuelve utilizando fórmulas o descomposición en factores; para algunos casos de funciones polinómicas de mayor grado el problema puede resolverse todavía utilizando el método de Ruffini. Para funciones de este tipo con potencias mucho mayores de la variable y para funciones no algebraicas el problema se hace prácticamente imposible de resolver por método analíticos. El uso de la calculadora gráfica contribuye a dar solución a los problemas anteriores haciendo uso de técnicas numéricas, lo que permite establecer un adecuado control por operaciones en las primeras etapas del proceso de asimilación de los conocimientos como reclaman las modernas teorías de enseñanza (Talízina, 1988).

Introducción

La Matemática Numérica constituye la rama de las Matemáticas donde más ha impactado el desarrollo impetuoso de la tecnología en los últimos años. Obviando experiencias anteriores, sólo el análisis de las experiencias en los métodos de enseñanza de la Matemática Numérica, desde el uso de las calculadoras electrónicas más elementales, hasta el uso actual de modernas computadoras, potentes softwares profesionales y calculadoras gráficas, nos muestra cómo el docente que enseña esta materia ha sido también impactado y cómo ha tenido que asimilar las nuevas tecnologías, evolucionando él mismo y sus métodos de enseñanza. En el presente trabajo se muestra una experiencia metodológica en el cual la calculadora gráfica CASIO ALGEBRA FX 2.0 no fue utilizada como un simple instrumento de cálculo sino como un recurso didáctico, sirviendo como un medio de enseñanza y aprendizaje.

Se utilizaron las potencialidades gráficas de la calculadora para la separación de las raíces de una ecuación por el método gráfico así como las posibilidades de programar dichos métodos utilizando las instrucciones que para estos fines están definidas en la misma. Las calculadoras gráficas posibilitan combinar su uso con otros medios permitiendo a los profesores mostrar al auditorio los resultados que se van obteniendo en la calculadora, y así poder trabajar conjuntamente con los estudiantes y establecer un adecuado control por operaciones en las primeras etapas del proceso de asimilación de los conocimientos como reclaman las modernas teorías de enseñanza (Talízina, 1988), restricción fuerte cuando se trata de organizar el proceso de enseñanza bajo las condiciones tradicionales y el trabajo con lápiz y papel (Delgado, 1998).

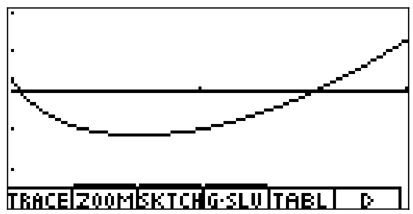
La separación de las raíces.

Aunque existen métodos analíticos para separar las raíces de ecuaciones polinómicas, en el caso de tener ecuaciones con funciones trascendentes el único método posible es la separación gráfica de las raíces. La calculadora gráfica es una herramienta de gran utilidad para estos casos. Veámoslo a través del siguiente ejemplo.

Separar raíces de la ecuación: $x^2 - \ln x - 2 = 0$

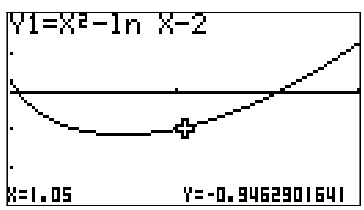
La separación gráfica de las raíces de una ecuación f(x)=0 consiste en dibujar la gráfica de la función f(x) y determinar los intervalos donde se encuentran cada uno de los interceptos de la gráfica con el eje de las x.

En el menú principal de la calculadora vamos a la ventana GRPH-TBL y presionamos F3 (TYPE) para seleccionar y = , escribiendo la función $x^2 - \ln x - 2$. Para una mejor visualización de la gráfica vamos a v-window y definimos xmin=0.1, xmax=2, ymin=-3 y ymax=2. Presionando F5 (DRAW) se obtiene la gráfica deseada, donde se observa que la ecuación tiene dos raíces.

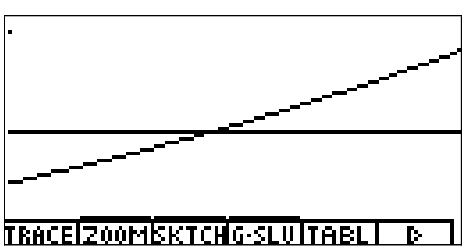


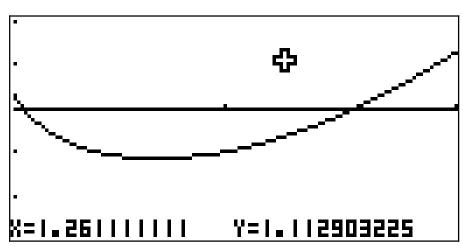
Para determinar los intervalos en que se encuentran cada una de las raíces, existen dos opciones:

1. Presionando F1 (TRACE) es posible mover el cursor sobre la gráfica, observando la variación de la abcisa y la ordenada.



2. Presionando F2 (ZOOM) podemos acercarnos a cada intercepto de diferentes formas, una variante adecuada es seleccionar BOX y mover el cursor para seleccionar un intervalo adecuado o hacer el zoom seleccionado y tomar los valores xmin y xmax de la ventana v-window.



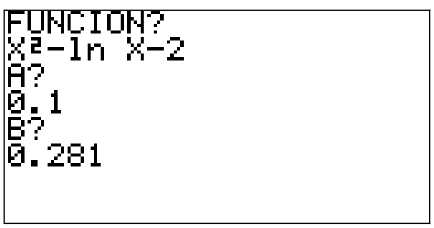


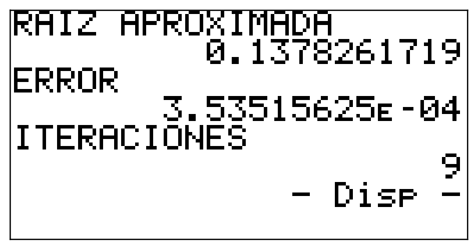
Se obtiene para la menor raíz el intervalo [0.1, 0.281] y para la mayor [1.537, 1.588]. Se observa que los intervalos se pueden tomar tan pequeño como se desee.

La determinación de las raíces. Método de bisección.

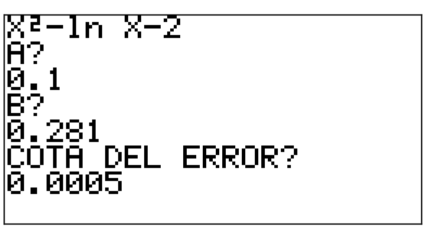
Mostraremos solamente el método de Bisección por ser el más sencillo. Conocido el método desde el punto de vista teórico, su interpretación geométrica y el cálculo del error cometido, se procede a mostrar un programa para la calculadora, que permite observar los resultados que se obtienen para la raíz aproximada y el error cometido, en cada iteración, para una ecuación del tipo f(x)=0, en un intervalo [a , b] dado. Seleccionando la ventana PRGM en el menú principal y oprimiendo F3 (NEW) se introduce el nombre del programa y luego, cada instrucción del programa.

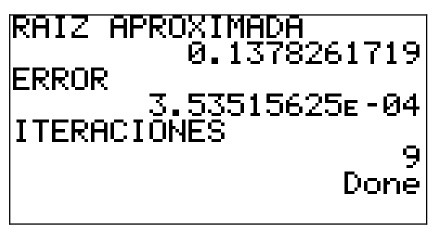
En el programa BISEC1 no se introduce como dato un valor para la tolerancia del error, en su lugar el criterio de parada se puede escoger arbitrariamente. Por ejemplo si se desea calcular el valor aproximado de la menor de las raíces de la ecuación $x^2 - \ln x - 2 = 0$
en el intervalo [0.1, 0.281] con 3 cifras decimales exactas, o sea con un error absoluto máximo de $0.5\text{x}10^{-3}$, este valor se obtiene en la iteración 9, con un error de $0{,}353515625\text{x}10^{-3}$.





La calculadora permite utilizar también lazos de programación, mediante las instrucciones For, Do y While. El programa BISEC2 utiliza el método de Bisección para determinar las raíces de una ecuación del tipo f(x)=0, conociendo la función, el intervalo [a,b] y una cota de error, dando como resultado el valor aproximado de la raíz, el error cometido y el número de iteraciones, utilizando la instrucción While-While End.





Los dos programas, BISEC1 y BISEC2, se muestran a continuación:

Programa Bisec1

"FUNCION"? → Y1 ↵

```
0→ I ↵
"A"? → A ↵
"B"? →©B ↵
Llb 0 ∧
0.5 (A+B) → M ↵
0.5 (B-A) → E ↵
M→X ↵
Y1→F ↵
If F=0 ↵
Then I+1→I ∧
"RAIZ EXACTA": M⌐
"ITERACIONES": I⌐
Goto 1 ↵
Else A→X ↵
Y1→ C ↵
If (C*F) < 0 ↵
Then M→B ↵
Else  M→A ↵
IfEnd ↵
IfEnd ↵
I+1©I ∧
"RAIZ APROXIMADA": M⌐
"ERROR": E⌐
"ITERACIONES": I⌐
Goto 0
Lbl 1 ↵
```

Programa Bisec2

```
"FUNCION"? → Y1 ↵
0→ I ↵
"A"? → A ↵
"B"? → B ↵
"COTA DEL ERROR"? → T ↵
1→ E ↵
While E > T •
0.5 (A+B) → M ↵
0.5 (B-A) → E ↵
M→X ↵
Y1→F ↵
If F=0 ↵
Then I+1→I ∧
"RAIZ EXACTA": M⌐
"ITERACIONES": I⌐
Goto 1 ↵
Else A→X ↵
Y1→ C ↵
If (C*F) < 0 ↵
Then M→B ↵
Else  M→A ↵
IfEnd ↵
IfEnd ↵
I+1©I ∧
WhileEnd ∧
"RAIZ APROXIMADA": M⌐
"ERROR": E⌐
"ITERACIONES": I⌐
Lbl 1 ∧
```

Conclusiones:

Las posibilidades gráficas de la calculadora constituyen una valiosa herramienta para mostrar el método gráfico de separación de raíces de una ecuación del tipo f(x)=0, mientras que las posibilidades de programación permiten desarrollar programas, que en el aprendizaje de algoritmos numéricos resultan ser una herramienta de un valor incalculable, puesto que contribuyen al desarrollo del pensamiento algorítmico del estudiante, al mismo tiempo que facilitan el aprendizaje del algoritmo numérico.

La calculadora se utiliza en este caso como un recurso didáctico, como medio de enseñanza-aprendizaje, no como una simple herramienta de cálculo.

El impacto tecnológico en los ámbitos educativos es un hecho irreversible y caracterizará el quehacer pedagógico en un futuro cercano, planteando retos a los docentes, a los investigadores en Educación Matemática y a toda la estructura de dirección que toma las decisiones en cuanto a la introducción de equipos y softwares en el proceso de enseñanza - aprendizaje. Los ritmos de desarrollo y la presencia en toda la vida humana de los recursos informáticos obligan a las instituciones a tenerlos en cuenta y tener que transformar la propia concepción educacional (Delgado, 1998).

Referencias Bibliográficas

Álvarez, M., Gómez, A., Guerra, A. y Laura, R. (1998). *Matemática Numérica.* Cuba: Editorial Félix Varela.

Castro, A. (2001). Incorporación de tecnología en la enseñanza de la Matemática".Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 14. Grupo Editorial Iberoamérica, (pp. 277)

Delgado, R (1998). *La enseñanza de la Matemática en el umbral del Siglo XXI.* Argentina: Homo Sapiens Ediciones.

Pérez, O. (en prensa). *El arte de enseñar las Ciencias Básicas Matemáticas Manual de trabajo*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Preiss, R. (2002). *Modelos del Cálculo Diferencial. Programación y Proyectos con Calculadora CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS*. Santiago de Chile: Colección Textos de Docencia Universitaria, Universidad Diego Portales.

Rodríguez, F. (2002). Tecnología y visualización en los procesos recursivos. Revista *C+1*, CASIO Académico. México.

Talízina, N. (1988). *Sicología de la Enseñanza*. URSS: Editorial Progreso.

El Uso de la Calculadora Graficadora en la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria

Eugenia Apreza y Santiago Ramiro
Universidad Autónoma de Guerrero
México
eugeniaapreza@yahoo.com.mx
Tecnología Avanzada – Nivel Básico

Resumen.
La calculadora graficadora como herramienta tecnológica ofrece la posibilidad de despertar el interés del estudiante y estimular su entendimiento, y en este trabajo se analiza la puesta en escena de una situación didáctica como nota de clase (Lluck, 2004). Conformada con una secuencia de actividades para ser trabajadas por los alumnos dentro y fuera del aula. Esta secuencia se diseña de tal forma que al ponerla en práctica es posible hacer matemáticas, considerando que dichos saberes matemáticos son necesarios para ser un ciudadano que se desempeñe con éxito en su labor y comprenda la importancia de la matemática en su vida actual y futura.

Presentación.

Este trabajo consiste en una investigación en proceso de desarrollo, en donde se considera el papel de la Calculadora Graficadora en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En esta presentación se aborda el problema de investigación, el objetivo fundamental y los posibles aportes. En algunas escuelas secundarias de la República Mexicana existen las denominadas aulas para la enseñanza de la matemática con tecnología, EMAT, y Secundarias para el Siglo XXI (Sec 21) en las que se demuestra que trabajando en este ambiente los alumnos activan diversos procesos cognitivos y metacognitivos, los docentes transforman sus concepciones acerca del proceso de enseñanza aprendizaje de esta asignatura y la escuela se organiza para promover el desarrollo de sus funciones sustantivas. Uno de los propósitos principales de este proyecto, se centra en la selección y aplicación de las nuevas tecnologías en el ámbito educativo, para generar y actualizar métodos y contenidos educativos de la Matemática Escolar, con la finalidad de mejorar la calidad del aprendizaje.

Desafortunadamente solo funcionan algunas aulas EMAT en este nivel educativo, por lo que se hace necesario explicar el papel que desempeña la calculadora Graficadora en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en esta clase de aulas. En esta investigación se analiza la puesta en escena de una situación didáctica como nota de clase donde se aborda el contenido programático de educación secundaria Gráficas de funciones y regiones es el plano cartesiano utilizando la calculadora graficadora ALGEBRA FX 2.0.

Justificación

La curiosidad del hombre lo ha llevado a buscar nuevas tecnologías para estar a la vanguardia en este campo, es por esto que el buscar lo ha conducido a la obtención de nuevos aparatos sofisticados para desempeñar de mejor manera su trabajo cotidiano, uno de ellos es la calculadora graficadora.

El propósito de esta investigación es elaborar el diseño de una situación didáctica como nota de clase en el tema de gráficas de funciones y regiones en el plano cartesiano. Aquí es donde la calculadora graficadora entra en juego para ser una de las herramientas principal en los estudiantes en el desarrollo de las actividades propuestas en la situación didáctica como nota de clase, utilizando la calculadora graficadora. Tenemos como referencia positiva los resultados obtenidos por los diferentes maestros que han trabajado con tecnología, uno de ellos nos habla de que se desarrolló el gusto por las matemáticas, materia que de manera generalizada es de difícil aceptación en los adolescentes de secundaria. También facilita el aprendizaje en los alumnos motivando su atención y comprensión en los temas vistos, y algo muy importante que se logra con la utilización de la calculadora graficadora que rompe con las estructuras de monotonía en el docente. Consideramos que todos estos beneficios son para motivar el desarrollo y capacitación del docente, que en gran medida se ha quedado rezagado, cuando las nuevas generaciones vienen creciendo e interactuando con tecnología.

Consideramos que el diseño y puesta en escena se situaciones didácticas como notas de clase utilizando la calculadora graficadora contribuye al mejor funcionamiento de las aulas EMAT y Secundarias para el Siglo XXI (Sec 21). Ya que esta clase de situaciones están conformadas con una diversidad de actividades como lecturas, ejercicios, problemas, exploraciones, momentos de reflexión y sitios de interés para ser ejecutados por los alumnos para el logro de los objetivos propuestos. Por su parte la calculadora graficadora constituye un dispositivo didáctico útil para la búsqueda y construcción de procedimientos y estrategias eficaces en la solución de problemas.

Problemática.

Consideramos que hacen falta experiencias en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con la utilización de la calculadora graficadora en educación secundaria, por lo que este trabajo puede contribuir a transformar el proceso de aprendizaje de las matemáticas en general, y en particular el de la temática referida.

Objetivo de la investigación.

El objetivo fundamental es analizar los efectos de la puesta en escena de una situación didáctica como nota de clase utilizando la Calculadora Graficadora.

Pregunta de investigación.

¿Qué papel desempeña la calculadora graficadora en el aprendizaje de las matemáticas?

Metodología

a) estudio documental de planes, programas y otras fuentes.

Donde los planes y programas nos rigen para el diseño y la puesta en escena de la situación didáctica como nota de clase. También analizan diferentes investigaciones que se han hecho acerca del uso de la calculadora graficadora, experiencias que se han tenido dentro de las aulas para la enseñanza de la matemática con tecnología (EMAT) y Secundarias para el Siglo XXI

(Sec 21), donde el ambiente tecnológico coadyuva al logro de los aprendizajes, y consiste en mostrar de forma práctica que es factible aprovechar las nuevas Tecnologías -apoyadas en un modelo pedagógico que permita construir ambientes de aprendizaje apropiados- para enriquecer y mejorar la enseñanza actual de las matemáticas en la escuela secundaria.

El análisis del plan y programas se hace para constatar como se propone en estos documentos el uso de las tecnologías, en particular de la calculadora graficadora en el aprendizaje de las matemáticas. Por su parte el estudio de investigaciones en este campo, se realiza para conocer experiencias en el uso de estos dispositivos didácticos.

b) Diseño de la situación didáctica como notas de clase (en proceso de estructuración).

Se diseña una situación didáctica como nota de clase para abordar el contenido programático de graficación de funciones y regiones en el plano, utilizando la calculadora graficadora). Esta situación didáctica como nota de clase consiste en una secuencia de actividades para ser trabajadas por los alumnos dentro y fuera del aula, y se estructura con lecturas, ejercicios, problemas, exploraciones, momentos de reflexión y sitios de interés para el logro de los objetivos propuestos.

c) Puesta en escena de la Situación didáctica como nota de Clase.

Y una vez diseñada la situación didáctica como nota de clase se pondrá en escena en la Escuela Secundaria Federal No. 10. El alumno debe producir actividades para que formule y pruebe, lo que está realizando, y el profesor es el encargado de provocar estas situaciones con su preparación previa a la puesta en escena de la situación didáctica como nota de clase.

d) Análisis de los procesos y resultados.

Este análisis se hará en términos del logro de los objetivos propuestos.

Aportes.

Y los posibles aportes estarán en términos de una situación didáctica como nota de clase validada.

Reflexiones finales

Esta investigación se presentó en Relme 18, en la modalidad de cartel.

Los asistentes a la exposición comentaban, "la instalación de tecnología en todas las aulas de nivel secundaria en el país no es posible, ya que no se cuenta con los recursos suficientes (materiales y humanos)." Y otros opinaron "la preocupación que tienen los maestros por actualizarse es mínima o casi nula", .También hubo asistentes que opinaron que es un tema apropiado para incentivar el uso de este dispositivo en las aulas de las escuelas secundarias del país. Estas fueron algunas de las observaciones que consideramos de mayor relevancia.

Concluimos pues que la tecnología en la educación matemática debe ser utilizada, por sus bondades y revolución interna que genera en el alumno al ponerse en contacto con ella.

Referencias Bibliográficas

Brousseau, G. (1983) *Los obstáculos epistemológicos y los problemas de la enseñanza*. Versión en Español del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.

Chevallard, Y., Bosch, M y Gascón, J. (1998), *Enseñar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. México: SEP

Velázquez, S., Flores, C., García G., Gómez E. y Nolasco, H. (2001), *El desarrollo de habilidades matemáticas en situación escolar*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Lluck, S. (2004) *Situación didáctica como nota de clase: El caso de la Elipse*. Trabajo presentado en la II Jornada Estudiantil, Facultad de Matemáticas, Guerrero.

El Computador en la Clase de Matemáticas: Desde lo Dinámico y lo Semiótico

Walter F. Castro y Hugo F. Pardo
Pontificia Universidad Javeriana
Colombia
wcastro@puj.edu.co
Pensamiento matemático Avanzado – Nivel superior

Resumen

En esta investigación se utilizó un enfoque que permitió explorar los conceptos propios del curso de ecuaciones diferenciales ordinarias, ofrecido para los estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Pontificia Universidad Javeriana, Cali, Colombia, considerando los modelos teóricos propuesto por Godino y Batanero; la propuesta de Vergnaud, y los esquemas de representación de Brown. Se utiliza el computador como "*instrumento mediador*" (soportado en las potencialidades del software MatLab) que favoreció trabajar con instancias de modelación de las ecuaciones diferenciales en contextos propios de la Ingeniería, desde una perspectiva dinámica de las ecuaciones y otra semiótica desde el diseño de actividades para los estudiantes.

Introducción.

La forma tradicional en la cual las ecuaciones diferenciales ordinarias se han enseñado en la mayoría de las universidades colombianas, corresponde a un enfoque en donde se enfatizan los procedimientos algorítmicos-algebraicos prestando poca atención al uso de modos, entidades y esquemas de representación que ayuden a configurar una "*comprensión conceptual*" en donde las matemáticas, los problemas de ingeniería, los recursos tecnológicos y los métodos de indagación científica confluyan en una sola actividad orientada didácticamente.

Con el propósito de explorar la configuración de un modelo de enseñanza que hiciera uso de las potencialidades del computador, se decidió implementar, en la Pontificia Universidad Javeriana, Seccional Cali, Colombia, una experiencia-orientada semióticamente- en donde los objetivos propuestos estaban alrededor de favorecer el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias mediante la ampliación de su campo semántico, vía el uso del software MatLab para relacionar apropiadamente los enfoques gráficos y numéricos, entrelazados de manera compleja con los conceptos matemáticos motivo de estudio, dentro de un marco referencial de aplicaciones de las ecuaciones, provenientes de los campos de interés para los estudiantes de ingeniería, creando en la clase un ambiente de indagación que motiva al alumno, quien encuentra la posibilidad de participar vía la mediación del computador.

Perspectiva teórica.

Existe evidencia considerable que apoya que un enfoque gráfico ayuda a los estudiantes a ganar una comprensión conceptual sin afectar necesariamente su habilidad para tratar con la simbolización correspondiente. (Heid, K 1988; Palmier,1991).

La relación entre los signos usados para codificar el conocimiento y los contextos empleados para establecer los significados de los signos, ha sido estudiada por muchos autores, tales como Ogden (1923), Peirce (1931), Saussure (1974), Fish (1980), entre otros.

Aunque sus estudios no están directamente relacionados con las matemáticas, sus hallazgos se pueden usar para explicar la forma en que los seres humanos damos sentido al cuerpo de conocimientos llamado matemáticas.

Para Duval, es necesario distinguir entre los objetos matemáticos y sus representaciones para alcanzar la comprensión matemática. Para lograr este objetivo, se requiere el uso de diferentes representaciones(Duval 1993). Duval define estas representaciones así:

Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el uso de signos que pertenecen a un sistema de representación, que tiene sus propias restricciones de significado y función.

Vergnaud (1990) *considera el concepto como una 3-upla*

- Referencia: Conjunto de situaciones que dan sentido al concepto.
- Significado: Conjunto de invariantes sobre los cuales se basan las operaciones.
- Significadores: Conjunto de formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten la representación del concepto, sus propiedades, situaciones y procedimientos.

Vergnaud enfatiza esta terna para promover un crecimiento cognitivo; parece que Vergnaud coincide con Saussure (1974) quien asegura que un "signo es una combinación reconocible de un significador con un significado particular" ;Vergnaud también afirma que el significado no puede reducirse ni al significador ni a las situaciones.

Godino y Batanero (1998) bosquejan un modelo teórico que comprende tres entidades elementales que corresponde a la terna de Vergnaud:

- Entidades ostensivas: Todo tipo posible de representación usada en matemáticas, tales como: Símbolos, gráficas, tablas, diagramas, etc.
- Entidades Extensivas: Problemas, fenómenos y aplicaciones.
- Entidades Intensivas: Ideas matemáticas, generalizaciones, abstracciones, procedimientos, y teorías.

Además de:

- Entidades actuativas: Acciones que son llevadas a cabo por los estudiantes para resolver los problemas, tales como generalizaciones, operaciones, descripciones, etc.

Igualmente usamos la propuesta de Brown (1997) quien usa cuatro esquemas para explicar cómo las personas relacionan las acciones a los resultados.

- Aperceptual: Los objetos se ven como objetos en sí mismos, sin ninguna referencia. La expresión $x^2+y^2=1$ se ve como un conjunto de letras sin ningún significado.
- Apresentacional: El mundo está formado por símbolos; la expresión $x^2+y^2=1$ se considera la representación de un círculo.
- Referencial: El uso de imágenes mentales relacionadas con el símbolo $x^2+y^2=1$.
- Interpretacional: Comprende el conjunto de estrategias personales que relacionan imágenes con símbolos.

Los dos investigadores consideran que las representaciones ostensivas permiten 1) expresar y comunicar (estructuras mentales y operaciones) 2) manipular (transformaciones de representaciones) y 3) objetivar(los sistemas semióticos independizan las producciones de los propios sujetos).

La experiencia de enseñanza.

Al inicio del semestre, se aplicó un examen de diagnóstico cuyos propósitos, fueron, primero, el de caracterizar los modos, las entidades y los esquemas de representación usados por los estudiantes para dar cuenta de los conocimientos matemáticos, y segundo, el de usar esta información en la planeación de las actividades propuestas a los estudiantes en el curso de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Las preguntas en el examen fueron clasificadas de acuerdo con una matriz de orden tres: la primera dimensión consideraba los modos de representación de Janvier: simbólica, numérica, gráfica y verbal; la segunda dimensión consideraba las tres entidades propuestas por Godino y Batanero, y la tercera, los esquemas de representación de Brown.

Para clasificar las respuestas de los estudiantes se utilizaron redes sistémicas para cada una de las preguntas y para cada estudiante. Un número considerable de estudiantes utilizó procesos simbólicos para dar respuesta a las preguntas, sin importar que la gráfica ofrecida en la pregunta diera suficiente información para responder satisfactoriamente.

Los resultados hicieron evidente que los estudiantes recurrían principalmente a entidades ostensivas -de tipo simbólico- de representación, enmarcadas dentro del esquema. Apresentacional para expresar ideas matemáticas y conceptos; esto se constituyó en un buen comienzo para implementar nuestra propuesta de promover el uso de modos, entidades y esquemas de representación en situaciones de enseñanza en donde las matemáticas, los problemas de ingeniería, los recursos tecnológicos y los métodos de indagación científica confluyeran en una sola actividad orientada didácticamente vía el uso de un software.

Esto nos permitió sistematizar la forma en la que diseñamos las instancias iniciales de enseñanza de las ecuaciones, así como los objetivos y las actividades propuestas a los estudiantes.

Acciones tomadas para afrontar el diseño de actividades.

Basados en las condiciones halladas al inicio de la experiencia, decidimos llevar a cabo el siguiente programa

Clase	Prácticas	Tareas para entregar	Exámenes
Resumen, introducción, teoría, ejemplos trabajados con la ayuda del computador en donde éste se usa para ilustrar, cambiar el modo de representación y verificar.	Ejercicios que: • Pueden ser trabajados con el computador. • Pueden ser trabajados sin el computador. • Deben ser trabajados con el computador.	Tareas que ofrecen al estudiante la oportunidad de usar procedimientos, gráficas y tablas para dar respuesta a cuestiones planteadas, que a la vez traen a colación conceptos matemáticos y aplicaciones provenientes de la ingeniería.	Exámenes cortos se proponen a los estudiantes de tal suerte que pueden ser resueltos con o sin computador, reforzando el uso de: modos, entidades y esquemas de representación.

Las actividades para el estudiante promueven el uso de entidades y modos de representación, mediados por el computador y orientados a promover un avance ascendente en la escala de los esquemas de representación.

El computador en el salón de clase no es útil sin un apropiado entorno de aprendizaje (ambiente interactivo constituido por alumnos, profesor, monitor, conocimiento y recursos) diseñado para promover el aprendizaje y la enseñanza; la "*comprensión conceptual*" comprende una componente cognitiva, una tecnológica y una social.

Si bien no se efectuó un estudio fenomenológico de los sistemas de prácticas estudiantiles, ni de la discriminación de los significados personales, sí se hizo un registro permanente de algunos elementos característicos del proceso de "*comprensión*" conceptual, lo cual fue útil para clarificar el nivel de apropiación de las prácticas interpretativas.

La frecuencia, efectividad y oportunidad de los modos y entidades de representación, usados por los estudiantes, fue motivo de indagación y sujeto a registro por parte del docente; esta información diaria se utilizó como insumo para planear actividades que abordaran los aspectos deficientes evidenciados en las producciones escritas y orales de los estudiantes.

El docente hizo todo esfuerzo posible para mantener una ambiente activo de participación, de tal suerte que el entorno de aprendizaje estuviese sintonizado con los objetivos del curso, con las dificultades de los estudiantes y con los objetivos de la propuesta de indagación.

La propuesta de evaluación final de los estudiantes, contó con un trabajo final llamado Proyectos, que debían ser elaborados por los estudiantes en grupos de hasta tres, básicamente consistían en modelos matemáticos para problemas provenientes del campo de la ingeniería, y que debían ser explorados y resueltos con la ayuda del software MatLab y de los programas dfield5 y pplane5 del profesor John Polking (2003).

Al finalizar la experiencia, se llevó a cabo una encuesta, una entrevista focalizada y un examen técnico. Este último recabó información sobre las competencias desarrolladas por los estudiantes y motivadas por la experiencia; y se diseñaron ejercicios que exigieran de los estudiantes la puesta en juego de los modos y las entidades de representación. Los ejercicios podían ser resueltos sin la ayuda del computador, pero uno estaba disponible para ser usado por los estudiantes que lo solicitaran.

De acuerdo con el examen final de salida, se hizo evidente que los estudiantes habían "avanzado" desde el esquema Aperceptual, en el cual estaban ubicados al inicio de la experiencia, hasta el umbral del esquema Referencial.

Referencias Bibliográficas

Brown, T. (1997). Mathematics Education and Languages. Interpreting Hermeneutics and post-Structuralism. Dordrecht: Kluwer.A.P.

Duval, R. (1993). Registres de preséntations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives 5,* 37-65.

Fish, S. (1980). *Is There A Text In This Class? The Authority Of Interpretive Communities*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Godino, D. y Batanero, Carmen. (1998). *Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* Documento presentado en el IX Seminario de Investigación en Educación Matemática (SIEM) de la Sociedad portuguesa de Investigación en Educación Matemática. Guimaraes.

Heid, K (1988) Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education 19*, 3-25.

Ogden, Charles K y Ivor A Richards (1923). *The Meaning of Meaning*. London: Routledge y Kegan Paul.

Palmiter, J.R. (1991). Effects of Computer Algebra Systems on Concept and Skill Acquisition in Calculus. *Journal for Research in Mathematics Education 22*, 151-156.

Peirce, Charles Sanders. (1931-58): *Collected Writings* (8 Vols.). (Ed. Charles Hartshorne, Paul Weiss y Arthur W Burks). Cambridge, MA: Harvard University Press.

John C. Polking. (2003). Información disponible en : http://math.rice.edu/~polking/.

Saussure, Ferdinand de ([1916] 1974): *Course in General Linguistics* (trans. Wade Baskin). London: Fontana/Collins

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. En A.J. Bishop et al(Eds): *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Dordrecht : Kluwer A.P.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des mathématiques*, *10* (2,3) 133-170.

Algunos Usos de la Computadora en el Aula

Carlos Armando Cuevas y Magally Martínez
Cinvestav – IPN, UAPVCh, UAEM
México
ccuevas@mail.cinvestav.mx, mmreyes@cinvestav.mx
Tecnología Avanzada – Nivel Medio, Superior.

Resumen

En los últimos años hemos sido partícipes de un explosivo desarrollo tecnológico; esto ha puesto en duda muchas de las prácticas docentes en los cursos de matemáticas. El advenimiento de la computadora con programas de manipulación simbólica, de graficación y simulación, hacen que muchas de las tareas usuales de un curso de cálculo, como derivar e integrar simbólicamente, se puedan resolver mediante la aplicación de estos paquetes. Esto cuestiona gravemente el rol del profesor y lleva ineludiblemente a una revisión curricular en donde se deben examinar los objetivos de los cursos de cálculo y determinar con precisión el contrato didáctico entre los participantes que son: el profesor, la tecnología y el estudiante. Cada propuesta presenta ventajas y desventajas en su uso, evidenciarlo es el objetivo del presente trabajo.

Antecedentes

Incorporar a la tecnología en el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es hoy algo necesario puesto que los cambios que produce en la enseñanza de la matemática son tanto en forma como en contenido. Por otra parte, el uso de la computadora nos ofrece la posibilidad de simular procesos físicos o geométricos, e interactuar entre los diversos registros de representación semiótica para un concepto matemático. Esto posibilita emplear diversas propuestas didácticas como la de Cuevas y Pluvinage, 2003 entre otras. Sin embargo, no todo es miel sobre hojuelas, los cálculos numéricos aproximados realizados por una calculadora o computadora nos pueden conducir a concluir que: un sistema lineal de ecuaciones es inconsistente cuando no lo es, a considerar raíces distintas en un polinomio cuando son múltiples, a concluir de las gráficas de polinomios discontinuidades o un número infinito de raíces, etc. A pesar de ello y debido al enorme potencial de simulación y cálculo numérico de las computadoras, existe entre los investigadores en educación un cierto consenso en que mediante ambientes para el aprendizaje por descubrimiento con el uso de la computadora en cursos de matemáticas se logre que el estudiante investigue y construya sus ideas matemáticas promoviendo así una mejor comprensión de los conceptos matemáticos (Asiala et.al. 1997, y Simmt, 1997). Sin embargo, introducirlos por el simple hecho de su potencial no es suficiente, por ejemplo Forgasz (2002) y Lozano (2000) mencionan que no se presentan cambios en la comprensión de los conceptos matemáticos por la simple presentación de dos o más registros si no se cuidan los detalles de conversión entre los diferentes registros. En el entendido de que hacer un análisis del uso de la computadora en educación matemática merece un estudio más extenso, y de que a pesar de ello éste quedará incompleto ante el creciente uso e imaginación de investigadores y docentes, señalaremos algunos usos.

Empleo de la computadora en Educación Matemática

La tecnología provee nuevas formas de experimentar y actuar en el mundo, y esto hace posible una nueva conceptualización y métodos cognitivos como señala Stroup (2002, p. 183): la facilidad de realizar cálculos numéricos, la posibilidad de visualizar gráficas complejas y la realización de cálculos simbólicos permiten centrar la atención en un cálculo conceptual más que en el cálculo operativo. La forma en que se ha utilizado la computadora en la educación matemática es muy variada y sigue fines como: mejorar la comprensión de los conceptos, promover la participación individual o colectiva, o hacer más eficiente y flexible los métodos de enseñanza, entre otros.

I) Software de aplicación para apoyo al trabajo docente y de investigación en la enseñanza de las matemáticas.

Uno de los primeros usos de la computación en la enseñanza de las matemáticas y materias afines lo constituyó el uso de programas de computación que proporcionaban en forma inmediata los cálculos requeridos para un determinado proceso. Así surgen paquetes de estadística como: Excel, SPSS, Fathon, entre otros; los cuales proveen el cálculo de diversas medidas de tendencia central, parámetros de muestras y poblaciones, agrupación y ordenación de datos, etc. Si bien estos programas nos permiten la manipulación y procesamiento de una gran cantidad de datos, también realizan en forma oculta el proceso para resolver los problemas limitando así su uso en educación cuando lo que se pretende es enseñar el proceso de resolución. Una enorme ventaja que permite dar un nuevo enfoque a la enseñanza de la probabilidad es utilizar programas, como Fathon, para introducir la probabilidad mediante un enfoque frecuencial. En este caso el educador tendría que planificar cuidadosamente su curso con el empleo de estos paquetes sobre todo si el curso es introductorio.

Los manipuladores simbólicos, nos proveen de gráficas de funciones de una o dos variables, resolución de derivadas e integrales en forma simbólica o numérica con un alto grado de precisión, resolución de ecuaciones algebraicas y diferenciales, cálculo de raíces, operaciones aritméticas, algebraicas y complejas, resolución de sistemas lineales de ecuaciones, operaciones matriciales, etc. Esta categoría incluye Derive, Mathematica, Maple, y MatLab, como los más usuales. Cabe mencionar que las operaciones se realizan con una efectiva aritmética que minimiza los errores de redondeo, sin embargo, en algunas ocasiones el uso de comandos resulta complicado. Claramente, una de las mayores dificultades al usar los manipuladores simbólicos en clase es que al resolver un determinado problema, mediante el uso de alguno de ellos, el proceso de solución permanece oculto y muchas de las veces el rescatar este proceso es precisamente una parte importante de las metas de un curso. De manera que la mediación didáctica es nula si el profesor no diseña las secuencias de aprendizaje (Stroup 2002; Mejía 1996; Cuevas 1999). Sin embargo, el uso adecuado de estos programas potencializa fuertemente la instrumentación de propuestas didácticas principalmente para problemas que requieran de un alto número de operaciones aritméticas y simbólicas como lo muestra Heid (1984) al desarrollar un curso de cálculo diferencial utilizando Maple, entre otros ejemplos.

II) Herramienta sofisticada que permite la creación de ambientes de aprendizaje

Dentro de esta categoría hemos anotado las subcategorías: Micromundos, Ambientes de Aprendizaje Inteligentes, y entre ellos los Sistemas Tutoriales Inteligentes y el Entorno

Computacional para el Aprendizaje y la Enseñanza de la Matemática (ECAEM).

Micromundos.

Los micromundos son diseñados con el fin de introducir conceptos matemáticos partiendo de que el alumno debe tener un control completo sin supervisión del profesor. La filosofía de aprendizaje es mediante juegos, sin embargo aunque se está jugando no es claro qué se está aprendiendo. A pesar de que se tienen experiencias con su manejo (Hatfield 1984, Self 1983) que muestran avances, se tiene la limitante de requerir que tanto el profesor como el alumno aprendan a programar o al menos cierto grado de dominio de programación en una computadora. El mismo problema presentan los lenguajes de programación desarrollados con el fin de facilitar la enseñanza de las matemáticas; como LOGO, ITSEL, VB, C++, estos parten del supuesto que al aprender la sintaxis del lenguaje los alumnos desarrollan cierto tipo de habilidades matemáticas y lógicas que los habilitan en la resolución de problemas (Paper 1981). Algunos ejemplos de software diseñado con fines explícitamente educativos partiendo de las experiencias con micromundos son: Cabri, Geómetra, Hiperlogo, Geo-Lab, que nos proveen de una geometría dinámica en donde la modificación de parámetros de figuras geométricas vía algebraica, numérica y gráfica se realizan en forma inmediata con la visualización respectiva de las modificaciones en la figura o gráfica correspondiente.

La primera forma de comunicación del ser humano fue el lenguaje figurativo o por señas evolucionando hasta el lenguaje escrito. Hoy somos testigos de una nueva forma de comunicación que empieza a surgir: el lenguaje escrito-interactivo. Una muestra elocuente de esta forma de comunicación nos lo muestran Abreu y Ontiveros (2000), con la producción de programas en Java (applet's), llamados Descartes 2 y Descartes 3, que permiten la redacción de lecciones o textos de matemáticas interactivos en la red. Es decir, en una página HTML (una pantalla usual de Internet) se permite: escribir la definición de un objeto matemático y a la vez instalar una ventana (applet) con el objeto matemático definido (gráfica, función, proceso, etc.) al cual podemos manipular al tiempo de estar leyendo sus propiedades. Esto, sin lugar a dudas crea un paradigma y a la vez una etapa más dentro de la comunicación entre los seres humanos.

Ambientes de aprendizaje inteligentes.

Por aprendizaje asistido por computadora entendemos aquellos sistemas de enseñanza basados en conducir al estudiante a través de ejercicios que se apoyan en la computadora y buscan evidenciar los procesos de cálculo y manipulación que realizan para comprender conceptos matemáticos. En esta categoría entran programas de Instrucción Asistida por Computadora (CAI), Aprendizaje Apoyado en la Computadora (CAL y CALM), los Sistemas Tutoriales Inteligentes (STI) y Aprendizaje Colaborativo Soportado por Computadora (CSCL). Aunque la lista no es exhaustiva, cada una de estas modalidades centra su atención en los procesos mediante los cuales el estudiante desarrolla problemas y ejercicios para adquirir una mejor comprensión de conceptos matemáticos; de manera que el modelo es lo que cambia para cada tipo de sistema. En esta categoría destacan los STI que son sistemas que implementan un modelo de enseñanza a través de un mecanismo de evaluación de respuestas del estudiante a preguntas propuestas por el sistema, dependiendo de esta evaluación es el tipo de material (nuevo o remedial) que se presenta al alumno. Para guiar la interacción se implementa un modelo de error del estudiante, que se anticipa a las posibles faltas y aciertos del usuario al intentar resolver un problema. Para muchos autores esto sólo es posible mediante la combinación de la inteligencia artificial y las ciencias cognitivas, siendo esta la principal limitante para su desarrollo y evolución (Cuevas 1996; Burns 1988).

Sistema Tutorial Inteligente (STI).

Los componentes esenciales de un STI son: El *módulo experto* que contiene el conocimiento del tema; su principal función es actuar como fuente de conocimiento que se desea transmitir, y incluye la generación de expresiones y respuestas; así como la evaluación para proporcionar información a otros módulos. El *modelo del estudiante*, diagnostica lo que el estudiante sabe, nutriéndose para ello del modulo experto, sincroniza las actividades con los otros módulos y se anticipa a todos los posibles errores y aciertos que un estudiante comete cuando resuelve un determinado problema (Anderson et.al.1990). El *módulo tutor*, identifica deficiencias en conocimientos del estudiante y selecciona estrategias para presentar material. Finalmente, el *ambiente instruccional* define las características de la presentación y comunicación, además de la interfaz usuario-máquina. Los inconvenientes son precisamente los paradigmas de este diseño, el plantear un modelo de estudiante que simule todas las posibles respuestas a un problema dado y que contenga todos los posibles errores que un estudiante puede cometer en cada paso del problema es algo imposible tanto desde el punto de vista computacional como cognitivo. Por otro lado, pretender emular mediante un programa de computadora el proceso de aprendizaje del ser humano resulta demasiado pretencioso. Un STI contempla al profesor fuera del proceso enseñanza aprendizaje; además la epistemología en que se basan es discursiva, por lo que considera al conocimiento como un tipo de objeto que puede ser entregado bajo ciertos mecanismos y se transmite vía discurso y replica de las "buenas soluciones" a problemas presentados por el tutor. Por otra parte, los módulos tutoriales presentados en los STI son rígidos y autoritarios impidiéndole al alumno experimentar con el sistema; además no toman en cuenta los diversos registros de representación para los conceptos salvo como ejemplo, pero no es componente importante de la interfaz ni del diseño. Así, la incompatibilidad con la estructura de los STI nos ha llevado a definir una nueva clase de sistema denominado Entorno Computacional para el Aprendizaje y Enseñanza de la Matemática (ECAEM).

Los componentes esenciales de un **ECAEM** son: Un *módulo experto*, que contiene el conocimiento de un experto del tema, generación de expresiones y respuestas, algoritmos eficientes y formas para recibir y proporcionar información a otros módulos. Por ejemplo, para el proyecto de acción práctica de construir el esbozo grafico de una función racional, éste contiene algoritmos para el cálculo de: dominio, raíces, signo, paridad, límites, asíntotas verticales y horizontales, primera y segunda derivada, concavidad, extremos relativos y absolutos, etc. De manera que cuando un usuario introduce una respuesta a un concepto, primero pasa por el filtro sintáctico y semántico, y después el sistema evalúa la respuesta con todos los elementos calculados antes de que el usuario escriba la respuesta respectiva. Un *modelo estadístico de error del estudiante*: Entre sus funciones están hacer hipótesis acerca de los errores más frecuentes que un estudiante puede cometer, al resolver un determinado problema.

Esta hipótesis se formula con base en la experiencia docente y en los errores que estadísticamente son los más frecuentes en el estudiante. Una vez detectado y marcado el error con la mayor precisión posible, el módulo tutor provee un mensaje de error que incluye una breve sugerencia u orientación, esperando permita al usuario enmendar su error. El *módulo tutor* selecciona las estrategias para presentar el conocimiento a enseñar. El plan, la estrategia de presentación y la dosificación de los contenidos se rigen bajo un modelo didáctico definido previamente y transparente para el usuario. El estudiante podrá interactuar con el ECAEM en forma individualizada o bajo la tutela de un profesor; el tutor sugiere al estudiante una estrategia para abordar el tema pero no impone forma alguna de proceder. La presentación de los diversos temas se realiza mediante problemas generados en forma aleatoria, que al resolverse son evaluados por el tutor. Por ejemplo, se sugiere que para construir la gráfica de una función racional se aborden los temas de forma gradual: dominio, raíces, signo, paridad, límites, derivada, etc; se recomienda revisar cada tema en forma directa y posteriormente de forma inversa y gráfica, pero si el alumno explora en otro orden no perjudica su secuencia de aprendizaje. Es responsabilidad del tutor dotar al usuario de herramientas particulares para resolver un determinado problema. Por ejemplo, ordenar datos, evaluar funciones en forma puntual o en un rango de valores, zoom, calculadora, operador de expresiones algebraicas, etc. También es responsabilidad del tutor dotar al usuario de una breve pero suficiente información académica para resolver el problema propuesto, esta información cambia de acuerdo al tipo de problema e incluso al nivel de resolución en que se encuentre el alumno. Opcionalmente el módulo tutor pondrá a disposición del estudiante un texto electrónico para una consulta más amplia por el usuario. Además del apoyo y el libro se dispone de una ayuda conteniendo una breve información acerca del tipo de respuesta solicitada o información para navegar en el sistema. Las opciones de ayuda están disponibles en cualquier momento y el usuario podrá recurrir optativamente a ellas y regresar al problema que esta resolviendo. El tutor nunca resuelve el problema propuesto, ni tampoco interrumpe el trabajo del estudiante; y sólo actúa cuando el estudiante da entrada a una respuesta o solicita información. Finamente, el *ambiente instruccional*, define las características de presentación y comunicación, además de la interfaz usuario-máquina, que deben ser lo más naturales posibles. Esta interfaz deberá permitir al usuario escribir las diversas expresiones matemáticas como si lo hiciera con lápiz y papel. También se encarga de mandar un mensaje, a solicitud del usuario, de las formas de navegar en el sistema y los códigos para escribir las expresiones solicitadas.

Algunos resultados.

CalcVisual es un sistema cuyo objetivo es apoyar la enseñanza del cálculo diferencial. CalcVisual puede ser un ayudante de profesor que puede compartir con el profesor las responsabilidades del mismo en un curso tradicional de cálculo diferencial. CalcVisual puede generar problemas en forma aleatoria, con grado de dificultad graduada, aceptar problemas propuestos por los estudiantes y en cualquier caso supervisar y evaluar las diversas respuestas del estudiante a todos los niveles. La experimentación más reciente con el sistema se llevó a cabo en un curso de Cálculo diferencial impartido en la UAP Valle de Chalco, UAEM, en el segundo semestre de la licenciatura en Informática Administrativa. El grupo estuvo conformado por 48 alumnos provenientes de distintas opciones de bachillerato, donde el 80% acreditó un curso de cálculo previamente. De la aplicación de un examen diagnóstico se comprobó que el 85% no recuerda la parte operativa de un curso de cálculo y mucho menos la conceptual La asignatura comprende cuatro horas de clase por semana, de las cuales dos se dedicaron a impartir la clase de forma tradicional y las otras dos horas se le delegaron a CalcVisual. Los alumnos trabajaron solos de dos a tres en por computadora. Las evaluaciones, para detectar el grado de avance conceptual y operativo incluían preguntas como (ilustramos sólo el caso de raíces): Calcular las raíces reales de un polinomio: por tanteo, de forma gráfica y por manipulación algebraica. Además de incluir operaciones inversas en preguntas como: a partir de dar el valor de las raíces, se le solicitó encontrar un polinomio que incluya a dichos puntos como sus raíces.

Finalmente, en el salón de clase se plantearon ejercicios de aplicación en donde para resolverlos se requiere encontrar las raíces de un polinomio. Cabe mencionar que algunos alumnos aventajados al terminar los ejercicios planteados de algún tema, en CalcVisual, exploran el siguiente concepto por si mismos, sin esperar que el profesor los ilustre en su clase; es decir, siguen el curso de acuerdo a su propio ritmo de aprendizaje. Los resultados de estas evaluaciones constituyen evidencias que hacen ver que el grado de comprensión de los conceptos del cálculo diferencial aumenta considerablemente.

Conclusiones

Partiendo del hecho de que toda forma de conocimiento está mediada por la acción de una herramienta material o simbólica, y que los programas o sistemas computaciones de manipulación simbólica y gráfica son asequibles por los estudiantes proponemos que ésta tecnología se incorpore de manera consciente y razonada en los cursos de cálculo diferencial. La incorporación de la computadora y o calculadora deberá ser más como una herramienta cognitiva que como un “calculador” o graficador de funciones,. Esto requiere que el profesor oriente el trabajo proponiendo actividades bajo un esquema didáctico que le permita evaluar el avance de sus alumnos; que defina tiempos y espacios para el sistema y para su clase normal, así como precisar las secuencias de actividades mediante ejemplos y contraejemplos que abarquen temas completos y que presenten dinámicas a desarrollar por los alumnos. Es decir, establecer con claridad el contrato didáctico entre la computadora, el profesor y el alumno. Una propuesta como la del ECAEM facilita al docente la incorporación de la computadora en el aula y ayuda a que el estudiante construya importantes conceptos del cálculo diferencial e integral, al integrar de manera significativa aspectos didácticos al software, además de proponer un uso adecuado de la computadora en el aula. Evidentemente que todo software didáctico bien empleado puede ayudar a una promoción de constructos matemáticos, pero requiere de un cuidadoso diseño de las actividades a desarrollar por los alumnos.

Referencias Bibliográficas

Abreu, J. y Ontiveros, M. (2000). Descartes 2 y 3. [En línea] Disponible en: www.cimat/jlabreu/descartes2.

Anderson, J., Corbett, A. y Petterson, E. (1990). Student modeling and tutoring flexibility in the Lisp Intelligent Tutoring System. In C. Frasson and G. Gauthier (Eds.) *Intelligent tutoring systems: At the crossroads of artificial intelligence and education*. Norwood, NJ: Ablex Publisher.

Asiala, M., Cottrill, J., Schwingendorff, K. y Dubinsky, E. (1997). The development of students, graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavor*. 16(4): 339-431.

Burns, H. y Capps, C. (1988). Foundation of Intelligent Tutoring Systems: An Introduction. In Polson J. y Richardson J. (Eds). *Foundation of Intelligent Tutoring Systems*. LEA, USA.

Cuevas, C. (1996). Sistemas tutoriales Inteligentes. *Investigaciones en Matemática Educativa. Grupo Editorial Iberoamérica*. (9), 149-172.

Cuevas, C. (1999). Hacia una clasificación de la computadora en la enseñanza de las matemáticas. *Investigaciones en Matemática Educativa II. Grupo Editorial Iberoámerica*. (14), 273-288.

Cuevas, A. y Pluvinage, F. (2003). Les projects d`action practique, éléments d´une ingénierie d´enseignement des mathématiques. *Annales de didactique et sciences cognitives*. (8), 975-999.

Cuevas, A. y Mejía, H. (2003). Cálculo Visual. México: Oxford University Press.

Resequencing skills and concepts in applied calculus trough the use of computer as tool. Ph. D. Thesis. Pennsylvania University, USA.

Forgasz, H. (2002). *Computers for learning mathematics: gendered beliefs*. PME XXVI, Jul 21-26, Norwich, UK, page 368.

Hatfield, L. (1984). *Toward comprehensive instructional computing in mathematics*. Computer in Mathematics Educations. National Council of Teacher of Mathematics. Reston, Virginia.

Lozano, I. (2000). *A dynamic software visualization tool for calculus instruction at the collage entry-level*. PME XXII, Oct 7-10, Arizona, USA, page 703.

Mejía, H. (1996). Alternativas de desarrollo de software educativo en México. Iberoamérica (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa*. (pp. 265-276).

Paper, S. (1981). *Desafío de la mente, computadoras y educación*. Ediciones Galápago. Argentina.

Self, J. & O´Shea, T. (1983). "Learning and Teaching with Computers". *Artificial Intelligence in Education*. USA: Prentice Hall.

Simmt, E. (1997). Graphics calculators in High School Mathematics. *Journal of Computer in Mathematics and Science Teaching*. (16), 269-289.

Stroup, W. (2002). Understanding Qualitative Calculus: A structural synthesis of learning research. *Internacional Journal of Computers for Mathematics Learning* (7), 167-215.

Chang. T. y Baskin, A. (1988). Learning companion system. In C. Frasson and G Gauthier (Eds.), *Intelligent Tutoring Systems*. USA: Ablex Publisher Corporation.

Un Acercamiento Alternativo al Cálculo Diferencial

Carlos Armando Cuevas y Hugo Rogelio Mejía
Cinvestav del IPN
México
ccuevas@mail.cinvestav.mx, hmejia@mail.cinvestav.mx
Tecnología Avanzada, Visualización – Nivel Medio, Superior

Resumen

Ante la problemática que presenta la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos del cálculo diferencial y también al surgimiento de herramientas computacionales capaces de graficar y realizar derivación simbólica y manipulaciones algebraicas, se requiere una reflexión crítica sobre cómo se puede utilizar la tecnología para apoyar la enseñanza y el aprendizaje del cálculo. En este artículo, se hace una propuesta didáctica que se ha implementado en un sistema computacional y un libro que la implementa. El acercamiento se apoya fuertemente en actividades con polinomios a través de los cuales se puede apreciar el poder del cálculo diferencial sin demérito de considerar situaciones suficientemente complejas.

Antecedentes.

En los últimos años se ha desarrollado una corriente de investigación en la que se hace una crítica reflexión alrededor de la enseñanza del cálculo diferencial e integral. Estas investigaciones apuntan a que el cálculo diferencial e integral se enseña con una fuerte carga operativa en detrimento de la parte conceptual (Amit y Vinner, 1990; Tall, 1996; Schoenfeld, 1985; Hiebert y Lefevre, 1986; Skemp,1976). La consecuencia, una pobre asimilación de los conceptos importantes del cálculo que muchas de las veces conduce a una interpretación errónea dentro de contextos geométrico, físico y algebraico. Asimismo, la gran deficiencia en su comprensión impide que los estudiantes puedan reconocer y aplicar los conceptos del cálculo cuando se requieren en materias de otra especialidad o de matemática más avanzada.

Aunado a esta problemática, el explosivo desarrollo tecnológico ha puesto en duda muchas de las prácticas docentes en los cursos de matemáticas. En efecto, el advenimiento de programas de computo con capacidad de manipulación simbólica, de graficación y simulación hacen que muchas de las tareas usuales de un curso de cálculo, como derivar e integrar, se puedan resolver mediante el uso de estos paquetes (Forgasz, 2002, p. 368; Asiala et. al. 1997; Simmt, 1997). Lo anterior, cuestiona el rol del profesor y lleva a una revisión curricular en donde se tengan que inspeccionar los objetivos de los cursos de cálculo y determinar con precisión el contrato didáctico entre los participantes de un curso: el profesor, la tecnología y el estudiante (Stroup, 2002, p.183). Contemplar a la tecnología como parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es algo necesario puesto que los cambios que produce en la enseñanza de la matemática son tanto en forma como en el contenido (Thurston, 1994, p. 175).

El reto que se enfrenta consiste en recuperar el significado de los conceptos que están inmersos en el cálculo diferencial utilizando la capacidad numérica, gráfica y simbólica que el medio computacional ofrece en la actualidad.

Elementos teórico didácticos.

Una de las formas tradicionales de conducir un curso de matemáticas, consiste en que el docente realiza la mayor parte de la actividad en clase ilustrando con problemas y su resolución el tema de matemáticas. Cuando el proceso de enseñanza consiste en que el alumno sólo repita las imágenes del pizarrón; la enseñanza tiende hacia la construcción de hábitos en los estudiantes y no hacia la interiorización de los conceptos (Aebli, 1958). Una consecuencia inmediata de este tipo de didáctica en los cursos de cálculo, muestra que el estudiante es capaz de aprender de memoria las fórmulas de derivación pero no puede reconocer la derivada como una medida de la variación por lo que, en problemas donde se describe la variación instantánea de una magnitud, empieza a repetir verbalmente las fórmulas que le vienen a la memoria y en la mayoría de los casos acaba proponiendo algo absurdo. En este sentido, la repetición verbal como un reflejo constituye el llamado hábito sensoriomotor, es decir, las palabras constituyen signos carentes de significado. Con este tipo de enseñanza se aniquila el concepto y se substituye por una secuencia de operaciones numérico algebraicas. (Cuevas 1999).

¿Cómo lograr que la enseñanza de la matemática no se conduzca de esta forma? Existen diversas propuestas y, evidentemente, cada una contribuye en parte a resolver este grave problema. En nuestro acercamiento, se propone estructurar un curso de cálculo que incorpore los siguientes elementos:

a) Al introducir un concepto matemático hay que partir de un problema en cierto contexto de interés para el educando; buscando que se realice una acción, no necesariamente física sino mental, para que mediante la resolución gradual del problema (descomposición) el alumno llegue a la construcción del concepto mediante un proyecto de acción práctico (Cuevas y Pluvinage, 2003). En el caso del cálculo diferencial, el contexto puede surgir de los problemas que usualmente se proponen como problemas de aplicación de la derivada como el bosquejo de una gráfica, los problemas de máximos y mínimos, o los problemas de razón de cambio.
b) La descomposición del problema debe incorporar subproblemas que requieran tanto de operaciones directas como inversas así como resolver un mismo problema por diversas formas. Por ejemplo, se proponen situaciones que requieran determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función pero también situaciones que requieran reconstruir una función cuyos intervalos de monotonía se proporcionan.
c) Visualizar y operar el concepto en distintos sistemas de representación (en el sentido de Duval, 1993) e instrumentar operaciones de conversión entre las diversas representaciones que permitan su articulación enriqueciendo el significado del mismo. Por ejemplo, calcular tabular y gráficar la variación de las funciones con el signo de la derivada en diferentes intervalos.
d) Finalmente este concepto deberá formar parte de un tema posterior de mayor complejidad, como parte de la estructura necesaria para que el estudiante aborde el nuevo problema (Cuevas y Pluvinage, 2003, pp. 8-30). Todo ello sin dejar fuera la componente de socialización y los procesos intrínsecos que conlleva.

Si lo anterior no fuera posible de realizar para todos y cada uno de los conceptos inmersos dentro del curso de cálculo diferencial debería de hacerse un estudio previo para destacar los conceptos más importantes y realizar esta tarea para ellos.

Usualmente la enseñanza del cálculo diferencial sigue un esquema de definición – teorema - problema tipo. Aunque las reglas de derivación se aplican a todo tipo de funciones, los problemas tipo ejemplifican principalmente los conceptos relacionados con la derivada a las funciones racionales, y se apoyan en el conocimiento algebraico del estudiante y poco en su intuición geométrica y visual; debido, posiblemente, a la dificultad para representar en el papel o el pizarrón un número suficientemente grande de ejemplos que den significado geométrico a los contenidos del cálculo y al álgebra involucrada en ellos.
En primera instancia, haría falta rescatar el desarrollo de los conceptos del cálculo mediante problemas de cambio y variación surgidos de problemas en contexto, los cuales ayudarán a reforzar la intuición. En la actualidad, los problemas de cambio y variación son ejemplos de aplicación del cálculo, es decir, se estudian después de que se ha desarrollado la teoría, y no como surgió históricamente. Nuevamente, por la dificultad de reproducir en el salón de clase esos procesos dinámicos. Además, convendría que el estudiante reconociera la riqueza de las herramientas del cálculo para bosquejar las gráficas de funciones y reconstruir funciones con características preestablecidas respecto a monotonía, puntos críticos, puntos de inflexión comportamiento asintótico, etc. Realizar lo anterior para que lo pueda aprovechar un estudiante promedio resultaría muy difícil de hacerse sin el apoyo de la tecnología computacional actual.

Propuesta.

Para iniciar un curso de cálculo diferencial, proponemos un proyecto de acción, en el sentido antes discutido. La elección del problema constituye en general un proyecto de investigación aunque en nuestro caso concluyó con la elección de construir y descifrar la gráfica de una función real. El esbozo de una gráfica no es un problema nuevo, usualmente se propone como un problema que resulta de la aplicación del cálculo; esto es, se enseña después de haber estudiado los conceptos del cálculo. Nuestro enfoque consiste en retomar este problema como el problema de inicio que motiva e induce para su resolución los conceptos del cálculo; es decir, a partir de la resolución de este problema surge como una necesidad el cálculo diferencial. El esbozo gráfico es un problema importante puesto que reconocer e interpretar la información que una gráfica ofrece es un problema difícil que se tiene siempre que la gráfica representa un proceso físico, económico, biológico o de cualquier naturaleza. Si bien, actualmente un gran número de programas computacionales nos ofrecen graficas sofisticadas de funciones, también es cierto que muchas de las veces la información visual que ofrecen es parcial y la escala a la que se presenta la porción de gráfica mostrada puede conducir a falsos supuestos. Por ejemplo, si se propone analizar la gráfica de un polinomio como:
$P(x) = -8x^7 - 45x^6 + 7x^4 - 97x^3 + 34x^2 + 3$

La primera gráfica presentada por dos sistemas computacionales diferentes se muestra en las figuras 1 y 2.

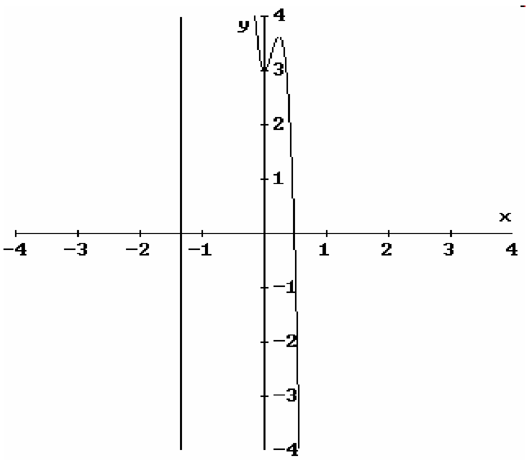


Figura 1 Grafica que ofrece el programa DERIVE ver. 5.0 al polinomio $P(x)$.

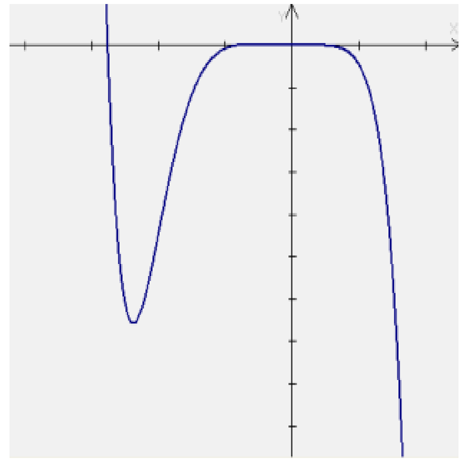


Figura 2 Grafica que ofrece el programa CalcVisual ver. 1.0 al polinomio $P(x)$.

Como se puede observar en la figura 1, aparece la gráfica de una función discontinua y con un segmento de recta vertical que, como se sabe, no corresponde a la gráfica de una función real. En la figura 2, aparece la gráfica de una función continua, sin embargo, parecería que la función tiene un número infinito de raíces alrededor del origen, cuestión imposible de tener con un polinomio real. Aunque ambos programas ofrecen la posibilidad de modificar la escala y región de graficación, si no se sabe qué información hay que buscar difícilmente se van a identificar las diferentes regiones y/o escalas que muestren gráficamente tal información. La tecnología computacional por sí misma, no resuelve el problema, el cálculo diferencial sí lo hace, pero se requiere de una estructuración didáctica adecuada para hacerlo accesible al estudiante.

Una vez determinado como proyecto de acción la construcción e interpretación de la gráfica de una función real para un primer curso de cálculo diferencial, proponemos iniciar con las funciones que son las más simples de definir y estudiar relativamente: los polinomios. La función polinómica permite ejemplificar la mayoría de los conceptos que aparecen en el cálculo, con relativa simplicidad algebraica y numérica. Tampoco es novedoso el utilizar a los polinomios para ejemplificar conceptos del cálculo, sin embargo, usualmente se utilizan ejemplos simples que ofrecen poca dificultad en la determinación de sus raíces lo que, en general, dificulta construir ejemplos que muestren la riqueza de situaciones que un polinomio puede generar. La razón dada era que la dificultad algebraica podría distraer u ocultar el concepto bajo estudio. No obstante, en la actualidad la dificultad algebraica ya no representa un obstáculo si se utiliza en combinación con un acercamiento numérico apoyado en la capacidad de cálculo de una computadora. Auxiliados por el medio computacional, se pueden construir ejemplos de funciones polinomiales, y otras como las funciones racionales y radicales, cuya riqueza conceptual sea lo suficientemente vasta para dar al estudiante una idea muy clara de las situaciones que el cálculo diferencial resuelve.

Lo anterior requiere de un acercamiento didáctico bien definido y éste es el que configura la propuesta que se presenta aquí y que ya ha sido experimentada con profesores y estudiantes. La propuesta completa se presenta en el libro Cálculo Visual (Cuevas & Mejía, 2003b) y se apoya fuertemente en un Sistema Interactivo de Enseñanza y Aprendizaje por Computadora

(CalcVisual, Cuevas & Mejía, 2003a) con una estrategia didáctica incorporada que cumple lo especificado en los incisos a, b, c y d de la sección anterior.

Se propone iniciar el estudio del esbozo gráfico en los polinomios haciendo un estudio reflexivo sobre las raíces reales de una ecuación, este tema que formalmente sería de precalculo adquiere relevancia en nuestra propuesta porque representa uno de los ejes fundamentales en el estudio del cálculo. En efecto, si se tiene una forma adecuada de calcular y un significado claro de lo que una raíz real representa, conceptos como el de monotonía, puntos críticos, concavidad, y puntos de inflexión se simplifican de manera notable en su cálculo y análisis, particularmente para polinomios y funciones relacionadas. Si el estudiante reconoce en forma gráfica el significado de una raíz real y mediante el uso de un ambiente computacional como CalcVisual (op. cit.), se le enseña a encontrar en forma aproximada y numérica el valor de las raíces (figura 3), entonces el estudiante puede fácilmente determinar el signo de la función polinomial, aplicando un principio básico de continuidad. Lo anterior se reproduce para la primera y segunda derivadas de la función por lo que el cálculo de la monotonía, identificación de puntos críticos y concavidad se simplifica notablemente. El estudio no quedaría completo si no se realizan también toda la serie de procesos inversos relacionados con construir funciones que tengan raíces dadas o una monotonía propuesta, puntos críticos preestablecidos, etc.

Pero procediendo en orden, después de determinar las raíces y el signo del polinomio, se propone hacer un estudio sobre los límites a $+\infty$ y $-\infty$ de un polinomio con la idea de determinar con precisión el comportamiento del polinomio en todo su dominio, más allá del intervalo donde se encuentran las raíces, coloquialmente, se tiene que saber de dónde viene la función y hacia dónde va. Es conveniente realizar el estudio tanto en forma numérica como algebraica de tal forma que al tabular, con ayuda de la computadora, valores de la función el estudiante adquiera una intuición que después confirmará con sus cálculos algebraicos. Enseguida, se puede considerar que la gráfica de la función esta formada por pequeños segmentos de recta (de hecho, es la forma en que una computadora construye la gráfica).

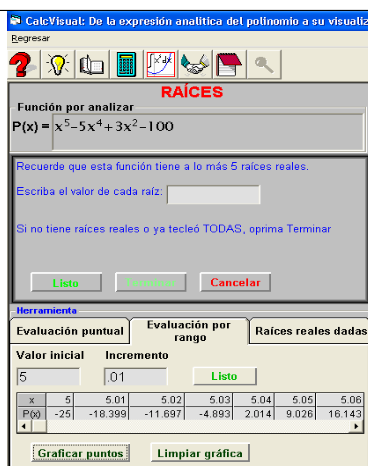


Figura 3. Herramienta para aproximar raíces por tabulación dinámica.

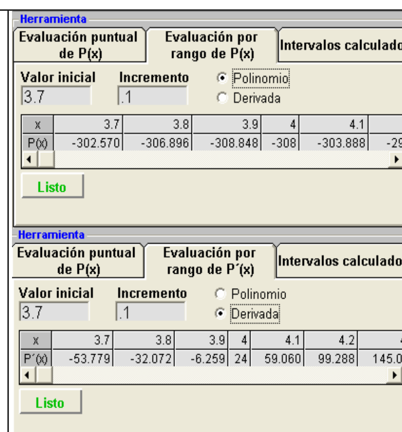


Figura 4. Comparación entre el los valores de un polinomio y su derivada cerca de un extremo.

Numéricamente, la pendiente de esos segmentos de recta se puede medir por la razón de cambio de la función tomada en puntos sucesivos. Para el problema planteado lo que interesa principalmente es el signo y los ceros de la razón, información que obtenemos de la derivada en forma semejante a como se hizo para el polinomio original, puesto que las derivadas de un polinomio siguen siendo polinomios. Otro aspecto importante es que se pueda comparar numéricamente el comportamiento de la función en los puntos críticos e intervalos de crecimiento y decrecimiento respecto al signo y los ceros de la derivada. El sistema CalcVisual permite visualizar lo anterior como se muestra en la figura 4. Es conveniente insistir que el problema no termina al identificar todos los elementos que configuran la gráfica de la función. Es muy importante el planteamiento de problemas donde se da información sobre algunos de esos elementos y se pide construir una función que cumpla con las condiciones dadas. Por ejemplo, se pueden dar intervalos con una monotonía especificada en donde lo que se solicita es construir una función que tenga tal monotonía. Problemas como el anterior rompen con la falsa idea de que todo problema que se plantee deba tener una solución única. La intención es ver que se puede tener una familia de funciones que cumple lo solicitado.

Comentarios finales.

Si partimos del hecho de que toda forma de conocimiento esta mediada por la acción de una herramienta material y/o simbólica, proponemos que se incorpore en los cursos de cálculo diferencial a la tecnología computacional. Más que como un calculador simbólico o graficador de funciones, se propone su uso como una herramienta cognitiva. Una propuesta como la que queda implementada en el sistema CalcVisual favorece acercamientos para que el estudiante construya conceptos importantes del cálculo diferencial; donde, además del recurso algebraico, el estudiante emplee otros registros de representación para explorar el concepto siempre bajo un esquema didáctico bien definido. Sin embargo, hay que recordar que ningún sistema es autosuficiente, ni se pretende que CalcVisual lo sea, es indispensable que el profesor oriente y profundice sobre el trabajo que realiza el alumno. De hecho puede utilizar el propio sistema computacional para generar situaciones que confirmen el poder del cálculo diferencial como una herramienta que resuelve de manera sistemática una familia muy grande de problemas que la tecnología computacional es incapaz de resolver.

Referencias Bibliográficas

Aebli, H. (1958). *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget*. Argentina: Kapelusz.

Amit, M y Vinner, S. (1990). *Some Misconceptions in Calculus - Anecdotes or the Tip of an Iceberg*. México: PME.

Asiala, C. y Dubinsky. (1997). *The Development of students, graphical understanding of the derivative. Journal of Mathematical Behavior*. (pp. 339-431). USA.

Cuevas, A. (1999). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de las matemáticas, basada en la psicología de Jean Piaget*. México: CINVESTAV- IPN.

Cuevas, A. y Mejía, H. (2003a). *CalcVisual. Un sistema de cómputo para la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo diferencial*. México: Oxford University Press.

Cuevas, A. y Mejía, H. (2003b). *Cálculo Visual*. México: Oxford University Press.

Cuevas, A. y Pluvinage, F. (2003). *Les projets d`action practique, éléments d´une ingénierie d´enseignement des mathématiques.* (pp. 975-999). Francia : IREM de Strasbourg.

Duval, R. (1993). *Semiósis y noesis. Lecturas en didáctica de las matemáticas*. (pp. 118-144). México: Cinvestav.

Forgasz, H. (2002). *Computers for learning mathematics: gendered beliefs*. PME XXVI, Jul 21-26, UK: Norwich.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis*. Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics. J. Hiebert (Ed.), (pp. 1-27). USA: Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ.

Simmt, E. (1997). Graphics calculators in High School Mathematics. *Journal of Computer in Mathematics and Science Teaching*. (16, 2/3), 269-289. USA

Schoenfeld, H. (1985), *Mathematical Problem Solving*, USA: Academic Press, New York.

Skemp, R. (1976), *Relational understanding and instrumental understanding*. (pp.20-26). USA: Mathematics Teaching

Stroup, W. (2002). Understanding Qualitative Calculus: A Structural Synthesis of Learning Research. *International Journal of Computers for Mathematics Learning* (7), 167-215. USA.

Tall, D. (1996), *Functions and Calculus*. Netherlands: International Handbook of Mathematics Education. J. Bishop et al (Eds.), (pp. 289-325).

Thurston, W. (1994). On proof and progress in mathematics. *USA: Bulletin of the American Mathematical Society* (30), 161-177.

Matemáticas y Nuevas Tecnologías en Costa Rica

Edison De Faria
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
edefaria@cariari.ucr.ac.cr
Tecnología Avanzada – Nivel Superior

Resumen

Costa Rica es un país que apuesta al desarrollo tecnológico como una vía alternativa para el desarrollo social, económico y educativo y se encuentra ubicada entre los países latinoamericanos líderes potenciales de adelanto tecnológico. A partir 1980 se llevaron a cabo importantes investigaciones y programas relacionados con el uso de calculadoras y de computadoras en el proceso de enseñanza y aprendizaje en todos los ámbitos educativos costarricenses. En este artículo describiremos algunas experiencias relacionadas con el uso de calculadoras en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Introducción

Costa Rica es uno de los países que ha dado importantes pasos dirigidos hacia la utilización de tecnologías digitales con fines educativos. En la década de los noventa se llevaron a cabo importantes investigaciones relacionadas con el uso de calculadoras y de computadoras en el proceso de enseñanza y aprendizaje en todos los ámbitos educativos.

Peralta, Berty, Buján y Jiménez C. (1991), en un proyecto adscrito al Instituto de Investigaciones para el Mejoramiento de la Enseñanza en Ciencias de la Universidad de Costa Rica (I.I.M.E.C), realizaron un estudio con 155 estudiantes de tercero y quinto grados en seis escuelas del Primero y Segundo Ciclos de la Educación General Básica en Costa Rica. Se aplicaron cuatro tratamientos: un grupo trabajó sólo con material concreto, otro lo hizo sólo con calculadora, un tercer grupo realizó la mitad de las actividades con calculadora y la otra mitad con material concreto y un cuarto grupo, considerado como grupo control, no participó de ninguna de las actividades. En la investigación se aplicó una prueba de actitud hacia la matemática, una prueba de habilidad espacial y una prueba de procesos mentales. Entre sus conclusiones destacamos las siguientes:

- Los estudiantes que trabajaron a la vez con calculadora y material concreto son los que presentaron resultados más altos en las pruebas de discriminación, habilidad espacial y aritmética y excepto en el caso del tema de patrones, no hay diferencias significativas en los resultados obtenidos en estas pruebas por los estudiantes que usaron sólo calculadora o sólo material concreto.
- En el análisis basado en el puntaje total de la prueba de aritmética se obtuvo que los estudiantes del grupo control presentaron un rendimiento significativamente menor que los estudiantes de los otros tres grupos (sólo calculadora, calculadora y material concreto y sólo material concreto).
- En relación con la actitud hacia la matemática, no hay diferencias significativas en los resultados presentados por los estudiantes que participaron en los diferentes tratamientos.

La investigación mencionada es una de las pioneras en esta temática en Costa Rica, y revela ciertas ventajas o efectos positivos obtenidos al utilizar calculadoras en la enseñanza primaria, principalmente si su uso se combina con el de otros materiales concretos.

El uso de Calculadoras

En el primer ciclo lectivo de 1993, la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica puso en marcha un proyecto piloto para la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral I y del Álgebra Lineal, utilizando la calculadora Hewlett Packard (HP 48), con el objetivo de mejorar la calidad de la docencia y la formación matemática de los estudiantes (De Faria 1993). Fueron seleccionados cuatro grupos de Cálculo Diferencial e Integral I y dos grupos de Álgebra Lineal. El texto y los exámenes parciales fueron los mismos para los grupos de prueba y para los grupos control, y no se permitía utilizar la calculadora en dichas pruebas. La medición del efecto de la calculadora en los grupos de prueba fue realizada mediante actividades organizadas por los profesores, como exámenes cortos, tareas y proyectos. Los resultados obtenidos en los exámenes parciales no revelaron diferencias significativas entre los grupos de prueba y los de control, pero en los grupos de prueba pudimos utilizar la calculadora para explorar, experimentar, conjeturar y resolver problemas más complejos. Consideramos que este primer intento fue bastante tímido y que no produjo resultados satisfactorios debido a la forma en que fue concebido y conducido. Estamos convencidos de que sin un cambio curricular, metodológico y en la forma de evaluar, no podemos esperar cambios en las actitudes, aprendizajes y promociones de los estudiantes. Pero la experiencia fue importante pues posibilitó apreciar que la presencia de una nueva herramienta abría espacios para la creación de nuevas situaciones de aprendizaje como la exploración, búsqueda de patrones y resolución de problemas más complejos.

Un proyecto bastante ambicioso denominado "Innovaciones Tecnológicas en la Educación Matemática en Costa Rica: Laboratorios con calculadoras graficadoras TI92 y CBL", (PITEM), asociado al Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas de la Universidad de Costa Rica, inició el primer semestre de 1998. En este proyecto estuvieron involucradas las cuatro universidades estatales de Costa Rica y 5 (de los 6 existentes en la época) colegios científicos costarricenses. El Colegio Científico Costarricense de San Ramón no fue incluido en el proyecto debido a que ya estaba llevando a cabo un proyecto piloto con las calculadoras HP 48. La meta del proyecto era la de determinar metodologías apropiadas para la incorporación de las calculadoras graficadoras y los aparatos de recolección de datos (CBL) en lecciones de matemáticas y sus objetivos eran: explorar y experimentar con ideas matemáticas tales como patrones, propiedades numéricas, algebraicas y funciones; desarrollar y reforzar habilidades tales como cálculos, gráficas, y análisis de datos; enfatizar el proceso de resolución de problemas con datos reales, en lugar de concentrarse en los cálculos asociados con los problemas; acceder a ideas matemáticas y experiencias que van más allá de los niveles limitados por los cálculos tradicionales con papel y lápiz, permitiendo elevar el nivel de abstracción y generalización.

En el Colegio Científico Costarricense localizado en la sede del Instituto Tecnológico de Costa Rica en San Carlos, al inicio del curso lectivo se les explicó a los estudiantes que se estaba en un proceso de investigación, en el que se aplicarían diferentes metodologías y que ellos serían los que seleccionarían aquellas que consideraran las más pertinentes, tomando en cuenta la motivación, responsabilidad, retos y posibilidades para un aprendizaje más eficiente. Estas variables que pasaron a formar parte del contrato didáctico (Brousseau, 1993) se medían por el grado de participación de los estudiantes, por entrevistas o por consulta directa grupal. Las actividades de la clase eran minuciosamente planeadas, tomándose en consideración los conocimientos previos de los estudiantes, parte esencial para un aprendizaje significativo (Ausubel, Novak & Hanesian 1993) y durante su ejecución se tomaba nota de aspectos relevantes tales como actitudes de los estudiantes, grado de participación, preguntas, conclusiones a las que los estudiantes llegaban y trabajo en proyectos. Las respuestas dadas por los y las estudiantes nos han motivado a seguir con el proyecto y a buscar nuevas opciones para su implementación. Abajo transcribimos algunas de las respuestas dadas por los estudiantes entrevistados del Colegio Científico Costarricense de San Carlos, respecto a la metodología utilizada, a la evaluación y al uso de calculadoras graficadoras.

Respecto a la metodología:

> "Anteriormente a este curso lectivo, resolvía los ejercicios de manera rutinaria y ahora analizo. Al inicio la metodología me costó porque tenía que estar concentrado porque sino me perdía y antes no necesitaba poner atención, con solo copiar un ejemplo, en la casa podía hacer el resto, porque las cosas eran más simples, y si aquí uno se concentra y pone atención, lo encuentra más fácil de cuando estaba en el otro colegio. El sistema de proyectos es mejor que ver a un profesor trabajando. El tipo de ejercicios es motivante porque hay que matarse tratando de encontrar la respuesta. Uno nota más avance con algo que le costó hacer y lo entendió cuando lo terminó. A veces hasta resulta interesante equivocarse con las cosas, porque aprende de eso. Los ejercicios fáciles son aburridos y da pereza hacerlos."

> "Antes uno se sentaba a esperar que el profesor le explicara y luego llegar a la casa a resolver los ejercicios. Ahora a uno le toca enfrentarse a los ejercicios y poder aclarar dudas. El trabajo en clase es más aplicar la lógica. El trabajo en proyectos me parece una de las mejores, con plazo asignado y opciones para aclarar dudas."

Respecto a la evaluación:

> "Al inicio uno se siente muy inseguro al insistir el profesor en que no nos preocupemos por notas de examen o pruebas cortas, que primero pensemos en aprender. Yo no entendía a que se refería con que iba a evaluar el proceso, pues entendía pero no podía comprenderlo, pero ahora ya sé a que se refería y me da más confianza."

> "Me costó acostumbrarme a no pensar ¿y el examen? Antes estudiaba para el examen, ahora tengo que estudiar siempre sino uno no puede resolver los ejercicios y en el trabajo en grupo uno está perdido o se nota que uno no estudió, usted se da cuenta rapidito quien no estudia por las preguntas que le hacen."

Respecto al uso de las calculadoras:

> "El uso de tecnología le permite a uno comprobar lo realizado. En los ejercicios hechos del proyecto # 1, las calculadoras permiten darse casos. Me gustó mucho usar calculadora al hacer los ejercicios ya que también permitía saber el porqué y casi no se ha olvidado. Siento que si aprendí algo, antes no. Llegaba a matemática aburrido. Ya no es aburrido."

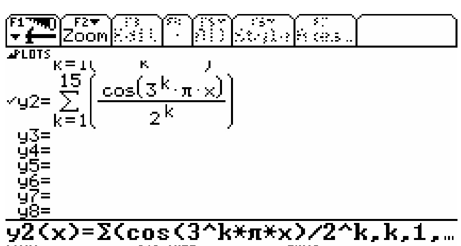
> "Las calculadoras son bastante útiles, ya yo no sé cómo hacen otros para ver estos gráficos."

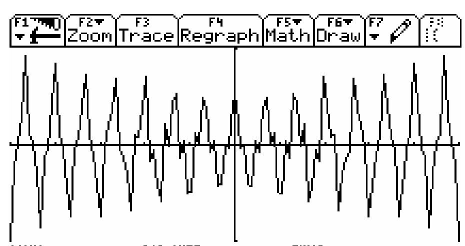
Otra experiencia bastante valiosa se llevó a cabo en la Universidad de Costa Rica. Utilizamos la calculadora graficadora para corregir errores conceptuales y superar obstáculos epistemológicos de estudiantes del curso de Matemática 3 para computación cuya sigla es MA0329. Este es el tercer curso de matemática que llevan los estudiantes de la carrera de computación de la Universidad de Costa Rica y entre sus contenidos están los temas: sucesiones, series, polinomios de Taylor, derivadas parciales e integración múltiple. La metodología utilizada en esta investigación en el aula consistió en: detectar de errores conceptuales u obstáculos epistemológicos en los estudiantes (Brousseau, 1983), mediante la técnica de preguntas y de instrumentos de evaluación diseñados por el docente (De Faria 2002); elaborar de guías didácticas que posibilitaran el uso de distintos registros de representación (Duval, 1992), con miras a superar los obstáculos detectados y corregir los errores conceptuales. Se trabajaba individualmente en cada guía y posteriormente en grupos. En este punto es muy importante el uso de la calculadora graficadora, por su potencial para utilizar distintos registros de representación y por permitir articulaciones de un registro a otro (Kutzler, 1999, Cordero & Solís, 1995, Moreno, 1999, Tall, 1996, De Faria, 2000). Las calculadoras graficadoras permiten que los estudiantes utilicen otros sistemas de representaciones para explorar la validez o la falsedad de argumentaciones, funcionando como andamiaje en algunos de los pasos utilizados en la resolución de una situación problemática; discutir con todo el grupo sobre las experiencias adquiridas.

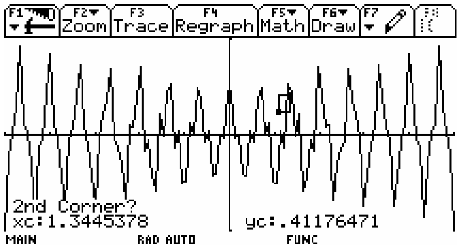
Además, utilizamos las calculadoras como soporte para conjeturar y argumentar sobre la veracidad de las conjeturas planteadas y para analizar el comportamiento de ciertas funciones extrañas y de sucesiones que duplican el periodo hasta producir caos. Por ejemplo para la función definida mediante la serie trigonométrica por Weierstrass en la Academia de Berlín en 1872.

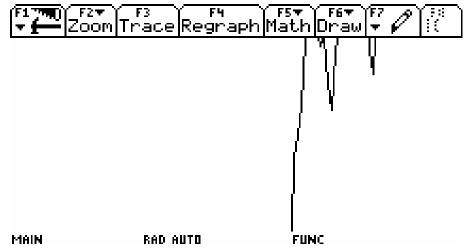
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),\ a \text{ entero impar, } b \in \left]0,1\right[,\ ab \text{ mayor que } 1+3\pi/2$$

podemos graficar algunos sumas parciales y hacer acercamientos en vecindarios de puntos de su gráfica para observar que las ampliaciones correspondientes no se parecen a un trozo de recta. Esto nos lleva a conjeturar lo que afirmó Weierstrass: la función dada es continua pero no derivable.

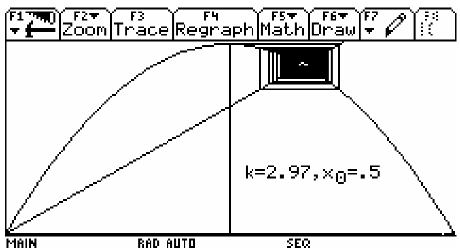


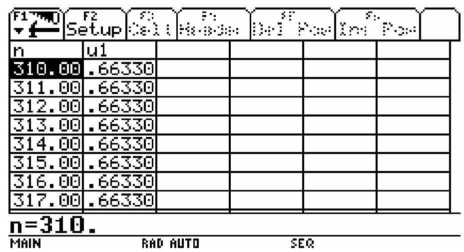




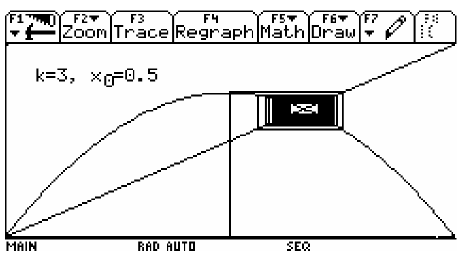


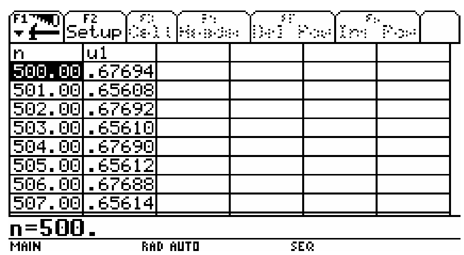
También logramos analizar temas que sin la ayuda de recursos computacionales digitales sería bastante difícil de tratar en este nivel como, por ejemplo, el comportamiento de sucesiones caótico de ciertas sucesiones numéricas mediante el uso de tablas y gráficas para detectar las duplicaciones de periodo y de gráficas para visualizar dichas duplicaciones, hasta la producción del caos. Para la sucesión logística $x_{n+1} = k\,x_n(1-x_n)$, x_0 dado. Las figuras que siguen ilustran las duplicaciones de periodo de la solución hasta obtener el caos, en los dos registros de representación mencionados. Para otros ejemplos de sucesiones numéricas con el apoyo tecnológico consultar Cantoral & Reséndiz (1995).



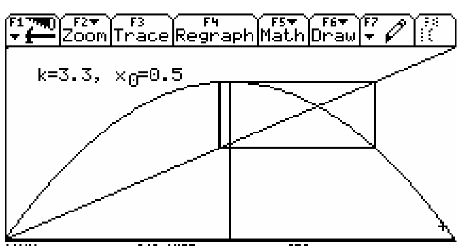


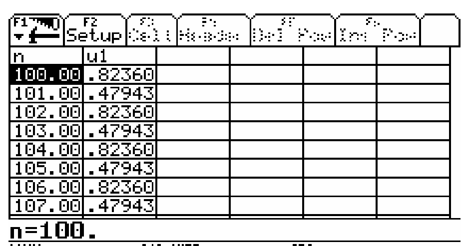
Convergencia



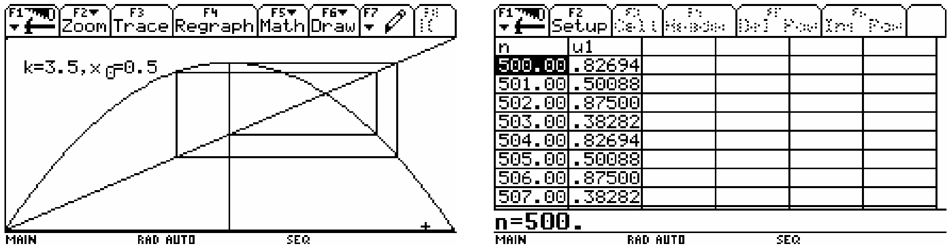


Oscilación alrededor de un punto fijo

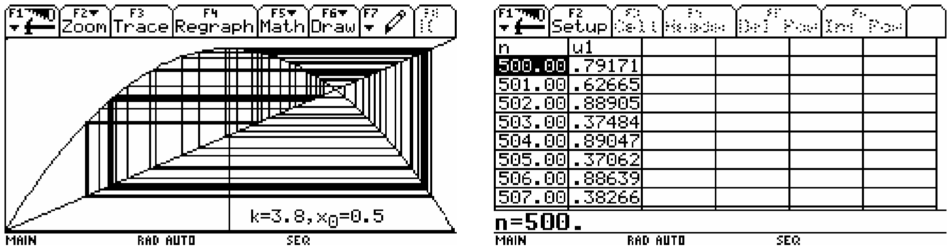




Periodo 2



Periodo 4



Caos

Los resultados obtenidos en el proyecto hasta ahora son bastante alentadores, de acuerdo a las respuestas dadas por los y las estudiantes entrevistados (De Faria y Castro 2002)**.** Entre otras cosas, hemos visto cómo hemos podido contextualizar la matemática mediante el uso de instrumentos que posibilitan la toma de datos reales en el salón de clases, en ríos, bosques y otros ambientes naturales. Por otro lado, el uso de los distintos registros de representaciones semióticas nos permitió hacer conversiones y tratamiento en y entre tales registros, para distintos objetos matemáticos, como por ejemplo las funciones. Creemos que hemos logrado conectar las matemáticas con la física, química, biología y agronomía entre otras disciplinas. El uso de las calculadoras graficadoras con los instrumentos de mediciones y tomas de datos ampliaron los horizontes para un aprendizaje significativo.

Referencias Bibliográficas

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1993). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* México: Editorial Trillas.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistèmologiques et les problemes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 4*(2), 165 – 198.

Brousseau, G. (1993). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática* (traducción: Fregona, D.) En Dotti I., Vargas J. (Eds.). Argentina: Universidad Nacional de Córdoba.

Cordero, F. y Solís, M. (1995). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

De Faria, E. (2000). La tecnología como herramienta de apoyo a la generación de conocimiento. *Revista Innovaciones Educativas 7*(12).

De Faria, E. (1993). *Cálculo diferencial e integral con apoyo de la calculadora HP 48.* Memorias de la Séptima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Panamá.

De Faria, E. (2002). *Calculadoras graficadoras: Herramientas útiles en la corrección de errores algebraicos*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 15, Tomo 2, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

De Faria, E. y Castro, A. (2002). *La investigación sobre el uso de la calculadora en la enseñanza y aprendizaje de la matemática*. Memorias en CD VIII Encuentro Nacional de Investigadores en Educación. Costa Rica: Universidad Estatal a Distancia.

Duval, R. (1992). *Registres de representation sémiotique et fonctionnement cognitive de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. IREM Strasbourg.

Kutzler, B. (1999). *The algebraic calculator as a pedagogical tool for teaching mathematics*. [En línea] Disponible en : http://b.kutzler.com/article/art_paed/ped-tool.html

Moreno, L. y Lupiáñez, J. (2002). *Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas*. Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el aula de Matemáticas. Serie memorias. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Peralta T., Berty R., Buján V. y Jiménez M. (1991). *El uso de la calculadora en la transición del pensamiento concreto al pensamiento semi-concreto y simbólico en la matemática de segundo y cuarto años de la Educación General Básica. Costa Rica*. Informe Final de Investigación, IMEC, U.C.R.

Tall, D. y Vinner, S. (1983). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12*.

Uso de Hojas Electrónicas en la Enseñanza de la Distribución Normal

Enrique Hugues
Universidad de Sonora
México
ehugues@gauss.mat.uson.mx
Probabilidad, Estadística y Combinatoria – Nivel Superior

Resumen

El reconocimiento social de la importancia de la Estadística, la expectativa de que la educación en Estadística básica trascienda el plano operativo y la postura de que el uso de la tecnología constituye un apoyo potencial para su alcance, orientan una propuesta de enseñanza de la distribución normal en un ambiente proporcionado por hojas electrónicas. Para arribar a ella hemos realizado una revisión documental del tópico desde diferentes perspectivas y adoptado algunos tipos de problemas como situaciones cuya solución incorpora las prácticas que caracterizan a la distribución normal como objeto matemático de enseñanza. Mostramos algunas actividades desarrolladas en torno a los tipos de problemas identificados y la experiencia tenida con ellas en nuestra practica docente.

Introducción

El reconocimiento social a la importancia de la Estadística, lo constatan su creciente presencia en comunicaciones de índole periodística, en el mercado laboral y en el ambiente cultural. En el caso de este último, se ha generado la expectativa de que la educación Estadística trascienda al plano operativo orientándose a uno de naturaleza instrumental basado en comprensiones de las ideas básicas y en habilidades que permitan al individuo tanto el tratamiento de la información como su eficiente interpretación y con esto poder llevar a cabo razonamientos estadísticos básicos.

En esta dirección, se considera que el uso de tecnología es muy prometedor como medio complementario para alcanzar tal expectativa, al brindar un ambiente de exploración abierto a la actividad del usuario y a la construcción de concepciones personales, vía sus bondades operativas y de interjuego entre diversas representaciones.

Consideraciones como estas nos han llevado a plantearnos el objetivo de estructurar una propuesta de enseñanza para la distribución normal apoyada en un ambiente proporcionado por hojas electrónicas que, dirigida a estudiantes universitarios de ingeniería, persiga generar en el individuo una comprensión de este objeto matemático.

Marco Referencial

Desde la perspectiva de la enseñanza y del aprendizaje hemos emprendido una revisión sobre un tópico de interés: la distribución normal. Esta distribución interesa especialmente por constituir el modelo más importante en la Estadística y sus aplicaciones, de hecho constituye el principal referente en el trabajo estadístico, aunque no resulte ser ni el más sencillo ni el mejor comprendido.

Alrededor de esta distribución observamos que presenta una dificultad ineludible en su introducción al ámbito escolar: si bien se cuenta con una expresión analítica para su densidad no se tiene algo semejante para su distribución, y la deducción formal de buena parte de sus características y propiedades queda fuera del alcance de la madurez matemática de gran parte de los estudiantes, por las herramientas y tipo de razonamientos que ello implica.

Aunado a esto, es un hecho que las prácticas educativas vigentes sobrevaloran la adquisición de destrezas operatorias en los estudiantes y tienen como consecuencia el que los estudiantes sean incapaces de enfrentar situaciones problemas distintas a las más básicas manejadas en libros de textos pero que resultan sustanciales en su formación. Ejemplos de estas situaciones serían: las que requieren determinar el valor de un parámetro de la distribución teniendo información restringida, situaciones en que se involucra más de una variable aleatoria (sea su suma o su promedio), aquellas en que se usa como modelo aproximativo de otras distribuciones, cuando se trata de analizar el ajuste como modelo a datos provenientes de una situación práctica o aquellas que requieren de una interpretación contextual o explicación que vaya más allá de los simples cálculos.

Paralelamente, de la revisión al programa de estudio para el curso de Probabilidad y Estadística ofrecido en la carrera de Ingeniería Industrial de nuestra Universidad, si bien encontramos a la distribución normal como punto temático sin mayor descripción que su sola mención y sin orientaciones específicas para su tratamiento, algunas deducciones alrededor de esto pueden ser alcanzadas[1]. Una de esas deducciones es que el introducir la distribución normal plantea la necesidad de contar con situaciones problemáticas que intuitivamente den lugar a la distribución y a algunos de los resultados relacionados con ella. De hecho, didácticamente resultan pertinentes situaciones problemáticas que además involucren elementos de caracterización de la distribución y usos que a la postre le son dados como modelo: supuesto, aproximativo de otro modelo o aproximativo de la distribución de alguna función de variables aleatorias, vía el teorema del límite central.

En la tarea de buscar situaciones problemáticas que respondan a lo señalado, hemos tratado de tomar como una de nuestras fuentes a la literatura en educación matemática acerca de la distribución normal[2]. En este último sentido, el trabajo doctoral desarrollado por L. Tauber (2001) y publicaciones relacionadas en colaboración con algunos de sus colegas (Batanero, Tauber y Sánchez; 2001), que nos parecen sumamente trascendentes para las cuestiones de nuestro interés, han tomado cuatro situaciones problemáticas fundamentales.

Dichas situaciones de algún modo las hemos considerado (Hugues, 1997) y resultan congruentes con nuestra visión de otras fuentes: la emergencia de la distribución normal y los libros de texto utilizados en nuestro ámbito escolar. Así, considerando lo anterior, tomamos

[1] Debe hacerse notar que la mayoría de los estudiantes que ingresan a la Universidad de Sonora no abordaron contenidos propios de estas disciplinas en el nivel educativo previo.

[2] Literatura algo escasa y más aún si buscamos propuestas de tratamiento que consideren tanto el uso de tecnología como las dificultades que presentan los estudiantes universitarios para la comprensión de la distribución normal.

como los tipos de problemas para nuestro tratamiento de la distribución normal los siguientes: Ajuste de una distribución normal a un conjunto de datos; La aproximación de probabilidades binomiales mediante normales; El cálculo de probabilidades y puntajes asociados con una distribución normal; y, La aproximación de probabilidades de una distribución de medias muestrales mediante normales.

El análisis de los abordajes a problemas específicos de los cuatro tipos anteriores, desde nuestro punto de vista, muestra algunas características de la distribución normal que inicialmente la configuran como objeto matemático a ser enseñado y aprendido, entre las que resaltamos: a la simetría respecto a la media, a la asintoticidad, el apuntalamiento y la unimodalidad; como elementos específicos y de suma trascendencia para una tratamiento didáctico favorable de la distribución normal.

Metodología

El objetivo fundamental de nuestro trabajo fue estructurar una propuesta de enseñanza para la distribución normal que respondiese a una serie de consideraciones previas. Estas se confirman y/o profundizan en una revisión del tópico desde las perspectivas: disciplinar, curricular y de las investigaciones en didáctica; dando lugar a una caracterización de la distribución normal como objeto matemático a ser enseñado y aprendido.

Esta revisión también se utiliza en la clarificación de elementos que se integran en la propuesta, digamos la adopción de problemas como parte de la estrategia didáctica o la selección de situaciones y de la tecnología que se incorporan, en este último caso el apoyo de una hoja electrónica que ha proliferado bastante: *Excel* de Microsoft.

Elaborada la propuesta, se implementa en el salón de clase como un complemento a la educación apoyada en los medios tradicionales y se realiza la observación cuidadosa de las reacciones de los estudiantes por parte del profesor. El grupo en que se instrumenta es de estudiantes de un curso de Probabilidad y Estadística que regularmente se imparte en el tercer semestre de la carrera de Ingeniería Industrial en nuestra Universidad.

Actividades Propuestas

La propuesta de tratamiento de la distribución normal se estructura en actividades de aprendizaje. La elección de las situaciones que dan lugar a las actividades con que trabajamos responde primeramente a los tipos de problemas identificados y a consideraciones adicionales que hemos hecho. A manera de ejemplo y muy sucintamente, algunas actividades se presentan a continuación.

Actividad 1. Comportamiento de la distribución binomial para diferentes valores de los parámetros.
En las figuras 1 y 2 se muestra dos de las hojas elaboradas por el profesor, mediante las cuales se intenta resumir una serie de ideas identificadas por los estudiantes a través de la elaboración de casos particulares de distribuciones binomiales. Inicialmente se le solicita al estudiante

prepare hojas donde se trabajen distribuciones binomiales para valores fijos del parámetro *n* y que automáticamente actualicen cambios en el parámetro *p*. También se cuestiona la forma que siguen las diferentes distribuciones binomiales y los casos en que éstas son aproximadamente simétricas.

En un momento posterior se cuestiona sobre un modelo que aproxima distribuciones binomiales. En los casos en que se tiene una simetría aproximada se espera que se recurra a una distribución normal y a su estándarización[3], pero también a que se concluya cómo se argumenta, cómo quedaría determinada por completo tal distribución y cómo se utilizaría en la aproximación de probabilidades binomiales requeridas.

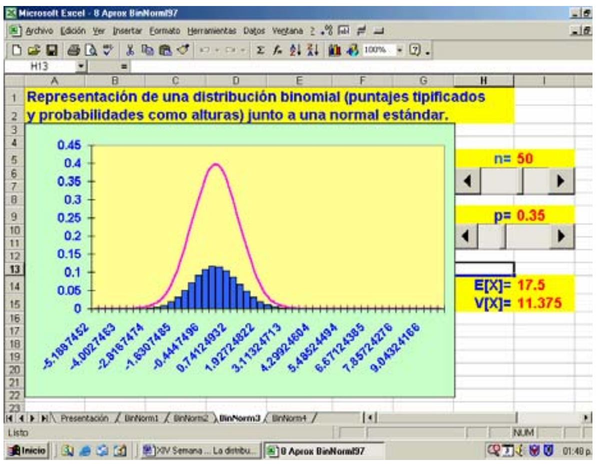


Figura 1

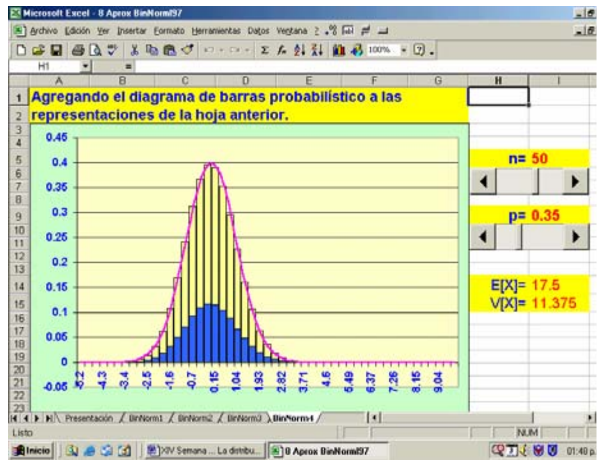


Figura 2

Actividad 2. Abordar gráficamente el estudio de la distribución normal para diferentes valores de los parámetros.

Esta actividad presupone que la distribución normal y sus caracterizaciones han sido presentadas, y pretende proporcionar un ambiente sencillo en que se visualice parte de esto, vía la comparación entre una distribución normal estándar (que queda fija) y otras distribuciones normales (que pueden ser modificadas sencillamente a través de los botones de entrada). Para ello el profesor proporciona hojas electrónicas en que ha preparado esto (figuras 3 y 4).

3 Razón por la cual aparece, como referencia, insertada en las figuras 1 y 2 la gráfica de una normal estándar.

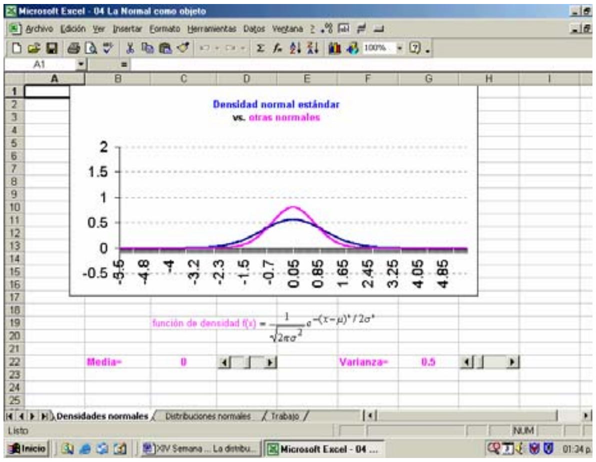


Figura 3

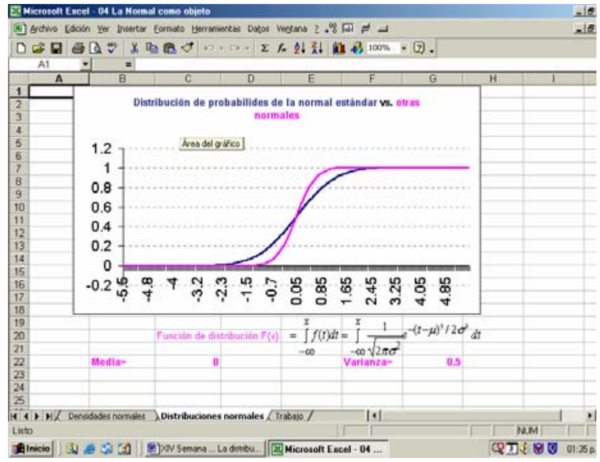


Figura 4

Al estudiante se le cuestiona acerca de los efectos relativos que tienen, sobre la función de densidad o de distribución modificable, cambios en los valores de los parámetros μ y σ. Recíprocamente sobre lo que ha de ocurrir con los parámetros para que la distribución modificable resulte más a la izquierda (derecha) o más delgada (ancha) que la de referencia.

Actividad 3. Trabajo en tablas de la distribución normal: el cálculo de probabilidades y puntajes asociados a una distribución normal.
En este caso la actividad presupone que ha habido un acercamiento en papel a tablas de la distribución normal estándar así como a su uso en el cálculo de probabilidades y puntajes asociados a una variable aleatoria normal (tanto en el caso estándar y como en otros).

Se propone al estudiante construir en hojas electrónicas tablas para la determinación de áreas bajo la función de densidad de una normal y para la inversa de la distribución, primero en el caso de una estándar y luego generalizada a otras normales que al modificar parámetros (figuras 5 y 6) arroje con ello nuevas tablas, cuestionándoseles posteriormente sobre las relaciones entre tablas obtenidas y propiedades que se espera hayan sido configuradas, como la preservación de áreas bajo la transformación de estandarizar.

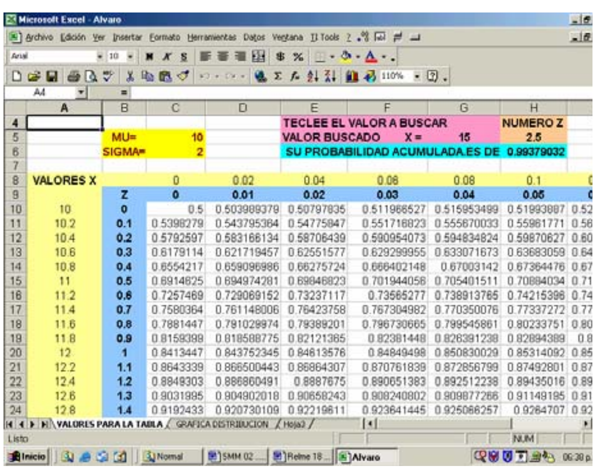


Figura 5

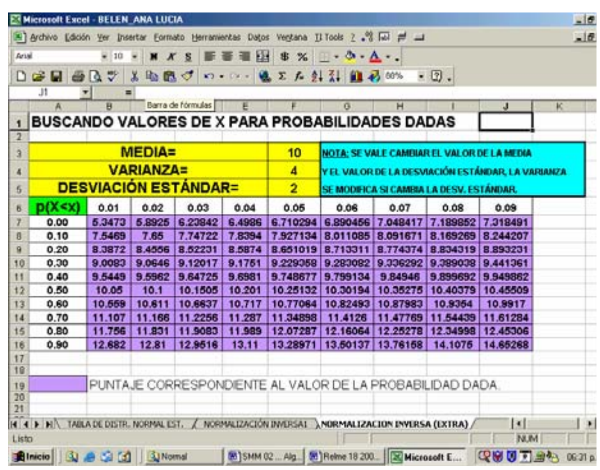


Figura 6

Resultados

Nuestra propuesta de tratamiento de la distribución normal fue implementada en un grupo de veinticinco estudiantes tomando un curso de Probabilidad y Estadística con apoyo de una hoja electrónica, de tal modo que los estudiantes habían sido iniciados en esta ruta[4].

Los estudiantes involucrados, aunque en principio no mostraron familiaridad alguna con la hoja electrónica elegida, tampoco presentaron mayores dificultades para realizar las actividades propuestas que requirieron el apoyo de ese medio, como esperábamos, y en breve tiempo fueron capaces de realizar en computadora lo que el profesor les fue planteando. En general podemos señalar que lo pretendido por medio de las actividades en gran medida fue alcanzado.

En su trabajo en computadora, los estudiantes dieron muestras de poder identificar: el papel de los parámetros de una normal en la forma de su distribución; los parámetros pertinentes en la distribución normal para aproximar una binomial; la relación entre puntajes y probabilidades; y, por supuesto, propiedades en una normal como la simetría.

Así mismo, en su trabajo a lápiz y papel, observamos que los estudiantes fueron capaces de utilizar diferentes tablas de la distribución normal (probabilidades acumuladas desde menos infinito o bien desde cero), fueron capaces de bosquejar en dibujos las diferencias entre dos distribuciones normales debidas a alguna diferencia en los parámetros o a plantear adecuadamente la estandarización necesaria para el cálculo de una probabilidad asociada a una binomial o a media muestral.

Adicionalmente es de notarse que la faceta computacional de la propuesta resultó bastante atractiva para los estudiantes y que llegaron a incorporar en sus reportes detalles no solicitados por el profesor, por ejemplo:

- En las primeras filas de la figura 5, se presentan celdas que permiten obtener la estandarización de un puntaje y la probabilidad acumulada hasta él, lo que no incluye una tabla común.
- Al revisar la figura 6 se puede observar que es una tabla de doble entrada, lo que constituye una aportación de los estudiantes pues les fue solicitado una tabla más sencilla con sólo una columna de probabilidades.

Conclusiones

Por supuesto que también observamos inconvenientes que empiezan por el deseo (no cumplido) de los mismos estudiantes a contar más ampliamente con equipos de cómputo, tanto para actividades de clase planteadas en el ambiente de lápiz y papel como para la realización de exámenes. O la falta de tratamiento en las actividades, en computadora, sobre la corrección por continuidad en la aproximación de una probabilidad binomial, que parece haberles representado dificultades a los estudiantes.

---

[4] En una sesión introductoria fueron expuestos a los rudimentos de la hoja electrónica y la restante información técnica sobre su funcionamiento fue proporcionada gradualmente conforme fue siendo necesario.

No pretendemos contar con una larga lista de bondades encontradas tras nuestra propuesta. Sin embargo, señalaríamos que nos parece muy importante renovar actividades que enfatizan lo operativo por encima de lo conceptual y vemos que el uso de las hojas electrónicas tiene un posible lugar en eso. De hecho descargar el énfasis operativo en un medio tecnológico como ese, significa una ganancia de tiempo que puede ser invertida en mejorar intuiciones y comprensiones, en complementar los alcances de los medios educativos tradicionales, así como en reafirmar y concretizar algunos de los aspectos que difícilmente se puede alcanzar con estos últimos medios.

Referencias Bibliográficas

Batanero, C., Tauber, L. y Sánchez, V. (2001). Significado y comprensión de la distribución normal en un curso introductorio de análisis de datos. *Quadrante*, 10(1), 59-91.

Hugues, E. (1997). *Comprensión de la distribución normal y conceptos implicados en ello: Una propuesta didáctica*. Proyecto de investigación para acceder al programa de doctorado, Cinvestav, México.

Tauber, L. (2001). *La Construcción de la Distribución Normal a partir de Actividades de Análisis de Datos*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, España.

La Construcción de la Prueba Geométrica en un Ambiente de Geometría Dinámica en Secundaria

Víctor Larios
Universidad Autónoma de Querétaro
México
vil@uaq.mx
Pensamiento Geométrico − Nivel Medio

Resumen
Durante el último año se ha llevado a cabo una investigación dirigida a estudiar la construcción de la demostración geométrica dentro de un ambiente de Geometría Dinámica por alumnos de secundaria en México y con actividades relacionadas con triángulos y cuadriláteros. Para el diseño de esta investigación ha sido considerada la noción de *unidad cognitiva de teoremas* (Boero et al., 1996) a fin de que el orden y relación de las actividades reflejen un desarrollo cognitivo que apunte hacia la propuesta de justificaciones deductivas. Se informa sobre los avances de la investigación y se comentan algunas observaciones sobre las conductas de los alumnos relacionadas con la *rigidez geométrica*, la necesidad de armonizar los componentes *figurales* y *conceptuales* de las construcciones geométricas y la preponderancia del uso de justificaciones encaminadas a las explicaciones.

Introducción

Por la importancia epistemológica que la demostración matemática tiene para la Matemática y por la necesidad de mostrar a los estudiantes que ésta es una disciplina científica viva y en evolución, la demostración se ha convertido en un objeto de enseñanza de los cursos de Matemática de los niveles medio y superior. Sin embargo, su aprendizaje en estos niveles tiene diversas dificultades relacionadas con aspectos tan distintos como la concepción misma que se tiene de ella, su relación con otros tipos de discursos como es la argumentación, y la dificultad de los alumnos en manejar armónicamente los aspectos figurales y conceptuales de los objetos geométricos. Bajo esta tónica, se ha planteado un proyecto para estudiar los argumentos que se generan en el desarrollo de justificaciones geométricas en el nivel medio básico en una escuela secundaria en México en un ambiente de Geometría Dinámica, bajo una serie de consideraciones teóricas que nos han parecido interesantes y pertinentes para el trabajo.[1] La demostración, la prueba y concepciones de dos instituciones diferentes.

Lo que es una demostración es entendida comúnmente en Educación Matemática, por muchos de los miembros de los integrantes de esta comunidad, de una manera similar (o incluso igual) que como se entiende en la comunidad matemática. Esta concepción hace parecer a su aprendizaje como una meta lejana y quizá inalcanzable en el nivel medio. Sin embargo, es necesario comenzar por determinar qué significa este objeto y cuál podría ser su papel en la Educación Matemática y no en la Matemática misma. Nicolas Balacheff (1987, 148) incluye a la demostración matemática como un tipo particular de prueba que es aceptada en una comunidad específica: la matemática. Además, considera que una prueba es a su vez una explicación, por lo que una demostración matemática es una explicación que valida un hecho y que ha sido aceptada por la comunidad matemática. Desde este punto de vista la demostración se convierte en un objeto cuyo aprendizaje resulta difícil de alcanzar en la escuela del nivel medio, pues debe ser un discurso que tiene características muy particulares.

[1] Al respecto, quisiera agradecer a la Profra. Noraísa González, por su ayuda para la aplicación del experimento, y a la Dra. Claudia Acuña por sus valiosos comentarios.

Por otro lado, Godino, Batanero y Recio (Godino y Batanero, 1994; Godino y Recio, 2001) identifican diferentes instituciones en la que existe la demostración, es decir, diferentes comunidades que tienen como interés resolver un campo de problemas en común, y de éstas tres son las que nos interesan en este trabajo: la institución de la matemática pura, la institución de la matemática profesional y la institución de los educadores matemáticos. El significado de la demostración en cada una de estas instituciones es diferente, pues depende de sus prácticas particulares, de tal suerte que el significado que se le atribuye entre los matemáticos son parecidos, pero existen diferencias muy significativas con la de la matemática escolar debido a que ésta emerge de un conjunto de acciones de una comunidad escolar muy diferente a la matemática. Así que en esta institución escolar proponemos que el significado de la demostración está ligado a las prácticas argumentativas en las cuales se busca el convencimiento propio y de otros individuos de que un hecho matemático en particular ocurre. Consideraciones sobre las actividades

La parte experimental del proyecto consta de ocho actividades con triángulos y cuadriláteros, las cuales fueron diseñadas considerando la denominada *Unidad Cognitiva de Teoremas* (Boero et al., 1996), que se refiere a la existencia de una continuidad en el proceso de pasar de la producción de una conjetura a la construcción de la demostración que la valide. Este proceso se apoya en una situación que le permite al alumno generar la conjetura (por medio de una exploración), discutirla, sistematizarla, realizar nuevas exploraciones para producir finalmente la demostración. Además, el proceso no sólo permite proporcionar un enunciado de un hecho matemático, sino también provee de argumentos que pueden ser utilizados en la demostración. Este razonamiento de tipo argumentativo permite a los alumnos la exploración consciente de alternativas y el acercamiento progresivo al establecimiento de enunciados, así como la justificación de la plausibilidad de las conjeturas producidas.

Por otra parte, se tomó en cuenta el software para Geometría Dinámica (SGD) *Cabri-géomètre* por su potencialidad en el planteamiento de situaciones que involucren exploraciones dinámicas en el campo de la Geometría, pues las construcciones geométricas en la pantalla son un producto de operaciones concretas cuya corrección está controlada por una evaluación empírica, y aunque el control teórico no es logrado necesariamente de manera espontánea (Larios, 2003), puede resultar de actividades llevadas a cabo por los alumnos, lo cual es logrado en parte con la actividad controlada del *arrastre*.
De esta manera, de las ocho actividades cuatro están relacionadas con triángulos y las otras cuatro con cuadriláteros. En todas ellas se trabajaron con los *triángulos de los puntos medios* y los *cuadriláteros de los puntos medios* a partir de triángulos y cuadriláteros cualesquiera, respectivamente, y están vinculadas entre sí de tal manera que algunas sirvan de antecedente lógico a otras. Las actividades de los triángulos fueron:

- *T1*. Construcción de un triángulo y de su *triángulo de sus puntos medios*,[2] así como la observación de las relaciones de paralelismo entre los lados de ambos triángulos.
- *T2*. Construcción de un triángulo y de su *triángulo de sus puntos medios* a partir de las propiedades de paralelismo entre los lados de ambos.

[2] El *triángulo de los puntos medios* de un triángulo dado es el que se forma al considerar como vértices los puntos medios de los lados del triángulo original. En general, el *polígono de los puntos medios* de otro polígono se construye de manera semejante.

T3. Planteamiento de un procedimiento justificado para construir, a partir de un *triángulo de los puntos medios*, el triángulo original.

T4. Aplicación del procedimiento planteado en la actividad anterior, así como la verificación del mismo y su justificación.

Las actividades de los cuadriláteros fueron:

C1. Construcción de un cuadrilátero y de su *cuadrilátero de los puntos medios*, así como la observación de sus relaciones y de las propiedades de éste último como paralelogramo.

C2. Exploración del *cuadrilátero de los puntos medios* de un cuadrilátero relacionando aquél con las diagonales de éste para justificar la razón del paralelismo de los lados del aquél.

C3. Observación del caso de un cuadrilátero cóncavo y justificación de que se cumple la propiedad de paralelismo de los lados de su *cuadrilátero de los puntos medios*.

C4. Reconstrucción de un cuadrilátero a partir de su *cuadrilátero de los puntos medios*.

De esta manera se buscó en un primer momento que exploraran situaciones de paralelismo relacionadas con triángulos y cuadriláteros, a fin de que realizaran observaciones y las justificaran. Posteriormente tuvieron que realizar construcciones, y justificarlas, recuperando la información de las propiedades observadas durante las primeras construcciones.

Sobre los fenómenos observados

Rigidez geométrica

Uno de los fenómenos observados fue la denominada *rigidez geométrica* (Larios, 2003). Con este término me refiero a "que ciertos estudiantes no pueden manejar mentalmente una figura cuando no está en ciertas posiciones 'estándares' o no se pueden imaginar una figura cuando se mueve (bajo una traslación) o cuando cambia de forma (los lados cambian de posición o los ángulos son modificados, por ejemplo." En esta ocasión se notó una tendencia en usar figuras prototipo,[3] para las actividades de triángulos, triángulos casi isósceles (o casi equiláteros) y evitar los escálenos o los obtusángulos (Fig. 1), a pesar de que en varias ocasiones el investigador y la profesora deformaron las construcciones de algunos alumnos para evitar estos casos.

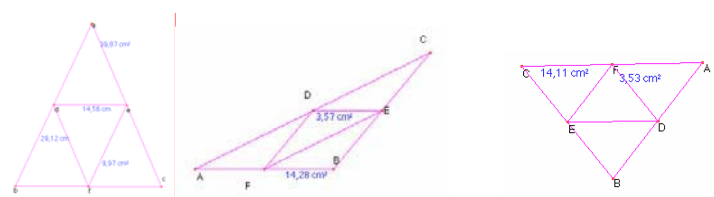


Fig. 1. Ejemplos de construcciones de triángulos realizadas por los alumnos.

Además se observó el fenómeno cognitivo que he denominado *arrastre inicio-fin*, que consiste en que los estudiantes consideraron sólo dos casos: la construcción que ha hecho antes de la operación de arrastre y la última obtenida cuando la operación de arrastre cesa; los momentos intermedios del movimiento no son percibidos como otros casos posibles de la construcción de la misma figura que es deformada, sino que son considerados como diagramas o esbozos intermedios que no tienen el mismo estatus de construcción geométrica que las construcciones

[3] Las figuras prototipo son aquellas que tienen una organización regular de contorno, de orientación o de forma. Estas figuras tienden a respetar el hecho de tener límites cerrados y a privilegiar la orientación (como la horizontal o la vertical) y la forma (como ser regular, simple y simétricas).

iniciales y finales, como si al estar en movimiento no estuviese representando un triángulo, sino sólo su deformación. El siguiente diálogo entre la profesora y un estudiante ilustra esta situación:

Profesor:	(Después de arrastrar un vértice varias veces) "¿Ves todos los diferentes triángulos que se forman?"
Alumno:	"Sólo dos triángulos se forman."

El comentario del estudiante se refirió al primer triángulo y al que quedó al final. Este tipo de comentarios fue acompañado con una actitud de indiferencia del alumno hacia los casos intermedios. Además, esta dificultad nos muestra que al parecer la aprehensión, por parte de los alumnos, de las capacidades dinámicas del software y de la evidencia dinámica del dibujo no es automática, sino que requiere de un desarrollo cognitivo.

Componentes figurales y conceptuales

Por otro lado, y sobre todo en las actividades donde se les pidió que justificaran sus construcciones o los procedimientos para realizarlas (*T3*, *T4* y *C4*), los alumnos comúnmente utilizaron hipótesis que no fueron las lógicamente "correctas", sino las que perceptualmente les parecían mejor. En otras palabras, las condiciones iniciales necesarias para llevar a cabo construcciones que permitía invertir los procedimientos de las actividades iniciales de cada bloque (y que de hecho eran resultado de dichas actividades), no fueron tomadas en cuenta de manera reiterada. Por ejemplo, J.G. y L.J. escribieron las siguientes respuestas en la actividad

T3:[4]

3c) ¿Cómo van a quedar los lados del triángulo grande con relación a los del triángulo chico?, ¿por qué? <u>Van a quedar paralelos porque son los mismos lados.</u>
3d) ¿La posición de los lados del triángulo grande puede ser cualquiera? <u>No porque tienen que estar paralelos con los del triángulo chico.</u>
3e) ¿Dónde van a quedar los vértices del triángulo grande? <u>Enfrente de un lado del triángulo chico.</u>

Todas ellas parecen respuestas correctas y consideran las propiedades de paralelismo entre los lados de los triángulos que se observaron en las actividades anteriores, sin embargo en la siguiente pregunta son desatendidas:

4. Escriban el procedimiento en el que pensaron para construir el triángulo grande: <u>En hacer 3 triángulos de la misma medida en cada lado del primer triángulo.</u>

De hecho su construcción (Fig. 2) sigue ésta última idea, y que evidentemente no tiene nada que ver con las respuestas anteriores.

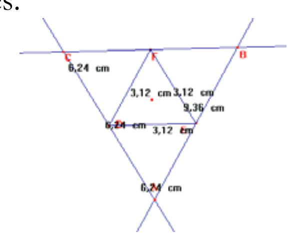


Fig. 2.

Otro ejemplo lo proporcionan los mismos alumnos, en la actividad *C2*, al pedírseles que opinen si las actividades de los cuadriláteros están relacionadas con las de los triángulos:

[4] Las respuestas aparecen como texto subrayado.

4d) ¿Lo último tiene alguna relación con lo que se hizo con los triángulo? Sí. *4e)* ¿Cuál sería esa relación? En que se hicieron triángulos.

Sin embargo no abundan más en la respuesta y las siguientes justificaciones no hacen ninguna referencia al trabajo realizado con los triángulos. Atribuimos este tipo de conducta a la disociación entre los componente figurales y conceptuales de los objetos que están en juego. Pareciera que los alumnos no establecen una relación conceptual o lógica entre los objetos (triángulos y cuadriláteros), pero tampoco entre los diversos momentos (actividades) realizadas. El componente figural tiene una gran relevancia para elegir las respuestas a las preguntas planteadas.

Justificaciones que explican

Ninguno de los alumnos se acercó a hacer una demostración, en el sentido de la institución matemática. En las actividades en las que se les pidió a los alumnos que justificaran algún suceso, observación o construcción se recurrió principalmente a verificaciones empíricas o bien a justificaciones que tienen como objetivo explicar. El razonamiento deductivo no estuvo totalmente ausente de las respuestas de los alumnos, pero las verificaciones empíricas y las explicaciones como justificación tuvieron una mayor presencia.

Comentarios finales

A lo largo del experimento se manifestaron conductas en los estudiantes que muestran que el manejo de los componentes figurales y conceptuales de los objetos geométricos utilizados no están en armonía, es decir, que la inclinación a considerar los aspectos figurales por encima de los conceptuales hace que no exista una fusión entre ambos que permita su manejo óptimo.
Además, la presencia de justificaciones argumentativas y la aparente falta de una necesidad "natural" por justificar utilizando deducciones en este nivel educativo podría parecer normal porque en términos del contrato didáctico sería necesario pedir la demostración de una manera explícita, sin embargo creo que ello lleva de manera irremediable a replantear el significado de la demostración en el contexto educativo, tanto el que se le atribuye por parte de los profesores como aquél que le atribuyen los alumnos.
No obstante, a pesar de que en la institución de los educadores matemáticos el significado de la demostración debe ser (y de hecho es) diferente al que se tiene en la institución matemática, aquél debe tener como referencia a éste último. A pesar de todas las funciones diferentes que tiene la demostración en educación matemática y que han sido reportadas en la literatura, desde mi punto de vista, en la demostración en la escuela debe aparecer una estructura de razonamiento que si bien no tiene que ser netamente argumentativa (o lógica), debe tener argumentos matemáticos cuya validez haya sido establecida unidos de una manera coherente.

Referencias Bibliográficas

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics 18*(2), 146-176.
Boero, P., Garuti, R., Lemut, E. y Mariotti, M.A. (1996). Challenging the traditional school

approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems. En A. Gutiérrez y L. Puig (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 113-120). Valencia, España.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics 24*, 139-162.

Godino, J.D. y Batanero B., C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques 14*(3), 325-355.

Godino, J.D. y Recio, A.M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias 19*(3), 405-414.

Larios, O., V. (2003). Geometrical rigidity: an obstacle in using dynamic geometry software in a geometry course. En M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1-2). Bellaria, Italia.

Mariotti, M.A. y Maracci, M. (1999). Conjeturing and proving in problem-solving situation. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 265-272). Haifa, Israel.

Enseñanza del Cálculo con Animaciones

José Roberto Mandujano
Escuela Superior de Cómputo
México
jrmandujano@yahoo.com.mx
Visualización – Nivel Superior

Resumen

Este trabajo tiene como propósito mostrar, con ejemplos, las ventajas de utilizar un software en la enseñanza de las Matemáticas. Se pone más énfasis en las animaciones, pues con éstas podemos simular o reproducir una gran variedad de problemas de Cálculo. Con esto el alumno tiene la oportunidad de visualizar mejor los conceptos del Cálculo, además puede ver para qué sirve resolver una ecuación, una integral, una derivada, etc. Esta utilidad y visualidad es fundamental para un alumno, pues es de esta forma como puede empezar a interesarse por la Matemática.

Animación en matemáticas.

Muchos problemas en Matemáticas es posible reproducirlos o simularlos, por ejemplo, el movimiento de una partícula que se mueve sobre el eje Y de acuerdo a la ecuación $y = y(t)$. Para hacer una película debemos generar las fotografías que la componen y en las fotografías poner los objetos que la forman. Habiendo hecho las fotografías, las pasamos a cierta velocidad para ver la película. El software Maple tiene instrucciones para hacer todo esto y por lo tanto la manera de hacer películas.

¿ Cómo se hace una animación ?.

En una animación tenemos objetos que no se mueven en un intervalo de tiempo ***[a,b]*** y los que si lo hacen. La instrucción para hacer animación es

plots[display](display(***{Objetos que no se mueven}*** *),display(* ***Objetos que se mueven****,insequence=true));*______**(1**)

Los ***Objetos que se mueven*** en el tiempo deben escribirse con el siguiente formato:

*seq(display(***Lista de objetos que se mueven***),i=1..n)*

Donde la lista de objetos que se mueven son instrucciones de objetos geométricos que nos indican dónde colocarlos (con respecto a un sistema de coordenadas XY) en el instante $t\left[i\right]$, donde $t\left[i\right]$ es un elemento de la sucesión :

t:=seq[a+(b-a)*i/n,i=0..n]:____________________**(2)**

y la cual debe ir antes de (1). La instrucción *insequence=true* **,** que aparece en (1), tiene como objetivo pasar las fotografías una por una, empezando con la número *1* hasta la *n*. Conviene señalar que la sucesión de tiempos generada por *(2)* se enumera desde *1* y no *0*. El intervalo de tiempo *[a,b]* así como el número de fotografías *n* uno los debe especificar.

¿ Cómo se forman los objetos de la animación ?

Por otro lado los objetos que intervienen en la animación se pueden construir con la siguiente lista de instrucciones :

> with(plottools);

$$[arc, arrow, circle, cone, cuboid, curve, cutin, cutout, cylinder, disk, dodecahedron, ellipse, ellipticArc, hemisphere, hexahedron, homothety, hyperbola, icosahedron, line, octahedron, pieslice, point, polygon, project, rectangle, reflect, rotate, scale, semitorus, sphere, stellate, tetrahedron, torus, transform, translate, vrml]$$

o de combinaciones de ellos. También se pueden construir objetos que se puedan generar con las instrucciones ***plot(), spacecurve()*** o ***plot3d(),*** tomando en cuenta que no se pueden mezclar objetos generados por la primera instrucción y la segunda o la tercera.

Simulación de una partícula que se mueve sobre el eje X.

Una partícula se mueve sobre el eje X de acuerdo con la ecuación $x = t^3 - 12t^2 + 36t - 20$. Simular el movimiento en el intervalo de tiempo $[-1,9]$.

Ecuación de movimiento de la partícula.

> x:=t->t^3-12*t^2+36*t-20;

$$x := t \to t^3 - 12\, t^2 + 36\, t - 20$$

Intervalo de tiempo

> a:=-1;

$$a := -1$$

> b:=9;

$$b := 9$$

Gráfica de la posición de la partícula contra el tiempo

> plot(x(t),t=-1..9,color=green,thickness=3);

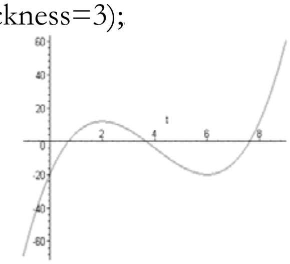


Fig. 1

```
> n:=100:
> t:=[seq(a+(b-a)*i/n,i=0..n)]:
```

Simulamos la partícula con un disco de centro $\left(x\left(t\left[i\right]\right),0\right)$ y radio 4.

```
> plots[display](seq(display(   disk([x(t[i]),0], 4,color=red)
),i=1..n+1),scaling=CONSTRAINED,insequence=true);
```

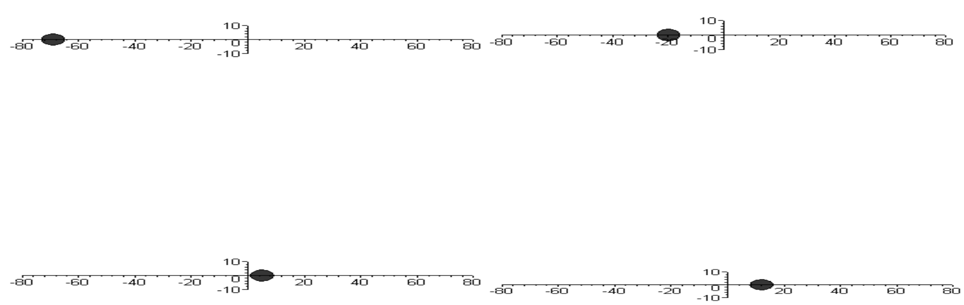


Fig. 2

Simulación del ascenso de agua en un tanque cónico.

Un tanque de agua tiene la forma de un cono circular recto de *12 m.* de alto y *6 m.* de radio en la base. Si se suministra agua al tanque a razón de *10 metros cúbicos por minuto* simular el ascenso del agua.

Definimos la ecuación diferencial del descenso de agua en el tanque

```
> edo:=diff(h(t),t)=-40/(Pi*h(t)^2);
```

$$edo := \frac{d}{dt}\mathrm{h}(t) = -\frac{40}{\pi\,\mathrm{h}(t)^2}$$

Resolvemos la ecuación diferencial, poniendo la condición inicial $h\left(0\right)=12$.

```
> dsolve({edo,h(0)=12},h(t),explicit=true);
```

$$\mathrm{h}(t) = \frac{\left(\left(-120\,t + 1728\,\pi\right)\pi^2\right)^{(1/3)}}{\pi}$$

```
> h:=t->1/Pi*((-120*t+1728*Pi)*Pi^2)^(1/3);
```

$$h := t \to \frac{\left(\left(-120\,t + 1728\,\pi\right)\pi^2\right)^{(1/3)}}{\pi}$$

```
> solve(h(t)=0,t);
```

$$\frac{72\,\pi}{5}$$

```
> a:=0:
> b:=72*Pi/5-0.001:
> n:=50:
```

Simulamos el tanque con las ecuaciones paramétricas de un cono de radio seis y altura doce. Se selecciona el estilo WIREFRAM para que se pueda ver su contenido

```
> l:=plot3d([u*cos(v),u*sin(v),2*u],u=0..6,v=0..2*Pi, color=black, style=WIREFRAME):
> t:=[seq(a+(b-a)*i/n,i=0..n)]:
```

Simulamos el agua con un cono en color azul

```
> plots[display](display({l}),display(seq(display(    cone([0,0,0],h(t[i])/2 ,h(t[i]),color=blue)
),i=1..n+1),insequence=true));
```

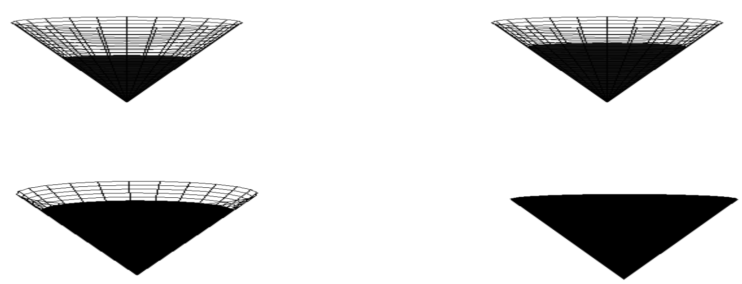


Fig. 3

Simulación para encontrar el cono de volumen máximo inscrito en una esfera.

Se quiere encontrar el cono de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de radio uno y con centro en el origen. Utilizaremos la simulación para resolver el problema.

La esfera

```
> l:=sphereplot(1,theta=Pi/2..3*Pi/2,phi=0..Pi):
> R:=1:
> r:=y->sqrt(1-y^2);
```

$$r := x \to \sqrt{1 - x^2}$$

```
>h:=y->y+1:
```

Volumen del cono en función de la variable y

```
> V:=y->Pi*r(y)^2*h(y)/3:
```

```
> a:=-R:
> b:=R:
> n:=50:
> t:=[seq(a+(b-a)*i/n,i=0..n)]:
```

La simulación se hace inscribiendo diferentes conos en la esfera y midiendo su volumen

```
> plots[display](display(l), display(seq(display(   cone([0,0,-1],r(t[i]),h(t[i]),color=blue),
textplot3d([0,0,2,V=convert(V(t[i]),float)], align={ABOVE,RIGHT}),
textplot3d([0,0,1.8,r=convert(r(t[i]),float)], align={ABOVE,RIGHT}),
textplot3d([0,0,1.5,h=convert(h(t[i]),float)],
align={ABOVE,RIGHT})),i=2..n),insequence=true));
```

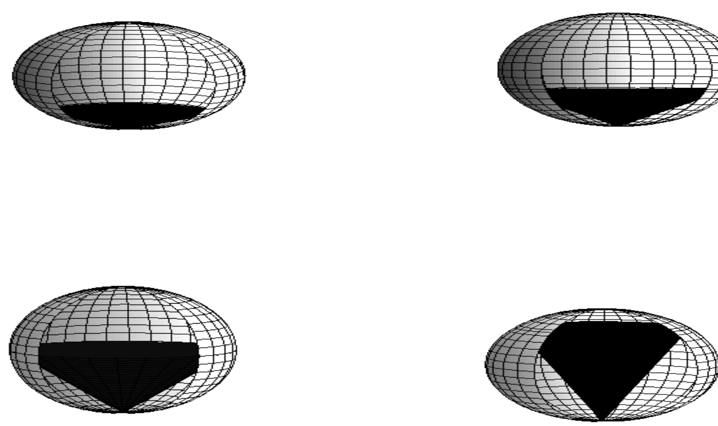


Fig. 4

Simulación para generar un sólido de revolución.

La circunferencia con centro en $(2,0)$ y de radio uno se gira sobre el eje Y, realizar una animación para observar cómo se genera el sólido de revolución.

```
> f:=y->sqrt(1-y^2)+2;
```

$$f := y \to \sqrt{1-y^2}+2$$

```
> g:=y->-sqrt(1-y^2)+2;
```

$$g := y \to -\sqrt{1-y^2}+2$$

```
> m1:=plot(f(y),y=-1..1,color=red,thickness=3):
> m2:=plot(g(y),y=-1..1,color=green,thickness=3):
> display({m1,m2},view=[-3..3,-3..3]);
> a:=1; b:=-1; c:=0;
```

$$a := 1\,,\ b := -1\,,\ c := 0$$

```
> alpha:=0; beta:=2*Pi;
```

$$\alpha := 0 \,,\ \beta := 2\,\pi$$

```
> n:=20;
```

Se dibuja el sólido de revolución a través de las ecuaciones :

$$x = c + \left(f(y) - c \right) \cos\left(u\right)$$
$$y = y$$
$$z = \left(f(y) - c \right) sen(u)$$

que corresponden a las ecuaciones paramétricas del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la región :

$$R = \left\{ \left(x, y\right) \middle| 0 \le x \le f(y), a \le y \le b \right\}$$

sobre la recta $x = c$.

```
> plots[display](display({p,l1,l2}),display(seq(display( plot3d([c+(f(y)-
c)*cos(u),y,(f(y)-c)*sin(u)],u=0..t[i] , y=a..b,color=magenta), plot3d([c+(g(y)-
c)*cos(u),y,(g(y)-c)*sin(u)], u=0..t[i], y=a..b,color=red)
),i=2..n+1),insequence=true));
```

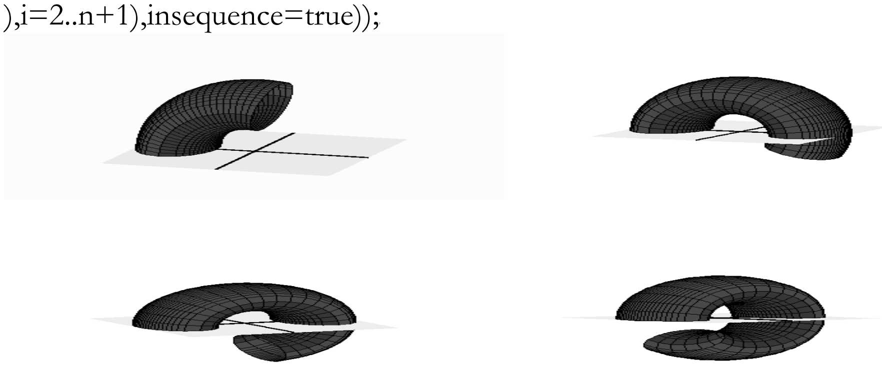


Fig. 5

Conclusiones

El uso de un software en la enseñanza de las matemáticas es imprescindible por sus herramientas para hacer cálculos rápidamente, de graficación y de animación. Estos elementos permiten que una clase en que se utilice un software, éste colaborará en el desarrollo de la clase para hacerla más amena e interesante para el alumno y el maestro. En especial la animación funciona como un "laboratorio matemático" donde podemos simular los problemas de esta área, esto de alguna manera resuelve algunas de las interrogantes planteadas por los alumnos . . . ¿ para qué sirven los cálculos que estoy haciendo ? .

Referencias Bibliograficas

Adams, P., Smith, K. y Vyborny, R. (2004) *Introduction To Mathematics With Maple*. USA: World Scientific Publishing Company.

Maple Animation [Software de computadora]. (2003). John Putz, CRC Press.

Adams, R. (2003). *Single Variable Calculus*. USA: Pearson Education.

Aplicabilidad Pedagógica de las Macros (Cabri II) en la Enseñanza de la Geometría

Eduardo Mardones y Andrés Ortiz
Universidad de Concepción
Chile
andortiz@udec.cl
Formación de Profesores – Nivel superior

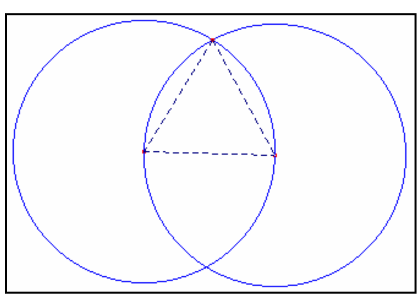
Resumen

El presente taller se orienta al conocimiento, manejo y aplicabilidad de la herramienta MACROS de CABRI II en la enseñanza de geometría, con la finalidad de entregar a los profesores participantes un recurso informático que les permita mejorar su intervención en aula y con ello mejorar los aprendizajes referidos a área y perímetro de figuras planas como también en el acercamiento hacia la geometría fractal a través de situaciones problemáticas de índole geométrico, promoviendo con ello el trabajo colaborativo, con el fin de lograr aprendizajes efectivos.

Construcciones de macros

Macro nº 1: Triángulo Equilátero

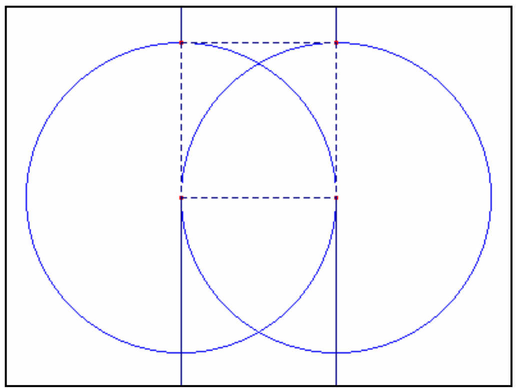
1º) Marcar dos puntos en el plano.
2º) Construir una circunferencia cuyo centro sea uno de los puntos y cuyo radio sea la longitud entre los dos puntos.
3º) Igual que el paso 3, pero utilizando el otro punto como centro.
4º) Construir un triángulo cuyos vértices sean los dos puntos dados y aquél formado por la intersección de las dos circunferencias.
5º) Ocultar la construcción de las dos circunferencias.
6º) Abrir el menú de las macros.
7º) En objetos iniciales marcar los puntos dados.
8º) En objeto final, marcar el triángulo equilátero
9º) Definir la macro: llamándola triángulo equilátero.



Macro nº 2: Cuadrado

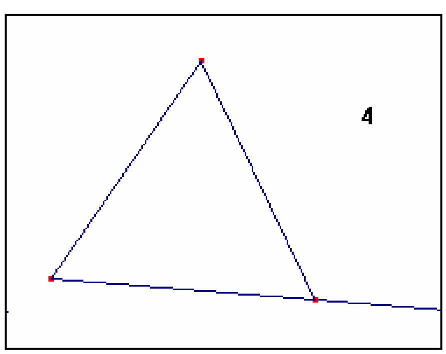
1º) Marcar dos puntos en el plano.

2º) Dibujar una circunferencia cuyo centro sea uno de los puntos y cuyo radio sea la longitud entre los dos puntos.
3º) Igual que el paso2, pero utilizando el otro punto como centro.
4º) Construir una recta perpendicular al trazo dado y que pase por uno de los extremos.
5º) Igual que el paso 4º, pero pasando por el otro extremo del trazo.
6º) Construir el cuadrado (polígono) utilizando los vértices de los extremos del trazo y los puntos de intersección entre las circunferencias y las rectas perpendiculares.
7º) Ocultar las construcciones de las rectas perpendiculares y de las circunferencias.
8º) En objetos iniciales marcar los extremos del trazo dado.
9º) En objeto final, marcar el cuadrado
10º) Definir la macro: llamándola triángulo equilátero.



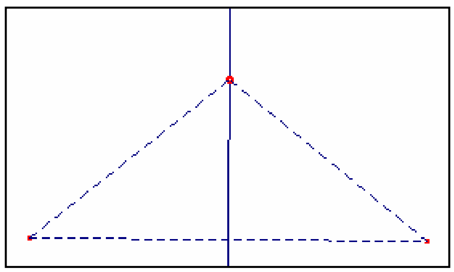
Macro nº 3: Triángulo equilátero (longitud del lado fija)

1º) Dibujar una semirrecta.
2º) Utiliza el comando Edición Numérica con una medida cualquiera.
3º) Utiliza el comando Transferencia de Medida, para transferir el número anterior a la semirrecta definida anteriormente. Generando un punto en la semirrecta.
4º) Aplica la macro nº 2 (triángulo equilátero) considerando el punto origen de la semirrecta y el punto generado a partir de la transferencia de medida.
5º) Oculta la semirrecta.
6º) En objetos iniciales marcar el punto de origen de la semirrecta y el número de la edición numérica.
7º) En objetos finales marca el triángulo equilátero.
8º) Definir la macro, llamándola triángulo equilátero de longitud fija.



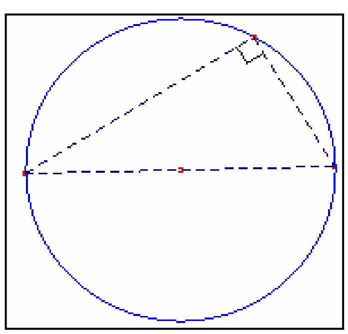
Macro nº 4: Triángulo Isósceles

1º) Construye un segmento.
2º) Construye la mediatriz (simetral) del segmento
3º) Ubica un punto sobre la simetral con el comando Punto sobre Objeto.
4º) Ocultar la simetral y el trazo.
5º) Construir el triángulo (isósceles) a partir de los extremos del trazo y del punto ubicado en la simetral.
6º) En objetos iniciales marca los extremos del trazo.
7º) En objetos finales marca el triángulo.
8º) Definir la macro, llamándola triángulo isósceles.



Macro nº 5. Triángulo rectángulo

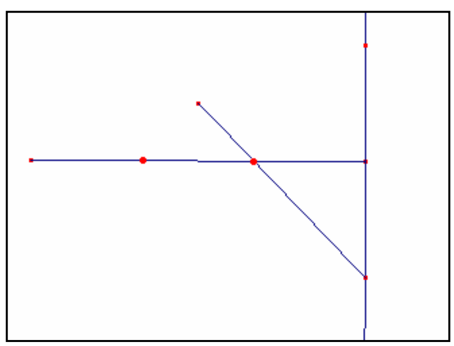
1º) Construye un segmento.
2º) Construye el punto medio del segmento.
3º) Construye una circunferencia cuyo centro sea el punto medio recién construido y el radio la longitud desde el centro a los extremos del segmento.
4º) Ubica sobre la circunferencia un punto.
5º) Oculta la circunferencia y el segmento.
6º) Construye el triángulo cuyos vértices son los extremos del segmento y el punto de la circunferencia.
7º) En objetos iniciales marca los extremos del segmento (los extremos de la hipotenusa).
8º) En objetos finales marca el triángulo.
9º) Define la macro llamándola triangulo rectángulo.



Macro nº 6: Trisección de un trazo

1°) Construye un segmento.
2º) Construye una recta perpendicular que pase por uno de los extremos del segmento.
3º) Ubica un punto sobre la recta perpendicular.
4º) Construye el punto medio entre el extremo del trazo (por el cual no pasa la perpendicular) y el punto ubicado en la perpendicular.
5º) Construye el simétrico del punto ubicado en la perpendicular respecto al del extremo del trazo.
6°) Construye el segmento entre el punto medio (del paso 4º) y el simétrico (paso 5º).
7º) Construye la intersección entre el trazo anterior (paso 6º) y el segmento dado (paso 1º).

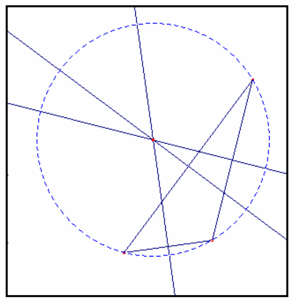
8º) Construye el simétrico del extremo del trazo (por donde pasa la perpendicular) y el punto de intersección.
9º) Oculta la recta perpendicular y los puntos construidos en ella, el segmento del paso 6º y sus extremos. Debe quedar visible solamente el segmento inicial, los extremos y los puntos de trisección.
10º) En objetos iniciales marca el segmento.
11º) En objetos finales marca los puntos de la trisección.
12º) Definir la macro, llamándola Trisección de un Trazo.



Observación: La macro anterior es conveniente a veces, tenerla definida a partir de los extremos. Para ello solamente se debe en objetos iniciales marcar los extremos del trazo.

Macro nº 6: Circunferencia Circunscrita

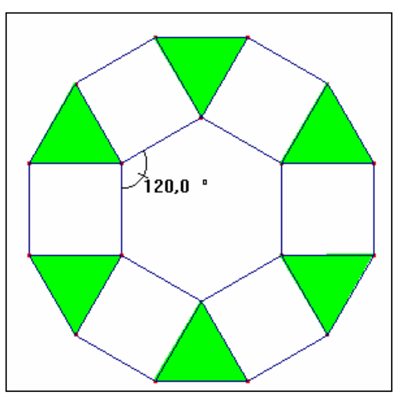
1º) Construye triángulo cualquiera.
2º) Construye las tres mediatrices correspondientes a los lados del triángulo.
3º) Construye la intersección de las tres mediatrices. (circunscentro).
4º) Construye una circunferencia cuyo centro sea el circunscentro y el radio se extienda hasta el vértice del triángulo.



Aplicabilidad de las macros

Ejemplo 1

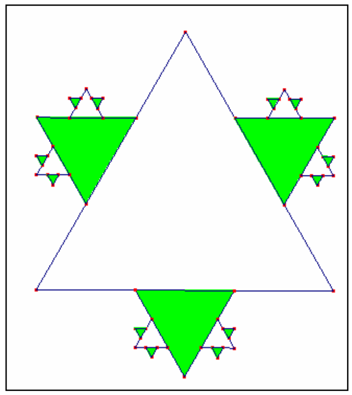
a) Utilizando macros, completa la construcción de la siguiente figura compuesta de triángulos equiláteros y cuadrados. Señala que tipo de región se forma al cerrar la construcción.
b) Utilizando cabri II elabora un razonamiento a partir de la visualización, del porqué se forma un hexágono regular al cerrar la construcción.



Ejemplo 2

a) A partir de un triángulo equilátero aplica sucesivamente las macros trisección de un trazo y triángulo equilátero, para generar la figura de la derecha.

b) A partir de la figura construida con las macros se y utilizando cabri II se puede investigar acerca de:
   - La razón entre el área del primer triángulo y la de los triángulos generados a partir de las trisecciones.
   - El perímetro de las figuras generadas a partir de las trisecciones. Deducir una fórmula que determine el perímetro de la figura resultante a partir de la n-esima trisección.



Referencias Bibliográficas

Martín, J. (2004). Fractales.[En línea] Disponible en: http://education.ti.com/downloads/pdf/espana/p10y11.pdf

Texas Instruments Incorporated. (1999). *Introducción a Cabri Geometry II para Macintosh, Windows y MS-DOS*.[En línea] Extraído el 7 de Mayo de 2004 desde http://education.ti.com/downloads/guidebooks/es/gsbook_spa.pdf

Arriero Carmen, García Isabel. (2004, Noviembre).*Geometría con Cabri: Construcción de lugares geométricos y mosaicos*.[En línea]. Extraído el 7 de Mayo de 2004 de la dirección: http://platea.cnice.mecd.es/~mcarrier/

Fleitas, C. (2004). Tutorial de Cabri.[En línea]. Extraído el 7 de Mayo de 2004 de la dirección: http://centros5.pntic.mec.es/ies.marques.de.santillana/tallerma/cabri.htm

Joyce, D. (1994). *Julia and Mandelbrot Set Explorer*. [En línea]. Extraído el 7 de Mayo de 2004 desde: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/julia/explorer.html

Curvas de Koch y Sierpinski. (n.d). [En línea]. Extraído el 7 de mayo de 2004 de la dirección: http://www.arrakis.es/~sysifus/kochsier.html

Laboratorio Virtual de Matemáticas

Emir Martínez, Jaime L. Arrieta y Antonio Canul
Facultad de Matemáticas de la U. A. G., Instituto Tecnológico de Acapulco
México
emir_mtz@hotmail.com
Socioepistemología – Nivel medio

Resumen

Concebimos que la modelación de fenómenos es una práctica que está ligada a la construcción de conocimientos matemáticos y en este sentido se han realizado investigaciones entorno a su incorporación al contexto escolar. Sin embargo, el incorporar la experimentación en el aula de matemáticas conlleva dificultades, una de ellas es la carencia de material de laboratorio. El laboratorio virtual es un proyecto que intenta suplir la ausencia de un laboratorio físicamente, sin embargo, esta sustitución desencadena diferentes relaciones entre los actores. En este trabajo se pretende mostrar como es que un laboratorio simulado, podría contribuir a la incorporación a sistemas escolares concretos de diseños de aprendizaje basados en las prácticas sociales de modelación. Se da evidencia de cómo se desarrollan acciones e interacciones colaborativas alrededor del laboratorio virtual.

Introducción

En este artículo se reporta los avances de una investigación en proceso que persigue caracterizar las prácticas de modelación en contextos virtuales.

A pesar de que gran parte de la matemática se ha construido a partir de las interacciones con diferentes fenómenos, estos son desestimados en el aula de matemáticas y, en consecuencia, se ha minimizado la creación matemática a partir de la experimentación en el laboratorio. Históricamente podemos constatar que la práctica de modelación ha estado ligada a la construcción de los conocimientos matemáticos. De la misma manera diferentes comunidades de profesionistas, actualmente, ejercen esta práctica. Es por esto que nos hemos planteado que la modelación debería de jugar un papel importante en el contexto escolar, para la construcción de los conocimientos matemáticos.

Los estudios realizados por Arrieta (2003) y Cortés (2003) nos han proporcionado evidencias de que la modelación en el discurso escolar son prácticas sociales que coadyuvan a la generación del conocimiento científico. Desde estas investigaciones se ha manifestado la preocupación de incorporarlas al discurso escolar. Sin embargo, la inserción en los sistemas educativos de secuencias de aprendizaje basada en práctica de modelación no se ha concretado. El llevar la experimentación al aula trae complicaciones, por ello se hacen necesarios instrumentos que posibiliten la incorporación de los productos de la investigación en los sistemas escolares, nuestra propuesta de Laboratorio Virtual tiene esta finalidad. El uso de computadoras para la simulación de ambientes y otros recursos tecnológicos de información y comunicación pueden presentar grandes ventajas para el apoyo y/o complemento de la enseñanza presencial tradicional. Sin embargo, el desarrollo de ambientes virtuales para el aprendizaje se realiza, con frecuencia de manera intuitiva, sin un análisis sensato de los factores educativos que intervienen en el proceso, con ello limitan el potencial de la tecnología en el aprendizaje. Desde nuestra perspectiva, es indispensable realizar investigación atendiendo a las características del sistema escolar y basado en una perspectiva teórica acorde. En otras palabras, las propuestas deben estar basadas en la investigación atendiendo las características particulares que el contexto social imprime a las dimensiones cognitivas, didácticas y epistemológicas. La perspectiva teórica que asumimos es la socioepistemología y la línea de investigación en donde se adscribe este trabajo es la que investiga acerca de la relación entre las prácticas sociales y las construcciones de los conocimientos.

El laboratorio Virtual

En torno a la línea de investigación que desarrollamos se han presentado diferentes trabajos donde se proponen y se reporta la actividad de los actores en la puesta en escena de diseños de aprendizaje. Los diseños son de diferente índole, por ejemplo en algunos casos se propone la modelación de fenómenos a partir de la interacción directa con el fenómeno, en otros casos se parte de una tabla de datos dados, que bien puede ser con ruido o sin ruido (Arrieta, 2003; Cortés, 2003; Galicia, 2004; Ramírez, 2004). Actualmente incursionamos en lo que llamamos "***el laboratorio virtual***" donde proponemos diseños de aprendizaje basados en las prácticas de modelación de ***fenómenos simulados por software.***

El proyecto constata de tres etapas.

La simulación del fenómeno.

La primera consiste en construir un software que supla la ausencia física de equipo para realizar la modelación, facilitando, así la puesta en escena del diseño en el aula. La intención del software no es la de suplir al maestro ni al alumno, el software esta diseñado para que el alumno tome datos del fenómeno simulando las condiciones de un laboratorio físico, incluyendo el ruido en los datos. El software contribuiría a resolver las cuestiones instrumentales del laboratorio, por ejemplo, el profesor ya no tendría que calibrar los resortes o conseguir el material de la práctica.

Las herramientas del software para la modelación.

En la segunda etapa el software proporcionará a los actores herramientas adecuadas para la modelación. En esta etapa se incluyen herramientas como el software LDM que facilita el ajuste de los datos por medio de un método llamado gráfico. Este método parte de graficar una nube de datos, de un menú de curvas, el alumno, elige una con el ratón para pegársela y, posteriormente, moviendo los parámetros algebraicos acomoda la curva a la nube de datos.

Los enlaces para la interacción en la modelación.

La tercera etapa se pretende que el software facilite la interacción entre estudiantes, con el profesor y/o con el investigador. En esta etapa se pretende establecer los enlaces necesarios para que en tiempo real los estudiantes y profesor puedan interactuar con un mismo diseño desde puntos remotos. Los diseños propuestos aquí, están basados en prácticas de modelación de fenómenos simulados por un programa de computadora. En este trabajo reportamos las exploraciones alrededor de la primera etapa del proyecto.

¿Qué es un ambiente virtual?

Un ambiente virtual es una interfaz que permite a los seres humanos visualizar e interactuar con ambientes generados por medio de computadoras en tiempo real, a través de los canales sensoriales humanos. Sin embargo, estos ambientes virtuales no sólo deben considerarse como una mezcla de componentes de la interfaz, tales como el texto, los gráficos, el sonido, las animaciones y el vídeo, o los vínculos electrónicos que permitan tener acceso a las diferentes fuentes de información que existen en el mundo, lo fundamental de considerar un ambiente virtual son las implicaciones educativas que se le puedan atribuir.

Empero, crear un ambiente virtual no es trasladar la docencia de un aula física a una virtual, ni cambiar el gis y el pizarrón por un medio electrónico, o concentrar el contenido de una asignatura, en un texto que se lee en el monitor de la computadora. Se requiere conocer todos los recursos tecnológicos disponibles (infraestructura, medios, recursos de información, etc.), así como las ventajas y limitaciones de éstos para poder relacionarlos con los objetivos, los contenidos, las estrategias y actividades de aprendizaje y la evaluación.

Sin embargo, el uso de las tecnologías por si mismas no significa, necesariamente, una mejor educación. Para que esto suceda, es necesario contar con un marco de referencia que permita el aprovechamiento de los recursos de manera racional y eficiente.

Problemática

Existen diferentes causas por las cuáles el proceso de incorporar a los sistemas educativos diseños de aprendizaje basados en la modelación se tornan complicados. En una encuesta que realizamos entre profesores de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Acapulco, para conocer las dificultades que tendrían para incorporar las prácticas de modelación, nos mostró que ellos ubican como principales, la falta de tiempo o la ausencia de los recursos necesarios.

Otro de los motivos que surgen son que se requiere pericia y dedicación por parte del docente en la experimentación; que se requiere materiales e instrumentos de medición adecuados; que los costos de la experimentación son más altos que en las clases tradicionales de matemáticas; que es difícil reproducir la experimentación; que se presentan dificultades inherentes a la manipulación de los fenómenos.

Actualmente existen una gran cantidad de paquetes, con mayor o menor integración, que simulan diferentes fenómenos y que de alguna forma pudieran lograr los objetivos que en el proyecto se enmarcan. Sin embargo, con el fin de aprovecha al máximo las características de los ambientes virtuales para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en el diseño y desarrollo de un ambiente virtual, consideramos, se debe tomar en cuentas las siguientes características básicas:

- Interactividad alumno-ambiente, alumno-alumno, alumnos-profesor.
- Aprendizaje centrado en el ejercicio de prácticas más que en contenidos.
- Ambientes compartidos, donde se puedan vivir experiencias en grupo.
- Simule, lo más fiel posible, las condiciones de un laboratorio, sin que esto implique la sustitución del alumno o del maestro

La tesis central

Nuestra tesis es que un entorno virtual nos proporcionaría la posibilidad de establecer un aprendizaje basado en la construcción del conocimiento a partir de prácticas sociales de modelación, en dónde se articule la teoría con la práctica y donde puedan desarrollarse acciones e interacciones colaborativas en diferentes espacios relacionados con una gran variedad de modelos y el uso de múltiples herramientas.
En este sentido, el Laboratorio Virtual, pretende que los alumnos puedan experimentar diversos fenómenos a través de la simulación de estos. A partir de la experimentación, el alumno, tendrá la necesidad de generar sus propias herramientas que le permitan. Sin embargo, la investigación en ambientes virtuales se hace necesaria pues la introducción de elementos como lo son la PC y el ambiente virtual modifica el contexto social y con ello se modifica las interacciones en el aula, es nuestra intención presentar cómo es que se modifican estas relaciones.

Una experiencia con el laboratorio virtual

Se presenta el desarrollo de un software, el cual pretende simular lo más fiel posible el fenómeno de la elasticidad de un sistema de resortes. Este software trata de aportar elementos que caracterizarían el experimento físico. Cuenta con un área de herramientas donde se localizan tres "cajones", en uno se encuentran diferentes resortes, en el segundo se encuentran las pesas de 15, 20, 50. y 60 gramos y, en el tercer "cajón", se encuentran las reglas.

Vista del Sistema de Resortes (Sires).

El área de datos se encuentra a la derecha, y consiste de una tabla para registrar las mediciones que realice el usuario, posee tres botones, los cuales permiten agregar una nueva fila al final de la lista, eliminar la fila seleccionada y, finalmente, el botón que permite guardar la tabla en un archivo.

Se puede trabajar con uno o dos resortes según la actividad que se tenga planeada, para ello, se selecciona con el ratón un resorte y se coloca en el soporte Para seleccionar una regla solo se tiene que abrir la caja de las reglas y dar un clic sobre la regla y esta aparecerá a un lado del soporte, puede mover la regla dando un clic sobre ella y arrastrándola a la nueva posición. Para agregar el peso se abre la caja de la pesas y se selecciona, el puntero del ratón adoptara la forma de la pesa seleccionada, y se deposita sobre el portapesas; para quitar peso de un platillo se debe dar un clic sobre el platillo y posteriormente dar otro clic en cualquier otra parte del área de trabajo y el último peso agregado será retirado.

La experiencia

En el laboratorio virtual, el alumno tiene la responsabilidad de los diseños experimentales y una variedad de parámetros para ser manipulados. Por ello, se persigue imprimir las siguientes características:

- Los experimentos tratados, intentan seguir el procedimiento de los trabajos en el laboratorio, es decir, se visualizan aparatos y procesos, es decir se trata de reproducir el modo de operación de un laboratorio.
- Da la oportunidad de obtener datos numéricos y/o gráficos, los cuales son tratados de acuerdo a las intenciones del diseño de aprendizaje que se pretende poner en escena.

- Incluye ayuda accesible desde cualquier parte del programa, así como tutoriales donde se explican los conceptos teóricos necesarios.
- El software no sustituye al alumno, le permita interactuar.
- El ruido en los datos, no se elimina.

Conclusiones y perspectivas

En las puestas en escena, de diferentes secuencias, utilizando el software diseñado, hemos podido observar ventajas y desventajas de las cuáles mencionamos algunas a continuación. **Ventajas,** la posibilidad de llevar la modelación a escenarios escolares; reduce la preparación previa a la clase de los experimentos, por el profesor, lo que permite una mayor dedicación del profesor; da una solución a la escasez de elementos para la experimentación; permite la manipulación del fenómeno y su reproducción; siempre tiene disponible los experimentos; brinda la posibilidad de interactuar a distancia; permite una evaluación personalizada y continua del progreso de aprendizaje del alumno por el profesor o por el propio alumno. Algunas **desventajas**, son en el sentido que la simulación no proporciona credibilidad en algunos casos, es cuestionada la credibilidad a través de la pantalla; lo virtual no estimula la experimentación física como forma de argumentar; genera formas nuevas de interacción sin control del profesor y/o investigador.

El software es posible utilizarlo, bien en el sentido de la experimentación virtual, o bien, como soporte en la realización de prácticas presénciales o como herramienta para el análisis de resultados y elaboración de conclusiones. Permite la interactividad, sin embargo, puede ser un apoyo en sesiones individuales.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis Doctoral no publicada. Cinvestav, México.

Cortés, G. (2003). *Relaciones cuadráticas entre variables desde la perspectiva de matemáticas a partir de observaciones*, Tesis de Maestría no publicada. U. A. G., México

Galicia, A. (2004). *La construcción de lo exponencial, a partir de las prácticas sociales de modelación*. Tesis de Maestría no publicada, Facultad de Matemática, U. A. G., México.

Montiel, G. (2002). *Una caracterización del contrato didáctico en un escenario virtual*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Ramírez, P. y Hernández, A. (2004). *El tratamiento de fenómenos físicos para aprender matemáticas*, Tesis de Maestría no publicada. U. A. G., México.

Sánchez, M. (2003). *Un estudio sobre interacciones y comunicación en educación matemática a distancia*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Un Software Asistente de Geometría y Una Visualización Dinámica del Teorema Fundamental del Cálculo

Rafael A. Meza
CECyT "Diódoro Antúnez E.". del IPN
México
rmezav53@yahoo.com.mx
Visualización – Nivel Medio, Superior

Resumen

Un acercamiento a través de una visualización dinámica al teorema fundamental del cálculo haciendo énfasis en la relación inversa entre áreas (acumulación) y tangentes (razón de cambio) contrasta con el acercamiento tradicional en el cual se presentan diversas figuras y gráficas estáticas para fundamentar y probar tan importante noción.

Introducción

La invención del cálculo es atribuible, en forma independiente, a Leibniz y Newton a finales del siglo XVII. Newton desarrolló los conceptos de *fluxión* y *fluente* motivado por el problema de calcular la velocidad de un cuerpo y Leibniz por su parte desarrolló los conceptos de *diferencial* e *integral* motivado en el problema de trazar tangentes a una curva cualquiera. También descubrieron la importante relación inversa que hoy en día conocemos como "Teorema Fundamental del Cálculo". Este descubrimiento favoreció el desarrollo algorítmico del cálculo y proporcionó una formulación genérica de la relación entre el problema de la tangente y el problema del área, o en nuestra moderna notación, entre la derivada y la integral. El problema de la tangente básicamente consistía en determinar un método que permitiera trazar una línea recta tangente a una curva en un punto específico; el problema del área, también fue abordado en forma geométrica, y básicamente consistía en encontrar un método que permitiera construir un rectángulo de área igual al área de interés. La relación entre la derivada y la integral de una función frecuentemente se presenta como:

Teorema fundamental del cálculo

Sea *f* continua en un intervalo cerrado $[a, b]$.

Parte I Si la función G está definida por

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

para todo x en $[a, b]$, entonces G es una antiderivada de *f* en $[a, b]$.

Parte II Si F es cualquier antiderivada de *f* en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Pregunta de investigación

El alumno que ha llevado un curso de Cálculo con un acercamiento tradicional caracterizado por un determinado estilo en la demostración de teoremas como el método de exposición, generalmente de tipo algebraica y formal, en la cual se presentan diversas figuras y gráficas estáticas para fundamentar y probar importantes nociones *¿es capaz de identificar, transformar o construir la relación inversa que existe entre el problema de la tangente y el problema del área si únicamente dispone de información gráfica en el plano numérico*? Aún cuando a primera vista la respuesta a esta pregunta parece simple, hemos constatado que *no es obvia*.

Marco Teórico, Cabri y Visualización

Para dar respuesta a nuestra pregunta de investigación realizamos un análisis epistemológico del Teorema Fundamental del Cálculo, ocupándonos ante todo del proceso mismo de su construcción, de las sucesivas estructuras presentes en su evolución y de los mecanismos de pasaje de una etapa a otra en su desarrollo histórico. Fueron dos los mecanismos que consideramos. El primero es un proceso general que caracteriza todo progreso cognoscitivo: el rebasado está integrado en el rebasante. El segundo, fue el proceso que conduce de lo intra-objetal (análisis de los objetos), a lo inter-objetal (estudio de las transformaciones) y finalmente a lo trans-objetal (construcción de las estructuras) (Piaget, J. y García, R., 2000, p. 33). Como resultado del análisis anterior presentamos, con ayuda de Cabri II, una visualización dinámica del Teorema Fundamental del Cálculo con énfasis en la relación entre áreas y tangentes. No es nuestra pretensión realizar una descripción detallada de los comandos del software, por el contrario, partimos del supuesto de que existe un conocimiento básico de ellos y pretendemos utilizarlos como herramientas cognoscitivas.

Parte I

Después de iniciar Cabri II, activemos el campo "Ocultar/Mostrar Ejes" del cuadro de herramientas "Dibujo" para que los ejes predeterminados del paquete se muestren en la pantalla de trabajo y construyamos en seguida la figura 1 con las siguientes propiedades: a) Tracemos un segmento de extremos $U(u,\ 0)$ y $V(v,\ 0)$ sobre el eje horizontal y coloquemos los puntos $W(w,\ 0)$ y $X(x,\ 0)$ sobre él, con la finalidad de que al dar animación a dichos puntos estos sólo se desplacen sobre el segmento citado. Esto nos permite tener control sobre los desplazamientos de dichos puntos, y visualizar una determinada región del plano en forma sistemática para su análisis. b) Con la herramienta "Recta" podemos crear la recta f (no importa el signo de la pendiente) que pase por W y con la herramienta "Perpendicular" una perpendicular por X que corte a la recta f en S, formándose así el triángulo rectángulo WSX. Si mantenemos al vértice W fijo y damos animación al vértice X, ¿qué variables que dependen de x están presentes en dicha animación del triángulo? c) Podemos ahora calcular el área del triángulo WSX, utilizando las coordenadas de los vértices, y transferir dicho valor sobre el eje de las ordenadas para determinar el punto $Y(0,\ Y1)$, con $Y1 = \acute{a}rea\ \Delta WSX$, trazando a continuación una perpendicular por él que corta a la perpendicular por X en el punto $P(x, Y1)$. Esta es la operación base que explotaremos en esta sección.

Surgen ahora un par de preguntas interesantes, si damos animación a *X*, ¿qué tipo de curva describe el desplazamiento realizado por el punto *P*? ¿Por qué? Ante la clase podemos "desplazar ligeramente" *X* con el puntero y pedir a los alumnos que intenten describir la curva de la trayectoria seguida por *P*. No es ésta una habilidad sencilla, por el contrario, es difícil en general para alumnos visualizar la trayectoria de *P*, ya que la ordenada $Y1 = \acute{a}rea\ \Delta WSX$ exige un cálculo que depende de la variación simultánea de los segmentos *WX* y *XS*. Esta variación constituye una relación de relaciones (proporción) lo cual exige una coordinación entre sistemas distintos: *c* es a *d* como *a* es a *b*.

Si activamos ahora la traza para *P* y damos animación a *X* surgirá la curva correspondiente. La figura 2 muestra la curva descrita por *P* como "lugar geométrico". Es conveniente en este momento "crear" la parábola correspondiente al lugar geométrico descrito por *P* con el comando "Cónica". Desde luego que bien podemos llamar a la curva descrita por el punto *P* "Función Área" o "Función Acumulación". He constatado que en general los alumnos del último año de bachillerato y primer año de licenciatura en ingeniería, física o matemáticas no han comprendido que con la acumulación de área de una determinada región (triángulos y rectángulos en particular) es posible construir una función y mucho menos que con la razón de cambio otra. Tanto profesores y alumnos se muestran sorprendidos por la sencillez con la que estas curvas pueden ser construidas con Cabri II, así como de la obtención de sus representaciones algebraicas y su coordinación con las representaciones gráficas. Desde luego que esta presentación del Teorema Fundamental no da un acercamiento totalmente suave, es necesario también, que el estudiante tome partido en la acomodación de sus estructuras cognoscitivas.

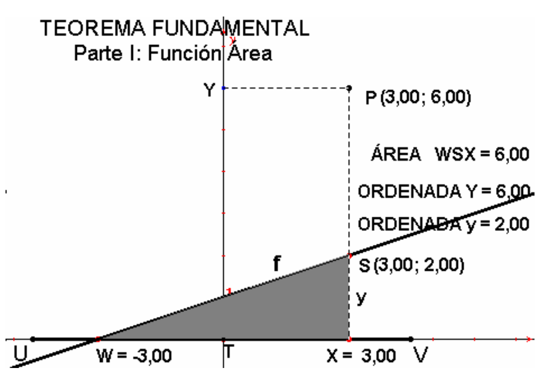


Figura 1

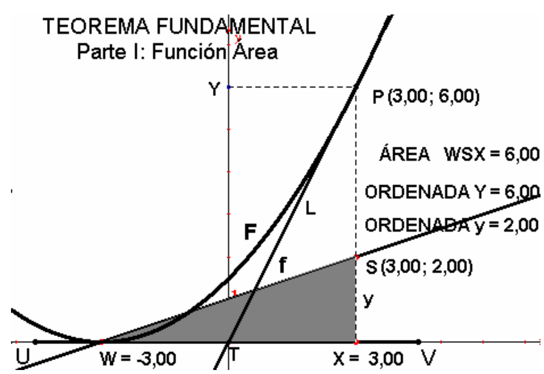


Figura 2

A la curva que describe el punto *P* le llamaremos $Y = F(x)$, e $y = f(x)$ a la que describe *S*. ¿Cuál es la expresión algebraica de la curva que describe el punto *P*? Es este un significativo ejercicio el cual nos permite hallar una "antiderivada" *F* de la función *f* exclusivamente con herramientas algebraicas. Dado que la curva *F* se obtiene al graficar la acumulación de área del triángulo *WSX*, bastará con determinar la expresión algebraica de dicha región como función de *x*. Pero ¿cuál es la base del triángulo? Otro aspecto interesante de esta forma de acercamiento al Teorema Fundamental es la significación que van adquiriendo los diversos elementos presentes en las gráficas utilizadas y que estos están, en general, al alcance de los alumnos. Bien, para el caso que estamos trabajando, *W* fijo y *X* variable, tenemos que la base es $X - W = x + 3$ y la altura $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$. ¿Por qué? Así, el área como una función de la variable x está dada por $A(x)=\frac{1}{2}(x+3)(\frac{1}{3}x+1)=\frac{x^2}{6}+x+\frac{3}{2}$, por tanto la expresión algebraica de F como función de la variable x está dada por $F(x)=\frac{x^2}{6}+x+\frac{3}{2}$. Pero esta expresión tiene la propiedad $F'(x)=f(x)$, es decir que la función F es una antiderivada de f. Así, si la función F representa la acumulación de área de la región triangular WSX como función de x, es decir $F(x)=\int_w^x f$, la función $F'(x)=f(x)$ representa la razón de cambio a la que se esta llevando dicha acumulación, para cualquier valor x del intervalo (u, v). En particular para $x=3$, la acumulación alcanzada es $F(x)=6\ cm^2$ y la razón a la cual tiene lugar dicha acumulación es $f(3)=2\ cm^2$ por *cm*.

Tenemos entonces que la ordenada $f(x)$ del punto $S(x, f(x))$ es igual a la razón a la que está cambiando la acumulación en el punto P, es decir, que la pendiente de la recta tangente L en este punto, está dada por $m=f(x)$. Así, de la tangente L, conocemos el punto P y su pendiente, y sólo resta calcular el valor de la ordenada en el origen, transferir dicho valor sobre el eje de las ordenadas para determinar la ubicación del punto $B(0, b)$ y trazar la recta tangente L a la función F en el punto P.

Analicemos cualitativamente ahora algunas transformaciones entre los comportamientos de las curvas F y f, por ejemplo: si la función f tiene pendiente positiva la parábola abrirá hacia arriba, pero si con el puntero "arrastramos" la recta f modificando poco a poco su pendiente hasta que tome valores negativos observaremos como la concavidad de la parábola se va modificando hasta que ésta abra hacia abajo. Otro aspecto de interés de esta construcción particular es que el vértice de la parábola coincide con el vértice W del triángulo WSX. ¿Por qué? ¿Qué comportamiento manifestará la parábola si damos animación al vértice W? ¿Qué relación existe entre la magnitud del área de la región WSX y la magnitud de la ordenada del punto P si el vértice de la parábola no coincide con el vértice W?

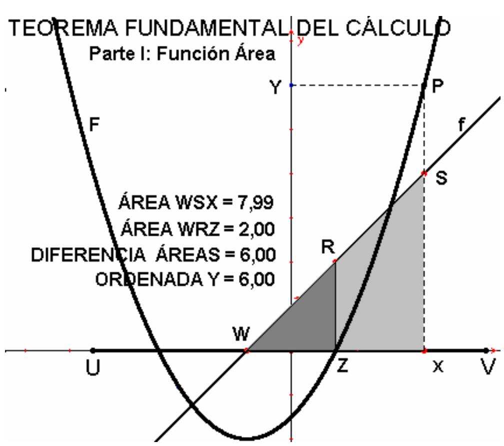


Figura 3

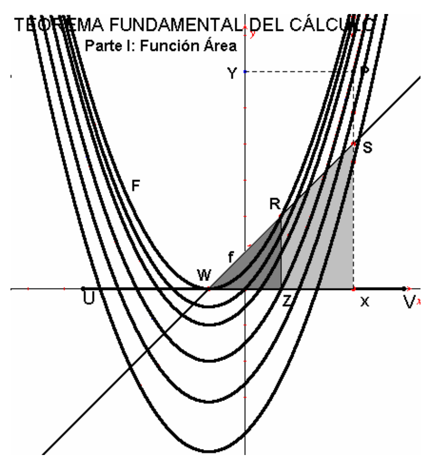


Figura 4

Para terminar está sección, presentamos una situación la cual nos va a permitir ampliar el alcance de las transformaciones trabajadas. El procedimiento para construir la figura 3 es similar al anterior, pero en esta ocasión coloquemos, además de los puntos *W* y *X*, el punto *Z* sobre el segmento *UV*. En esta figura el punto *Z* está ubicado entre *W* y *X*, esto no necesariamente debe ser así. Por *Z* tracemos una perpendicular que corte a la función *f* en *R* con lo que obtenemos los triángulos semejantes *WSX* y *WRZ;* calculemos las correspondientes áreas y determinemos la ordenada $Y1$ como la diferencia de estas últimas, es decir $Y1 = \acute{a}rea\ \Delta WSX - \acute{a}rea\ \Delta WRZ$. Después de transferir este valor sobre el eje de las ordenadas para construir el punto $Y(0, Y1)$, tracemos por éste una perpendicular al eje de las ordenadas, la cual cortará a la perpendicular al eje de las abscisas que pasa por *X* en el punto *P*. La parábola *F* es la curva que describe P cuando damos animación a *X*. Con toda seguridad, si realizó los ejercicios anteriores ya podrá decir cuales son las transformaciones sufridas por la curva *F* cuando desplazamos *X*, *W* o modificamos la pendiente de la recta *f*, pero ¿cuáles serán si damos animación al punto *Z*? En este caso obtenemos parte de la familia de antiderivadas de la función *f*. En forma sintética: Si *F* es una antiderivada particular de *f*, en el intervalo (u, v), todas las posibles antiderivadas de *f* en dicho intervalo tendrán la forma $G(x) = F(x) + c$; la figura 4 muestra algunas antiderivadas particulares.

PARTE II Empezaremos esta sección construyendo una parábola *F* como lugar geométrico, figura 5, para ello tracemos el segmento *UV* sobre el eje de las abscisas y sobre él construyamos el punto $X(x, 0)$, desde luego que esto es con la intención de tener control sobre la animación que se puede dar a dicho punto. Tracemos ahora el foco *C* de la parábola, por ejemplo, en la figura 5 está localizado en el segundo cuadrante y el punto *D*, por el cual ha de pasar la directriz, sobre la parte positiva del eje de las ordenadas. De la intercepción de la perpendicular por *C* con el eje de las abscisas obtenemos el punto *W*. De la perpendicular al eje de las ordenadas por *D* y la perpendicular al eje de las abscisas por *X* obtenemos el punto *N*. Trazamos a continuación el segmento *CN* y la mediatriz de este último, la cual cortará a la perpendicular por *X* en *P*. La curva que describe el punto *P* al desplazarse *X* será la parábola *F* mostrada en la figura y la mediatriz será la recta tangente *L* a la parábola en el punto *P* de abscisa *x*, que el dar animación al punto *X* envolverá a la parábola *F*.

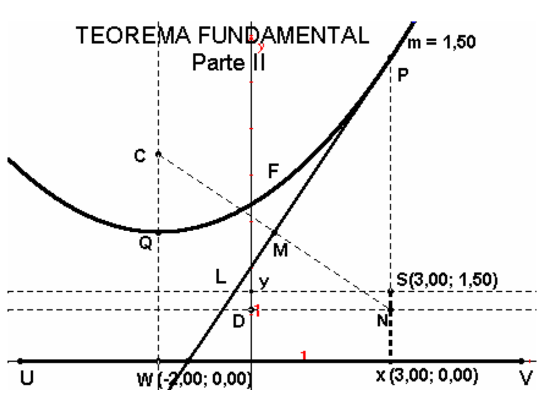


Figura 5

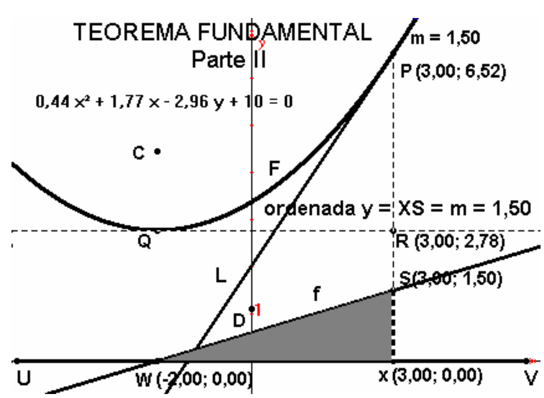


Figura 6

Con la herramienta "Ecuación y Coordenadas" del software podemos determinar la ecuación de la curva F, esto es útil porque estamos interesados en este momento fundamentalmente en la relación entre *F* y *f*, y no "distraemos" al alumno en la determinación de la ecuación de la parábola. De manera similar procedemos con la herramienta "pendiente" para determinar la pendiente de la recta L (en la figura 5, $m = 1.50$), transferimos ahora este valor sobre el eje de las ordenadas para obtener el punto $y(0, m)$ y por él trazamos una perpendicular que corte a la perpendicular por *X* en el punto $S(x, m)$, así la ordenada de este punto tendrá la "propiedad" de que $y1 = m$. Esta es ahora nuestra operación base. Podemos ahora crear la recta *f* que pasa por los puntos *W* y *S*, a la cual podemos llamar "Función Razón" o "Función Tangente", figura 6, de tal forma que al dar animación al punto *X*, el punto *S* se desplazará sobre ella y la transformación que sufre el triángulo *WSX* provocará una acumulación de área. En síntesis: la función *f* tiene la "propiedad" de ser "acumulativa" y el área acumulada para cualquier valor de la variable *x* está dada por $F(x)$, salvo una "constante". ¿Cuál es el valor de la constante? En la sección correspondiente a la primera parte del Teorema Fundamental vimos que $F(x)$ proporcionará el valor correcto del área acumulada para cualquier *x* del intervalo (u, v), siempre que el vértice *Q* de la parábola (eje de simetría paralelo al eje vertical) y el vértice *W* del triángulo *WSX* coincidan. Así, el valor de la constante que estamos buscando está determinada por $c = -F(w)$. Por lo tanto, $\text{área}\ \Delta WSX = F(x) - F(w)$.

Tomaremos esta operación base para deducir un resultado más general. En la construcción correspondiente a la figura 6 construyamos sobre el segmento *UV* el punto $Z(z, 0)$ entre los punto *W* y *X*, figura 7. Construyamos las rectas tangentes *L1* y *L2* a la curva *F* correspondientes a las abscisas *z* y *x*, como se llevó a cabo en el ejemplo anterior, con puntos de tangencia $P1(z, Y1)$ y $P2(x, Y2)$ respectivamente. Hagamos $y1 = m1$ y $y2 = m2$, donde $m1$ y $m2$ son las correspondientes pendientes de las rectas tangentes *L1* y *L2*. Después de realizar la transferencia de estos valores sobre el eje de las ordenadas, tracemos las perpendiculares a este eje por *y1* y *y2*. También, tracemos la perpendicular al eje de las abscisas por *Z*. Podemos ahora trazar la recta *f* tal que pase por los puntos $R(z, y1)$ y $S(x, y2)$, la cual interceptará al eje de las abscisas en el punto *W*, formándose los triángulos rectángulos semejantes *WSX* y *WRZ*. Al mantener *Z* fija y dar animación al punto *X*, el punto *S* se desplazará sobre la gráfica de la función *f*, la cual como ya lo hemos comentamos es acumulativa, transformando al triángulo *WSX*, esto se reflejará en la acumulación dada por $\text{área}\ WSX - \text{área}\ WRZ$ y cuyo valor puede ser calculado directamente por la diferencia $F(x) - F(z)$. ¿Por qué? En forma sintética este último resultado lo podemos escribir como: $\int_z^x f = F(x) - F(z)$.

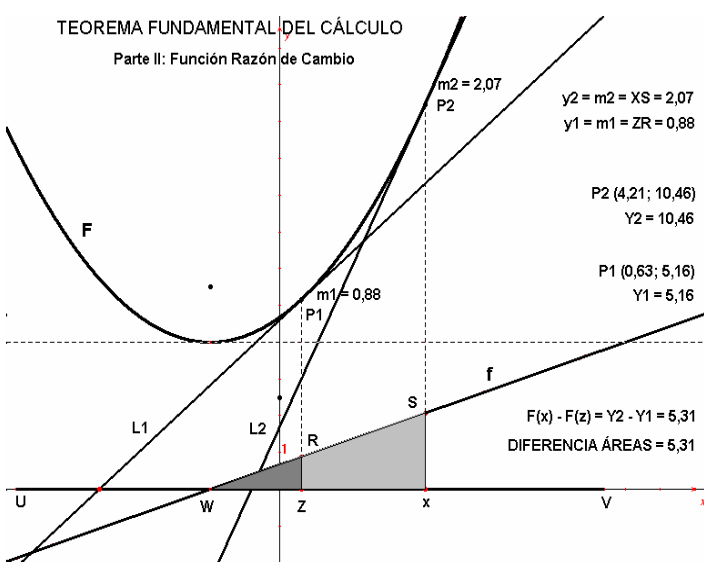


Figura 7

Observaciones

La historia y un ambiente computarizado nos permitieron una visualización dinámica del Teorema Fundamental del Cálculo, con énfasis en la relación entre áreas y tangentes, que sin soslayar a la variación, pone en evidencia los mecanismos generales de su desarrollo: primero como propiedades internas de una figura, más tarde como invariantes de transformaciones posibles y finalmente como síntesis de estas últimas en una estructura con propiedades totalmente nuevas. También fue posible alcanzar una comprensión gráfica e intuitiva de la relación inversa entre la acumulación de una cierta cantidad y la razón de cambio a la cual ésta se acumula, y el porqué de tal relación. Hay mucho todavía por hacer con respecto al acercamiento intuitivo a estructuras. Finalmente, establecidas las operaciones base hemos deducido de ellas las operaciones implicadas, coordinado con otras para ampliar sus alcances e insertado en un sistema de transformaciones como preludio de la síntesis de las mismas, resultado que conocemos como Teorema Fundamental del Cálculo.

Referencias Bibliográficas

Boyer, C. (1968). *A History of Mathematics*.. New York, USA: John Wiley and Sons
Piaget, J. y García, R. (2000). *Psicogénesis e Historia de la ciencia*.. México: Siglo veintiuno.

La Calculadora Gráfica Cómo Recurso Didáctico en el Aprendizaje del Cálculo de Integrales Dobles

Eugenio Carlos y Leonor Fernández
Instituto Superior Politécnico "José A. Echeverría"
Cuba
ecarlos48@yahoo.com, leo@ind.cujae.edu.cn
Tecnología Avanzada – Nivel Superior

Resumen

El tema de integrales dobles ofrece un conjunto de dificultades al estudiante que son los principales obstáculos para el aprendizaje de esta materia. Estas dificultades aparecen en la determinación gráfica de la región de integración, la determinación de los límites de integración y el cálculo de las integrales iteradas con límites variables (Carlos, Martín, Otero y Rivero, 1986). El presente trabajo muestra una experiencia metodológica en la cual se utiliza la calculadora gráfica. La calculadora no se utiliza como herramienta para hacer cálculos sino como un recurso didáctico, contribuyendo a crear un ambiente adecuado en el aprendizaje. El uso de la calculadora gráfica permite establecer un adecuado control por operaciones en las primeras etapas del proceso de asimilación de los conocimientos como reclaman las modernas teorías de enseñanza (Talízina, 1988).

Introducción

El presente trabajo muestra una experiencia metodológica en la cual se utiliza la calculadora gráfica CASIO ALGEBRA FX 2.0 como medio de enseñanza y aprendizaje en el cálculo de integrales dobles. La calculadora no se utiliza como herramienta para hacer cálculos sino como un recurso didáctico, contribuyendo a crear un ambiente adecuado en el aprendizaje.

Se utilizaron diversos recursos que brinda la calculadora (Preiss, 2002), entre ellos la solución de inecuaciones, para determinar gráficamente la región de integración; la solución de ecuaciones algebraicas y trascendentes, para la determinación de los puntos de intersección de las curvas fronteras; la graficación de funciones y las gráficas dinámicas de funciones para determinar los límites de integración, y por último, el cálculo de integrales iteradas con límites constantes y variables.

La experiencia mostró que la calculadora contribuye a vencer obstáculos tradicionales en el aprendizaje del cálculo de integrales dobles (Carlos et al., 1986)

Las calculadoras gráficas posibilitan combinar su uso con otros medios permitiendo a los profesores mostrar al auditorio los resultados que se van obteniendo en la calculadora, y así poder trabajar conjuntamente con los estudiantes y establecer un adecuado control por operaciones en las primeras etapas del proceso de asimilación de los conocimientos como reclaman las modernas teorías de enseñanza (Talízina, 1988), restricción fuerte cuando se trata de organizar el proceso de enseñanza bajo las condiciones tradicionales y el trabajo con lápiz y papel (Delgado, 1998).

La experiencia metodológica

La experiencia metodológica se desarrolló con un grupo de estudiantes de segundo año de la carrera de Ingeniería Informática, que cursaban la asignatura de Cálculo Integral, específicamente el tema correspondiente a integrales dobles.

En el cálculo de integrales dobles se pueden encontrar obstáculos en el aprendizaje (Carlos et al., 1986), en aspectos tan importantes como:

- la determinación de la región de integración.
- el análisis de los límites de integración con el uso de curvas coordenadas.
- el cálculo de integrales con límites variables.

El objetivo de la experiencia fue mostrar que el uso de la calculadora gráfica como recurso didáctico contribuye a vencer estos obstáculos.

El uso de la tecnología, en este caso una calculadora graficadora permite obtener rápidos resultados, pudiéndose dedicar más tiempo al desarrollo de habilidades de modelación y desarrollo del pensamiento lógico, y a su vez es un medio de enseñanza y aprendizaje que representa un recurso didáctico importante.

El cálculo de integrales dobles

Veamos el siguiente ejemplo.

Calcular el área de la región

$$R = \left\{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbf{R}^2 : \ln x \leq y \leq 2 - x \ ; y \geq 0\right\}$$

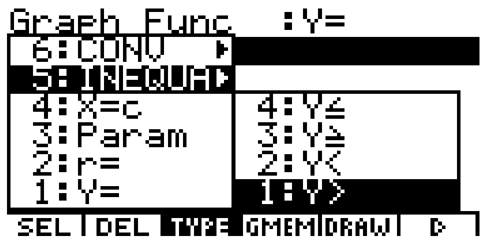
Se sabe que el área de la región R puede calcularse mediante la integral doble:

$$A_R = \iint_R dx\, dy$$

El primer paso será dibujar la región de integración R, para determinar los límites de integración en la integral doble, para lo cual es necesario la solución de las inecuaciones que definen la región de integración. La resolución gráfica (Farfán et al., 2001) es un recurso importante que se puede lograr con la calculadora.

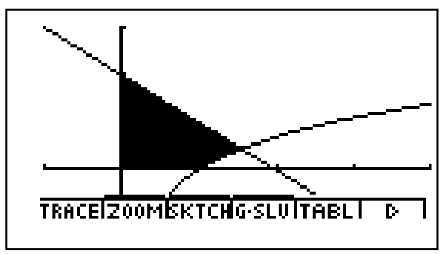
En la calculadora seleccionamos el modo GRPH en el menú principal e inmediatamente presionamos la tecla F3 (TYPE) para seleccionar inecuaciones (INEQUA), en este submenú seleccionamos $y \geq$ para escribir la desigualdad $y \geq \ln x$ en la pantalla Graph Func.

Repitiendo el procedimiento, pero ahora seleccionando $y \le$, escribimos $y \le 2 - x$; y por último $y \ge 0$.



Para una mejor visualización de la región utilizamos la ventana V-Window para definir la escala adecuada, en este caso x_{min}=-1; x_{max}=4; y_{min}=-1; y_{max}=3. Posteriormente se pueden variar estos límites para acercarnos o alejarnos más al gráfico obtenido.

Por último, en la ventana Graph Func, presionamos F5 (DRAW) y obtenemos la gráfica deseada:



Para determinar las coordenadas del punto de intersección de las curvas y = lnx y

y = 2-x, en el menú principal seleccionamos EQUAC y presionamos F3 (SOLV), escribiendo luego la expresión lnx+x-2, para resolver la ecuación lnx+x-2=0

Presionando F6 (SOLV), se obtiene x = 1,55714559, que redondeada a 1,557 nos da para y, el valor y = 0.443.

Para calcular la integral doble se tienen dos posibilidades: integrar primero la x y después la y, o en el orden inverso: la y primero y después la x . En ambos casos se utilizan las curvas coordenadas del sistema coordenado rectangular para determinar los límites de integración, x-curvas en el primer caso y y-curvas en el segundo caso.

Analicemos primero la primera variante, para visualizar las x - curvas (curvas del tipo y=k) volvemos a la pantalla Graph Func y escribimos las ecuaciones y = 0,3 y y = 1,5 , con F3 (TYPE), y = en ambos casos.

Al presionar F5 (DRAW) se observa como las rectas y = 0,3 y y = 1.5 entran y salen de la región de integración, pudiéndose explicar, la necesidad de calcular dos integrales iteradas:

$$A_R = \int_0^{0,443} dy \int_0^{e^y} dx \quad + \int_{0,443}^{2} dy \int_0^{2-y} dx$$

La necesidad de dos integrales iteradas, según $0 \leq y \leq 0,443$ ó $0,443 \leq y \leq 2$, se aprecia mucho mejor si se hace uso de gráficas dinámicas para funciones.

En el menú principal seleccionamos el modo DYNA y escribimos :

y_1 = Alnx

y_2 = 2 – Bx

y_3 = C

y_4 = D

Presionando F4 (VAR) asignamos los valores

A = 1

B = 1

C = 0,443

D = 1

Posteriormente presionamos F1 (SEL) y seleccionamos D como la variable dinámica. Con F2 (RANG) definimos el rango de la variable D: min = -1; max:= 3, de 0.1 en 0.1 (Start:-1; End: 3; Pitch: 0.1). Presionando F6 (DYNA), después de un momento de espera, se observa cómo se mueve una x -curva (y = k) sobre la región, mostrando los límites variables de x, según el rango de valores de y .

Una vez hecha esta demostración gráfica podemos volver a la pantalla Graph Func y escribir las ecuaciones de dos y - curvas, por ejemplo x = 0,5 y x = 1,5, para mostrar el otro orden de integración:

$$A_R = \int_0^{1} dx \int_0^{2-x} dy \quad + \int_{1}^{1,5} dx \int_{\ln x}^{2-x} dy$$

Veamos solamente el caso de la integral:

$$\int_{1}^{1.5} dx \int_{\ln x}^{2-x} dy$$

Hacemos uso de la integración simbólica para calcular la integral con límites variables.

En el menú principal seleccionamos CAS y presionamos F2 (CALC) para luego seleccionar el cálculo de integrales, escribiendo $\int(1, y, \ln x, 2 - x)$, obteniendo como respuesta

-lnx – x + 2 .

A continuación volvemos al cálculo de integrales para calcular $\int(-\ln x - x + 2, x, 1, 1.5)$ obteniéndose finalmente el resultado $\frac{-3 \ln\left(3/2\right)}{2} + \frac{7}{8}$. Presionando F1 (TRNS) podemos seleccionar smplfy para simplificar la respuesta anterior, simplify (AnS), obteniéndose $\ln\left(\frac{2\sqrt{6}}{9}\right) + \frac{7}{8}$ con esto tenemos que:

$$\int_{1}^{1.5} dx \int_{\ln x}^{2-x} dy = \ln\left(\frac{2\sqrt{6}}{9}\right) + \frac{7}{8}$$

Otra ventaja de la calculadora en el cálculo de integrales dobles es que evita un error muy frecuente que cometen los estudiantes al determinar los límites de integración. Por ejemplo en este mismo caso, cuando se integra primero la variable x:

$$\int_{0}^{0,443} dy \int_{0}^{e^{y}} dx + \int_{0,443}^{2} dy \int_{0}^{2-y} dx$$

es frecuente encontrar que algunos estudiantes escriban la integral de la izquierda como:

$$\int_{0}^{0,443} dy \int_{0}^{\ln x} dx$$

ya que la curva que se da para definir la región de integración es y = lnx , y para integrar la x tenemos que despejar esta variable, obteniendo $x = e^{y}$.

Si se intenta calcular esta última integral como $\int(1, x, 0, \ln x)$ se obtiene un mensaje de error de sintaxis, en efecto, se está intentando integrar la variable x y un límite de integración está en función de esta misma variable.

Conclusiones

Para salvar obstáculos importantes en el cálculo de integrales dobles, se han utilizado algunas prestaciones importantes de la calculadora graficadora, a saber:

- la resolución gráfica de inecuaciones.
- las gráficas dinámicas para funciones.
- la integración simbólica y numérica.

La calculadora, además de reducir el tiempo que usualmente se emplea obteniendo gráficos y haciendo cálculos, representa un recurso didáctico apreciable como medio de enseñanza y aprendizaje.

La experiencia metodológica desarrollada mostró que el uso de la tecnología:

1. Incrementa la motivación de los estudiantes por el aprendizaje.
2. Facilita el aprendizaje de la obtención de la región de integración mediante la resolución de inecuaciones y a través de la visualización y la interacción con la pantalla gráfica.
3. Contribuye al análisis de los límites de integración con el uso de curvas coordenadas a través de la graficación dinámica.
4. Contribuye a desarrollar el aprendizaje del cálculo de integrales iteradas con límites variables.

El impacto tecnológico en los ámbitos educativos es un hecho irreversible y caracterizará el quehacer pedagógico en un futuro cercano, planteando retos a los docentes, a los investigadores en Educación Matemática y a toda la estructura de dirección que toma las decisiones en cuanto a la introducción de equipos y software en el proceso de enseñanza – aprendizaje. Los ritmos de desarrollo y la presencia en toda la vida humana de los recursos informáticos obligan a las instituciones a tenerlos en cuenta y tener que transformar la propia concepción educacional (Delgado, 1998).

Referencias Bibliográficas

Carlos, E., Martín, L., Otero, M. y Rivero, R. (1986). *Integrales Múltiples*. Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Delgado, J. (1998). La enseñanza de la Matemática en el umbral del Siglo XXI. En *Cuestiones de Didáctica de la Matemática*. Argentina: Homo Sapiens Ediciones.

Farfán, R., Albert, A. y Arrieta, J. (2001). *Acercamiento Gráfico a la Resolución de Desigualdades. Cuadernos Didácticos* . México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Preiss, R. (2002). *Modelos del Cálculo Diferencial. Programación y Proyectos con Calculadora CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS*. Santiago de Chile: Colección Textos de Docencia Universitaria, Universidad Diego Portales.

Talízina, N. (1988). *Sicología de la Enseñanza*. Moscú, URSS: Editorial Progreso.
Pérez, O. (en prensa). *El arte de enseñar las Ciencias Básicas. Matemáticas. Manual de trabajo*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Adenda

Importancia del Análisis del Discurso en el Aula para la Investigación Educativa

Antonia Candela
Departamento de Investigaciones Educativas - Cinvestav
México
acandela@mail.cinvestav.mx

Introducción

En principio es necesario aclarar que en este artículo no se plantea de entrada el problema pedagógico o didáctico, sin duda importante, de cómo enseñar ciencia, ni modelos del "deber ser" o del "deber hacer" para el docente, que en último caso nunca pueden operar en un contexto complejo e intersubjetivo cuando son planteados desde fuera del aula. Tampoco se realiza un estudio evaluativo para ver si la ciencia se enseña "bien" en la escuela. Por el contrario en este trabajo se realiza una descripción detallada de cómo se construye el conocimiento científico en una escuela primaria oficial para niños de clase baja de una zona urbana marginal. La comprensión de este proceso, es necesaria como punto de partida para cualquier propuesta que pretenda mejorar la enseñanza de la ciencia en su contexto real. Si no comprendemos el sentido que los docentes y alumnos dan a sus acciones en el aula, si no entendemos cuáles son las reglas sociales que ahí dominan o las prácticas educativas que se mantienen por su eficacia y por la fuerza de la tradición, pobre y breve será nuestra incidencia en el trabajo cotidiano del aula.

En este caso el estudio la interacción social en el aula escolar se centra en la perspectiva de los alumnos. La perspectiva de los alumnos en la construcción del contenido de la ciencia en el aula es importante ya que son ellos los sujetos a educar, sujetos que generalmente han sido considerados como receptores de información, de intenciones, actitudes y valores sociales que el maestro comunica en la institución escolar, y por tanto han sido subordinados analíticamente. Interesa mostrar la activa y reflexiva participación de los niños en la negociación del conocimiento en el discurso del aula. En este trabajo se documenta el carácter de sujetos críticos que los alumnos tienen y la forma en que expresan sus propias ideas, cómo siguen o evaden las orientaciones docentes dependiendo de su nivel de acuerdo con ellas, cómo argumentan y debaten sobre puntos de vista distintos a los de otros niños o a los del maestro, cómo contribuyen o dificultan los procesos de legitimación del conocimiento y de creación de consensos en el complejo proceso de construcción del conocimiento en el aula. Se muestra esta capacidad de decisión de los alumnos, aún respetando el marco de las reglas del discurso escolar, con sus jerarquías y estructuras de poder, pero a su vez influyendo sobre éstas. La estructura y contenido de su participación pone en evidencia su competencia comunicativa y muestra, lo que cualquier maestro ha sentido dando clases, la capacidad de los niños de ser agentes sociales activos y con voluntad propia a los que hay que persuadir para que contribuyan al proceso colectivo de co-construcción del conocimiento escolar.

Este es un estudio etnográfico del discurso en el aula desde la perspectiva de análisis conversacional (Garfinkel, 1967) donde las intervenciones discursivas en situación natural (no experimental ni controlada) se estudian no sólo por su contenido gramatical y sino por su significado en el contexto de la secuencialidad con otros turnos de intervención. Así la negociación del significado incluye tanto los contenidos académicos que se van construyendo con cada intervención como las acciones por medio de las cuales se realiza esta negociación, a saber: argumentar, describir, culpar, defender, convencer, imponer, rechazar, apoyar, compartir, validar, legitimar, cuestionar, ejemplificar y otras muchas. Y en todo caso, el sentido de cada intervención se analiza a partir de la manera como la interpretan y actúan frente a ella los otros participantes (Edwards & Potter, 1992).

En el proceso discursivo del aula se afinan formas de comunicación, pero aparecen también incomprensiones, malentendidos y construcciones paralelas. Los participantes se orientan hacia la construcción de consensos, como una tarea compartida, pero también se establecen contextos argumentativos en los que se contraponen y dejan abiertas distintas opciones explicativas (Candela, 1991a, 1996). En este trabajo se describe esta riqueza y variedad de procesos, la manera en la que se involucran los alumnos y maestros en ella y cómo establecen su propio lugar en la interacción. Dentro de esta complejidad, se destaca lo que son las orientaciones del discurso hacia el consenso, porque, como se verá más adelante, estas tendencias son pistas de lo que pueden ser las tareas compartidas en el aula que guían la interacción.

Participación colectiva y construcción del consenso.

El siguiente extracto es parte de la actividad se realiza en la segunda ocasión en que un grupo de 5º grado de una escuela primaria de una zona marginal de la ciudad de México, trabaja sobre el tema de la gravedad en la clase de ciencias. La actividad, propuesta en el libro de texto, consiste en que los alumnos hagan una lista de 10 materiales, previamente propuestos por ellos mismos, del de mayor al de menor densidad. La maestra guía la tarea hacia un debate en el grupo para que se ordenen los materiales según el lugar que les corresponde en la lista de densidades decrecientes. El extracto citado muestra parte del debate que se desarrolla para decidir cuál es el material que debe de ir en el primer lugar de la lista, respondiendo a la pregunta de la maestra en la línea 118: **¿<cuál va: a: ser má:s pe:sa::do:?>**. Los niños están discutiendo si es el plomo, el acero o el cobre el que debe de ir en primer lugar como el material más pesado.

Extracto 1: "¿El acero?"

173 ** As: EL ACERO *((la mayoría a coro))*
174 * Ao: /por qué::? (.3)
175 Ma: ^a ver [(.3) quién dice que el <u>acero</u> es más
176 pesado?
177 Aa: [el acero *((Ao10, Ao11, Ao30 levantan la mano y Ao29 señala a Ao32))*
(...)
180 Ma: quién dice que el <u>cobre</u> es más pesado? (.3)
181 *((sólo Aa25, Ao17 y Ao9 levantan la mano))*
182 Ma: Y LOS DEMAS QUE:: DI:CEN?
183 Aa: que e[l <u>acero</u>
184 Ao: [que el acero
185 Ma: por eso (.) a v::er (.)
186 levanten la mano los que digan que >el <u>cobre</u>
187 es /más pesado<
188 *((sólo Ao12 y Ao19 levantan la mano))*
189 As: Uh:::::: *((burla))*

190		**Ma:**	**levanten la mano los que digan que**
191			**>el <u>acero</u> es /más pesado<**
192			*((como 14 niños levantan la mano: Ao1, Ao2, Ao3, Ao9, Ao10, Ao11, Aa15,*
193			*Aa16, Ao17, Ao27, Ao28, Ao30, Ao32))*
194		**Ma:**	**Eso si:: (.2)**
195			*((Aa14 y Aa15 comentan una con otra:))*
196		**Aa:**	**yo ya iba a decir que el plomo**
197		**Aa:**	**no:: el plomo no:**
198			
199		**Ma:**	**^y los que no levantan la mano**
200			**QUE:: <u>DI::CEN</u>? (.3)**
201		**Ao:**	**/nAda**
202		**As:**	**/je: je: je:** *((unos 5 alumnos))*
203		**Ao8:**	**QUE NINGUNO ES PESA:DO**
204		**As:**	**/ja: ja: ja:** *((casi no se escucha la risa))*
205		**Ma:**	**QUE NINGUNO ES PE<u>SA::DO</u>?**
206		**As:**	**no::** *((dicen varios, de los que siguen con la mano levantada a favor del acero))*
207	**=>**	**Ma:**	**cuál se te hace más pesa:do (.) Andres?**
208		**Andr:**	**el acero** *((de por donde está Ao8))*
209		**Ma:**	**a ver (.2) <entonces>**
210	**=>**		**<u>TODOS</u> ESTARI::AMOS DE ACUERDO QUE EN PRIMER**
211			**LUGAR TENDRIA QUE ESTAR EL <u>ACERO:</u>?**
212	*****	**As:**	**claro** *((varios))*
213	*****	**As:**	**eh: eh: eh:** *((en señal de triunfo))*
214	*****	**Ma:**	**SI O NO::?**
215	*****	**As:**	**si** *((varios))*
216	*****	**Aa:**	**uh:::** *((entonación de triunfo))*
217	*****	**Ma:**	**EN SEGUNDO LUGAR ESTARI::A?**
218	*****	**As:**	**EL PLOMO** *((casi todos a coro))*
219	*****		**(.2)** *((gesto de molestia, de la maestra))*

La maestra busca el consenso al preguntar, en voz alta, qué dicen los alumnos que no se expresaron y pedir que todos los alumnos expresen su opinión levantando la mano. En éste proceso de orquestación de un creciente consenso (de 4 a 14 alumnos) la maestra acepta la manifestación colectiva de aproximadamente la mitad del grupo pero vuelve a exigir, de manera enfática, la opinión de los demás niños, con lo que se pone en evidencia su orientación hacia el establecimiento del consenso en vez de imponer una versión que ella comparta pero que no convenza a todos los niños.

Los recursos discursivos de la maestra para orquestar el consenso se desplazan, del manejo de la estructura preferencial -que rechaza u acepta versiones-, hacia la solicitud de que todos los alumnos se pronuncien por una u otra opción. Sólo en la secuencia entre las líneas 201 y 206 se vuelve a expresar una confrontación de puntos de vista entre los alumnos y la maestra. Al final del extracto la maestra hace un movimiento discursivo para darle forma gramatical de unanimidad a las diversas manifestaciones, aún manteniendo la posibilidad de la diferencia hasta el final. Son estos rasgos los que muestran una orientación docente hacia el consenso en vez de a la imposición.

En cuanto a la participación infantil, también podemos decir que tiene una orientación hacia el consenso, pues aunque ellos no dejan de manifestar ciertos desacuerdos, al mismo tiempo parecen tomar en cuenta que se está orquestando un acuerdo en torno al acero. Por ejemplo, la conversación privada de las dos niñas parece indicar que ellas priorizan la orientación hacia el consenso que se está manifestando en el aula sobre su opinión personal acerca de los materiales.

Por otro lado, el análisis de este extracto ejemplifica la complejidad de los acuerdos colectivos que si bien se pueden definir como consensuales en cuanto a que no hay manifestaciones en contra, están sostenidos sobre una amplia variedad de posturas diversas frente al contenido del acuerdo. Dicho de otra manera, de esta situación puede concluirse que las versiones verbalmente aceptadas no necesariamente representan versiones compartidas. La versión aceptada puede ser el resultado de una negociación entre una variedad de posiciones con diferente grado de identificación con ella, incluso donde algunas de las partes se han sometido, o han aceptado el compromiso implícito, por el momento, pero mantienen su versión para manifestarla en condiciones más favorables. Esta variedad de posturas frente a la versión aceptada pueden influir sobre el desarrollo del discurso posterior a través del contexto creado en la interacción. Sin embargo, en cualquier caso, lo que sí es notorio es la orientación de todos los participantes hacia el consenso aceptando que una opción se establezca como la colectiva.

Demanda de una versión legitimada

A continuación se analizará un fragmento en el que se muestra claramente que la orientación hacia el consenso, hacia construir una versión legitimada del contenido en el aula no es exclusiva del docente sino que es también demandada por los propios alumnos que piden conocer cuál es el conocimiento correcto. El siguiente extracto es parte de otra clase de 5º grado en la que en este caso un maestro está también haciendo la actividad de hacer una lista de los materiales más densos a los menos densos. El maestro pidió que cada uno de los niños hiciera su lista de acuerdo a lo que considerara y en la siguiente interacción él está planteando su posición al respecto del orden de los materiales, pero sin imponer esta versión como la correcta.

Extracto 2: "Maestro, no sea así"

287 Mo: °yo voy a (.) yo voy a hacer mi lista también (.)
288 porque yo no la hice°
289 Aos: Ahh:::::: ((*como de decepción*))
290 Mo: ustedes hicieron su li:::sta:: vamos ver si ésta
291 más o menos es la mía, no? (.) este:: (.) aquí::
292 para mí iría aquí el plástico (.) ^conste que
293 estoy ^[DICIENDO (.2) PARA ^pa:ra: mi::: (.2)
((*el maestro escribe su lista en el pizarrón mientras varios*
alumnos protestan gritando))
294 Ao: [NO::::::::::
295 Mo: yo no estoy diciendo que sea ésta la <u>verdad</u> (.)
296 porque yo tampoco se la verdad absoluta
297 => Aa: MAE::STRO (.) NO SEA ASI::

Resulta interesante que el maestro plantee su versión como una versión alternativa, no necesariamente verdadera, igualmente válida que la de los alumnos y que explícitamente hable de que él no tiene la verdad absoluta para justificar el derecho a hacer una lista personal y como respuesta a la protesta de muchos alumnos gritando **"NO::::::::::"**. La justificación de las líneas 295 y 296 provoca el reclamo directo y en voz alta, de una niña:

297 => Aa: MAE::STRO (.) NO SEA ASI::

El planteamiento relativista del maestro a lo largo de toda la actividad desconcierta a los alumnos y provoca rechazo confirmando, en cierto sentido, que parte de su experiencia escolar y sus expectativas tienen que ver con la construcción de una versión legítima del conocimiento frente a la cual ellos evalúan su versión como "correcta" o "incorrecta". Curiosamente un contexto de fuerte discusión, como es el creado en este momento en el aula, no es necesariamente producido por una inclinación hacia la argumentación sino que parece ser una demanda hacia la validación de una versión sobre las demás, o sea, una exigencia infantil de que se construya una versión "verdadera".

En este caso la intervención del maestro trata de justificar su posición mientras los alumnos participan evaluando la misma a través de diversas formas de rechazo (manifestación de decepcíon, negaciones, gritos de protesta y demanda de que el maestro no actúe de esa manera).

Me parece que estos extractos son muy interesantes en cuanto a mostrar una situación en la que el maestro hace explícitas las reglas de la interacción escolar como: **"NO LO VAMOS A HACER POR MAYORIA", "Lo único que quiero es ver es más o menos, <quiénes fueron los que escogieron <u>e:so:</u>",** ambas respuestas **"vamos a ponerl(as) como buen(as)" "ESO ES LO QUE YO PIENSO" "yo tampoco se la verdad absoluta".** Tomando en cuenta el planteamiento de Edwards y Mercer (1987) sobre el carácter implícito de las reglas escolares, esta afirmación se puede complementar aclarando que las reglas son implícitas cuando los participantes las siguen, pero se hacen explícitas cuando éstas son violadas. Estos extractos también muestran que las reglas no sólo operan por imposición de los maestros, sino que son asumidas por los estudiantes que reclaman cuando éstas no se cumplen.

Conclusiones

Se ha mostrado que la orientación del discurso hacia la construcción del consenso es una tendencia del discurso en el aula en esta escuela primaria, aún en las ocasiones en las que la confrontación entre versiones alternativas prevalece frente al acuerdo. Con los ejemplos analizados se puede ver que la orientación hacia el establecimiento de consensos es una de esas tareas que parece plenamente compartida por todos los participantes de la interacción en el aula, aún en los casos en los que no se comparten las versiones sobre el contenido. Se encuentra que no sólo los maestros tratan de llegar a acuerdos sino que también los alumnos demandan que se establezca una versión de consenso cuando el maestro pretende dejar abiertas varias posibilidades interpretativas. Sin embargo, los alumnos no aceptan cualquier versión aunque venga de la autoridad, sino que actúan de manera que los maestros tienen que justificar sus acciones para convencerlos y que la versión que se establezca sea por consenso. El consenso aparece como un recurso para establecer la verdad en el aula, pero como un recurso también en debate en la medida en que cada participante, trata de que el consenso se construya en torno a su versión. Esta orientación parece ser una práctica cotidiana, al menos dentro de ciertos estilos de trabajo docente.

A diferencia de las conclusiones de Edwards y Mercer (1987) acerca de que los docentes ocultan su punto de vista o lo imponen sobre los alumnos, en los análisis realizados la versión docente no se oculta ni tiene asignada automáticamente una jerarquía distinta a las versiones de los alumnos. Tal vez puede decirse que cuando las reglas de la interacción escolar se siguen, éstas se mantienen implícitas, pero que cuando se violan (Grimshaw, 1992), o aparecen dificultades en la interacción, las reglas se explicitan. Esto puede ser un argumento contra su carácter impositivo y a favor de su carácter consensual, ya que cuando aparece una situación de excepción el maestro las incluye en el discurso y con eso parece abrirlas a la negociación, como de hecho ocurre en los casos analizados.

Referencias Bibliográficas

Candela, A. (1991). Argumentación y conocimiento científico escolar, *Infancia y Aprendizaje* 55, 13-28.

Candela, A. (1996). La construcción discursiva de contextos argumentativos en la enseñanza de ciencias. En: C. Coll & D. Edwards (Eds) *Enseñanza, aprendizaje y discurso en el aula: Aproximaciones al estudio del discurso educacional*. Madrid: Fundación Infancia y Aprendizaje. 99-116 (Publicado también en inglés como: Candela, A. (1997). The Discursive Construction of Argumentative Contexts in Science Education. En: C. Coll, & D. Edwards (Eds) Teaching, learning and classroom discourse: Approaches to the study of the educational discourse. Madrid: Infancia y Aprendizaje.89-106)

Edwards, D. y Mercer, N. (1988). El Conocimiento Compartido: el Desarrollo de la Comprensión en el Aula. *Temas de Educ.* Barcelona: Paidós-MEC. Versión original: Common Knowledge: the Development of Understanding in the Classroom. London, New York: Methuen and Co. Ltd. (1987).

Edwards, D. y Potter, J. (1992). *Discursive Psycology.* London: Sage.

Garfinkel, H. (1967). *Studies in Ethnomethodology.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall.

Grimshaw, A. (COMP.) (1990). *Conflict Talk: Sociolinguistic Investigations of Arguments in Conversations,* Cambridge, Cambridge University Press.

Los Usos Sociales de la Matemática en las Ciencias Prácticas de la Cultura Maya: Un Estudio Socioepistemológico

Ricardo Cantoral y Olda Covián
Cinvestav IPN. México.
rcantor@cinvestav.mx, oncovian@cinvestav.mx
Socioepistemología - Medio Superior y Superior

Resumen

El presente trabajo plantea el estudio del conocimiento matemático de la cultura maya desde la aproximación socioepistemológica, ya que se aporta una visión diferente de las que suelen abordarse en la literatura: antropológica o etnográfica entre otras. Se plantea el estudio de prácticas sociales que se encuentran en la cultura maya y que son a la vez generadoras de conocimiento matemático.

Introducción

La maya ha sido, en la historia, una cultura símbolo de conocimiento y desde sus orígenes fueron una cultura digna del estudio académico como lo señala Arzápalo (1993).
Al igual que otras culturas, la griega o la babilónica, ella encierra en su historia una gran riqueza de conocimiento especializado. Los antiguos mayas desarrollaron por ejemplo actividades como la agricultura y el comercio, pero tal vez lo más asombroso haya sido la organización social y económica que alcanzaron, lo que se considera explica su permanencia y florecimiento durante tanto tiempo.

En el campo de las ciencias, desarrollaron un profundo conocimiento en astronomía y matemáticas, una cultura en la que el tiempo jugaba un papel muy importante, observaban fenómenos que sucedían en su entorno, los climatológicos, las épocas de lluvia, los eclipses y al querer controlarlos se vieron en la necesidad de observarlos y quizás no entenderlos, pero sí poder predecir cuándo sucederían y así poder aplicarlos en sus actividades cotidianas (Baeza, 2003a).
Eran grandes observadores del firmamento y de la tierra, tal vez el origen de todo su conocimiento sea este, ya que, obtuvieron conclusiones muy importantes.
La creación, en su sistema numérico, de la noción del cero y el haber acuñado un símbolo para él es una aportación invaluable y no cabe duda que tuvieran un tipo de pensamiento matemático (Struik, 1980).

La investigación que aquí se reporta, estudia cómo el saber práctico ayudó al desarrollo del conocimiento matemático y cómo este fue empleado en labores como agricultura, astronomía o arquitectura.

Este trabajo presenta el momento en el cuál se encuentra un proyecto de investigación en curso, mencionando el marco teórico, las prácticas que se consideran creadoras de conocimiento matemático en la cultura maya y la metodología que se sigue.

Marco Teórico

En la Matemática Educativa, el estudio del conocimiento matemático en ambientes socioculturales ha venido desarrollándose como resultado de una evolución y como necesidad para explicar fenómenos didácticos. Podemos mencionar los estudios de corte antropológico en los que se reconoce el desarrollo de conocimiento matemático en ciertas culturas, como la babilónica o la inca, también estudio de corte etnográfico del que se desprende la *Etnomatemática que reconoce el origen de prácticas de corte matemático, como contar, medir, pesar, y otras.* (D' Ambrosio, 1994). El estudio de la historia de la matemática ha sufrido una evolución, ya que surge una corriente de historiadores que influidos por la teoría del materialismos dialéctico de Marx, reconocen la influencia de la sociedad en la historia del conocimiento de la ciencia y del conocimiento matemático, reconocen también la existencia y el papel de la sociedad que influye en la conciencia de los creadores del conocimiento, por ejemplo, a Newton, le fue posible crear sus leyes debido a las circunstancias sociales que se desarrollaron y los elementos se prestaron para desarrollar éste conocimiento. Por ejemplo: *Reconocen la influencia de la agricultura, comercio y manufactura, la guerra, la ingeniería y la filosofía, la física y la astronomía que influyeron en la creación del conocimiento matemático.* (Struik, 1980). Estas visiones son tales que reconocen la sociedad como factor principal en el desarrollo del conocimiento matemático.
La investigación que se presenta reconoce la necesidad de efectuar un estudio de corte cultural bajo el enfoque de la aproximación socioepistemológica. La socioepistemología es una aproximación teórica que explica la naturaleza del conocimiento matemático a la luz de ciertas prácticas socialmente establecidas. Para explicar mejor esto abordaremos la socioepistemología de la siguiente manera, se explicará la manera como se ha visto hasta el momento la aproximación con su problemática original y después se tratará de dar un panorama de la necesidad que se tiene del estudio que se plantea.

La aproximación socioepistemológica es una aproximación sistémica que permite tratar en forma articulada con las cuatro componentes fundamentales de la construcción social del conocimiento a saber: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de los cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. (Cantoral, 2000)

Ésta aproximación busca reconocer la naturaleza del conocimiento matemático a través de prácticas socialmente establecidas, y que se han institucionalizado a través del paso de los años. *Estudios de corte socioepistemológico buscan otorgar un estatus de construcción de conocimiento matemático al sistema social y sus actores, admitiendo sus prácticas cotidianas y el saber que de ellas se deriva, como el de las etnias, el producido por sociedades que son sometidos mental o físicamente, el que desarrollan grupos sociales específicos (obreros, campesinos, comerciantes, políticos, etc.) e incluso aquel que constituyen los educadores, a través de pedagogías o libros para la enseñanza de una determinada área.* (Castañeda, 2002)

La principal hipótesis de la aproximación socioepistemológica es que la creación de conocimiento matemático se rige por prácticas sociales que reconocen, por ejemplo, a la predicción como norma del conocimiento que ahora conocemos por Cálculo.
Se tiene entonces la necesidad de estudiar una cultura, en específico la maya, para analizar las prácticas que provienen de la actividad humana y así poder dar a la socioepistemología evidencia de estudio cultural.

La actividad humana es algo que todos desarrollamos, por ejemplo podemos reconocer actividades que son necesariamente fisiológicas, como el comer o dormir, pero existen actividades que son de origen social, actividades que solamente los humanos desarrollamos estando en sociedad, como por ejemplo, la geometrización del espacio. Herodoto afirma que es debido a la necesidad que se tenía de medir terrenos, la sociedad estando ya establecida genera la actividad humana y comienza a medir, pero entonces surge la práctica de medición. Ésta práctica es reconocida e institucionalizada por generaciones y llega a ser parte esencial de la Geometría que conocemos en la actualidad.

Se plantea en la siguiente investigación reconocer estas prácticas que son de origen empírico, pero por su carácter funcional llegan a institucionalizarse y dan origen a saberes matemáticos.

Las ciencias prácticas de la cultura maya

La cultura maya surgió en tierras de El Salvador, Guatemala, Belice, Chiapas y Yucatán en México, cuyos vestigios mas antiguos que se tienen son de hace 20,000 años, alcanzando su desarrollo intelectual en el período clásico alrededor del 600 d. c. Desarrollaron sus conocimientos en escritura jeroglífica, en la matemática, en las ciencias y artes como la astronomía, la escultura y la pintura; la medicina, la arquitectura y la ingeniería.

Tomado del Popol Vuh podemos ver un ejemplo del posible origen del conocimiento en geometría de dicha cultura. *El universo maya es un cuadrado plano delimitado por un lagarto cuyo cuerpo está cubierto de símbolos planetarios. Dentro de este cuadrado se ubican los tres niveles cósmicos: el cielo, la tierra y el inframundo. Del centro de la tierra nace una gran Ceiba, cuyo tronco y ramas sostienen el cielo y cuyas raíces penetran en el inframundo. Cada una de las esquinas del cuadrado representa un punto cardinal, y a cada uno le ha sido asignado un color. Al norte le corresponde el blanco, al sur, el amarillo; al este (el punto mas importante para esta civilización), el rojo y al oeste, el negro. Los mayas conciben un quinto punto cardinal, el centro, al que le asignan el color verde. En cada una de las primeras cuatro direcciones, exactamente en los ángulos, habita un Bacab o dios cargador, cuya misión es sostener con las manos en alto una parte del universo. De los bacabes depende que las estrellas, los planetas y demás cuerpos celestes permanezcan eternamente en su sitio.* (Thompson, 1959).

Las construcciones cumplían con esta forma del universo, orientados hacia el este por donde surge el sol, y plataformas creadas con los niveles del inframundo, cuadradas y conservando el punto central. Esta concepción esta presente en la construcción de sus viviendas.

Los mayas eran una cultura en la que el tiempo jugaba un papel muy importante y de esto surge el conocimiento en Astronomía y como consecuencia la matemática, ya que tuvieron la necesidad de crear un calendario para medir el tiempo y para contar los días entonces crearon su numeración con base 20, la cual ayudó a desarrollar los conocimientos en aritmética. El descubrimiento de capital importancia fue la utilización del cero, ya que este es un conocimiento que se desarrolló como consecuencia de la concepción que tenían del tiempo y universo. Utilizaban el cero para referirse a las fechas y períodos de tiempo en diversos monumentos y textos. Sin embargo, en ocasiones, éste no representaba la ausencia de unidades, el conjunto vacío o nada, sino que denotaba la terminación de un período de tiempo o fecha y el inicio del siguiente. La transición era su principal característica

Tal vez la actividad que los ayudó o llevó a crear esto fue la predicción, ya que, necesitaban saber el momento de ocurrencia de los eventos y fenómenos para seguir manteniendo su cultura.

Las prácticas que desarrollaron los mayas fueron el conteo, la construcción y la medición del tiempo, entre otras pero hasta el momento las que identificamos como generadoras de conocimiento matemático son éstas. Los saberes que desarrollaron fueron evolucionando e institucionalizando.

Es importante hacer notar que el saber altamente especializado que poseían los mayas era producido por las prácticas humanas, que teniendo un origen empírico llevan a la creación de conocimiento matemático.

Metodología

La presente investigación busca reconocer las prácticas de origen empírico que se fueron estableciendo socialmente o institucionalizando a través del tiempo, identificando los saberes que hacen del conocimiento matemático algo funcional en la cultura maya.

La pregunta de investigación que nos planteamos es: ¿Cuáles fueron las ciencias prácticas que dieron origen a los conocimientos matemáticos en la cultura maya?, tomando en cuenta que esta pregunta puede ir modificándose en la evolución de la investigación. Para responder a nuestra pregunta, identificamos una ciencia práctica y estudiaremos el conocimiento matemático que se encuentra en ella. Basados en los resultados obtenidos por los estudios de campo que efectuarón las facultades de arquitectura y antropología de la Universidad Autónoma de Yucatán, editando un manual de construcción de la choza maya. Nosotros en la investigación que planteamos, tomamos éste material y estudiamos el contenido matemático, tratando de dar teoría a la práctica que comunmente se maneja en la construcción de estas chozas.

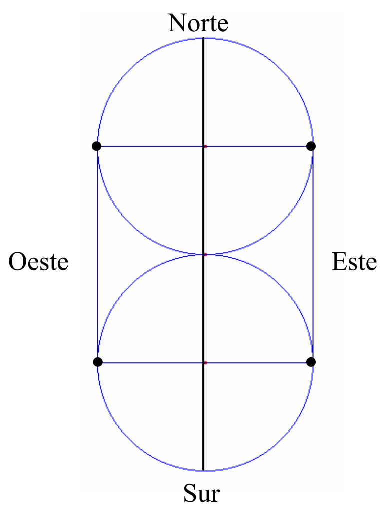
La construcción se considera una actividad humana institucionalizada, ya que evoluciona a través de los tiempos de acuerdo a las necesidades y aportaciones de la sociedad, en específico la maya.

La construcción de pirámides es lo mas representativo en la cultura maya, ya que son especiales debido a la forma y posición de su construcción, así como la evidencia que se puede encontrar a cerca de ésta cultura, sin embargo una práctica que se considera la cuna de la cultura maya es la construcción de sus viviendas.

La base de construcción es de acuerdo a las características de quien la habita, tomando como principal papel la medida del hombre que va a formar familia. Se toma como base la medida de la vara, que corresponde a la mitad de la altura del cuerpo del hombre, Esto para que la persona al llegar de su labor cotidiana, que generalmente es la agricultura, tenga un lecho adecuado para descansar.

La forma de la casa es cuasi elíptica, se construye sobre una base que consta de un cuadrado en el centro y dos semi-circunferencias situadas en los lados opuestos de los cuadrados.

Podemos observar la siguiente figura:



- Se sitúa la línea principal orientada de norte a sur, dejando que el viento circule de este a oeste.
- Sobre la línea de situan dos circunferencias tangentes con radios 3 varas cada una.
- Se sitúan posteriormente los cuatro puntos donde se encontraran las columnas de la casa. Estos se encuentran justamente en los puntos donde se intersecta la mediatriz del Diámetro de la circunferencia.

Ésta construcción nos muestra que se encuentran en juego conocimiento matemático de geometría, pero que son posibles en su desarrollo debido a que provienen de prácticas que se fueron institucionalizando.

El siguiente paso del proyecto es identificar estás practicas en la construcción de la choza maya, como la proporción del cuerpo, las características de la casa para ser resitentes a las inclemencias del tiempo o a la temperatura de la región que en dicho caso es extremosa humeda cálida, por tanto se estudiaran los conocimientos relacionados con la física y la ingeniería, para explicar el papel que juega el conocimiento matemático en las prácticas de la cultura maya.

Referencias Bibliográficas

Baeza, H. (2003a). *Los antiguos mayas, un enfoque breve de una cultura milenaria*. Mérida Yucatán México. Editorial Dante.

Baeza, H. (2003b). *Relación de las cosas de Yucatán, Fray Diego de Landa. La cultura Maya según el testimonio del Obispo de Yucatán en 1566*. Mérida Yucatán México. Editorial Dante.

Cantoral, R. (2000). Sobre la construcción social del conocimiento matemático avanzado. *Acta de la Semana de las Matemáticas universidad de Salamanca.* pp. 97-110

Castañeda, A. (2002). Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica. *Relime* (5), 1, pp. 27-44.

D' Ambrosio U. (1994). Ethnomathematics, the Nature of Mathematics and Mathematics Education. Of Mathematics. *Education and Philosophy: An International Perspective.* pp 230-242

Struik, D. *(1980). Historia Concisa de las Matemáticas.* México, Consejo editorial del IPN

Thompson J. (1959). *Grandeza y Decadencia de los Mayas*. México, Fondo de Cultura Económica

Tecnologías de Información y Comunicación en el Postgrado de Enseñanza de la Matemática. Caso UNEG.

Sandra L. Castillo
Universidad Nacional Experimental de Guayana
Venezuela
scastillo@uneg.edu.ve
Tecnología Avanzada – Nivel Superior

Resumen

Se reporta a continuación los avances de una investigación que se desarrolla en la Universidad Nacional Experimental de Guayana en Venezuela respecto a la generación de un marco teórico que sustente la cultura escolar matemática[*] que los participantes del Postgrado en Enseñanza de la Matemática tienen respecto al uso de las Tecnologías de Información y Comunicación en el campo de la Matemática Educativa. Se hace uso del modelo de Glaser y Strauss y como herramienta para el análisis de datos se utiliza el ATLAS/ti. Se requiere, por tanto, del cambio urgente en el diseño curricular de los programas académicos que exigen una re-estructuración conducente a la esperada incorporación de las Tecnologías de Información y Comunicación.

Introducción

Siendo la investigación una de las funciones que debe cumplir todo docente que labora y presta sus servicios en cualquiera de las Universidades del país, se hace necesaria la formación de investigadores que bien sea desde un lugar muy particular -aula de clases, un laboratorio- o uno muy general -una comunidad, una etnia, entre otros- puedan realizar investigación educativa de altura llegando muchas veces no sólo a reproducir investigaciones hechas en otras latitudes sino, más importante aun, a generar teoría, entendida ésta como un conjunto de conceptos articulados, que surgen como producto de un proceso reflexivo de construcción de conocimiento para explicar e interpretar una realidad en un contexto histórico y cultural particular.

Existen ciertos elementos que definen la teoría, es decir, hay características comunes a la generalidad de las concepciones de teorías y esos elementos como el sustento, el propósito, el contexto, lo sistematizada que debe ser una teoría y su socialización se pueden evidenciar claramente en una teoría que emerja de la utilización del modelo de la teoría fundamentada propuesto por Glaser y Strauss.

El proceso reflexivo de construcción de conocimientos, que en la teoría fundamentada se sucede, reviste su importancia a través del Método Comparativo Constante y el Muestreo Teórico. Más adelante se verá cómo es el proceso de generación de teorías donde se resalta el modelo estructurado y las distintas fases del desarrollo de dicho proceso. Pandit (1996), explica de manera sencilla que en cada fase se producen una serie de pasos que conllevan finalmente a la formulación de teorías divulgadas mediante la publicación de resultados.

Investigaciones recientes en las Ciencias de la Educación y precisamente aprovechando las bondades que la Informática y la Computación brindan en el campo de la investigación, se

---

[*] Cultura escolar matemática entendida como el conjunto de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que se generan en un centro educativo (Parra, 2002)

tiene que este modelo de generación de teorías, ha ganado más adeptos en sus investigaciones, por cuanto el procesamiento de datos puede llegar a ejecutarse en menor tiempo al poderlo hacer utilizando software para tal fin. Estudios e investigaciones que antes se hacían tediosos por la cantidad de información que se pudiera procesar, ahora se hacen de manera rápida y eficiente al optimizar los procesos de categorización y clasificación, utilizando paquetes de computación como Ethnograph, Hyper-Research, Aquad, Nud-ist, ATLAS/ti, entre otros (Martínez, 1999). En este caso se hará mayor énfasis en el uso del ATLASti, por su versatilidad en el procesamiento de datos cualitativos.
Finalmente en este artículo, se presenta una corta reflexión de la importancia que tiene este modelo de investigación cualitativa en los avances sobre la Enseñanza de la Matemática haciendo énfasis en la incorporación de las Tecnologías de Información y Comunicación.

Elementos y características de la Teoría Fundamentada

Elementos: Siendo el interaccionismo simbólico donde la Teoría Fundamentada tiene sus raíces (Rodríguez, G; Flores, J; García, E. 1996) y partiendo del hecho que el enfoque principal de este método es descubrir teorías inmersas en la realidad a partir de datos obtenidos sistemáticamente y analizados a través de la comparación, se establecen tres elementos básicos en la Teoría fundamentada; las categorías, las propiedades y las hipótesis (Glaser y Strauss, 1967)
Se muestra en el Cuadro 1, una simple representación de lo que pudiera ser el acercamiento al proceso de generación de teoría Demás está decir que al hablar de cultura escolar se involucran directamente estas dos unidades de análisis: los facilitadores y los aprendices.

Cuadro 1
Elementos que componen la teoría fundamentada

CATEGORÍAS	PROPIEDADES	HIPÓTESIS
Estrategias de enseñanza	Conocimiento de las disciplinas Informática Educativa y Matemática. Utilización de Tecnologías de Información y Comunicación en el aula de clases.	A mayor conocimiento de la disciplina Informática Educativa, mayor es la producción de estrategias metodológicas para enseñar contenido matemático haciendo uso de las Tecnologías de Información y Comunicación.

Características: A continuación se nombran algunas de las características más resaltantes encontradas en la revisión bibliográfica (Martínez, 1994; Rodríguez, G; Flores, J; García, E.,1996; Glaser y Strauss, 1967)

- La fuente para la generación de la teoría es el dato empírico
- Los elementos de la teoría son descubiertos a partir del análisis de los datos.
- El razonamiento predominante es el inductivo.
- El énfasis del modelo está en la construcción de la teoría
- El proceso de validación es permanente

- El método general de análisis es el Método Comparativo Constante (MCC)
- La comparación constante de datos la convierte en una "teoría en desarrollo".
- El interés es la densidad conceptual más que la descripción densa
- El uso de la teoría ha sido impulsado por el análisis cualitativo asistido por computadoras.

Cabe destacar que la metodología empleada por la teoría fundamentada tiene mayores seguidores en el campo de las ciencias sociales, encontrando numerosas investigaciones cualitativas en el área de la Educación, en parte la razón de este artículo es precisamente profundizar y apropiarse de los elementos, estrategias y tipos de teorías a fin de tomar decisiones fundamentales antes de emprender una investigación en la educación matemática.

Estrategias para desarrollar Teoría Fundamentada

Glaser y Strauss establecen dos estrategias para garantizar que se desarrolle la teoría fundamentada: el Muestreo Teórico (MT) y el Método Comparativo Constante (MCC).

El Muestreo Teórico se caracteriza por ser el proceso que engloba la recolección de datos para luego ser analizados y finalmente generar teoría. Permite al investigador seleccionar nuevos casos a estudiar según su potencial para refinar o expandir los conceptos y teorías ya desarrolladas. Lo importante no es el número de casos, sino la potencialidad de cada uno para ayudar al investigador a desarrollar una mayor comprensión teórica sobre el área de estudio (Glaser y Strauss, 1967; Rodríguez y otros, 1996)
El proceso de recolección de datos además de permitir al investigador recolectar, codificar y analizar, le da potestad a él, para decidir cual es el dato que debe seguir recolectando y dónde encontrarlo a medida que se va desarrollando la investigación y va emergiendo la teoría.

El Método Comparativo Constante **(MCC):** a través de este método el investigador codifica y analiza los datos en forma simultánea para desarrollar conceptos. Básicamente lo que permite hacer el método es la contrastación de las categorías, propiedades e hipótesis que surgen a lo largo de la investigación en diferentes contextos inclusive.
Glaser y Strauss plantean para la ejecución del Método Comparativo Constante cuatro pasos o fases: 1) Comparación de incidentes; 2) Integración de las categorías y propiedades; 3) Delimitación de la teoría y 4) Redacción de la teoría.
A continuación una breve descripción de cada fase.

Comparación de incidentes

El investigador en esta primera fase codifica cada dato en su base de datos en tantas categorías de análisis como sea posible y en la medida que las categorías emerjan puede suceder que también emerjan nuevos datos, los cuales se podrán codificar para una categoría existente o bien para crear una nueva.
La comparación constante de los incidentes empieza a generar propiedades teóricas de la categoría. Posteriormente el investigador analista se da cuenta de los tipos de categorías que surgen; de sus dimensiones, de las condiciones bajo las cuales se minimiza, de sus consecuencias principales su relación a otras categorías y sus propiedades.

Integración de las categorías y propiedades

Esta fase permite al investigador, una vez que ha realizado toda la codificación de los datos o incidentes, hacer comparaciones entre las categorías.
Los incidentes se colocan ahora en categorías de acuerdo a reglas provisionales, en vez de por intuición. Las reglas provisionales se les da nueva forma a medida que los nuevos incidentes se coloquen en las categorías y entre tanto, las propiedades de las categorías se hacen más explícitas y las reglas menos provisionales.

Delimitación de la teoría

A medida que se acerca más el investigador a la generación de una teoría, un número menor de cambios se hacen en las reglas y ubicación de incidentes, es por ello que el investigador integra las categorías superpuestas y el número de categorías de trabajo disminuye. Es entonces, cuando Glaser y Strauss argumentan que la versión final de la regla de la categoría emerge, es decir, conceptos teóricos surgen de los datos.
En el momento que se empieza a delimitar la teoría ya se puede afirmar que la saturación teórica se ha producido, por lo que se debe constatar que no queda ninguna categoría sin codificarse. Se pasa entonces a la siguiente fase.

Proceso de construcción de Teoría Fundamentada

En esta sección del presente artículo la autora hace una descripción de las fases del proceso de construcción de la teoría fundamentada, en el Cuadro 2 se pretende hacer una acercamiento del modelo del proceso descrito por Pandit (1996) y el propuesto por Valles (2000), dado el alto grado de correspondencia en la estructura propuesta por cada uno de ellos para dar explicación al proceso de construcción de teoría fundamentada y los pasos y operaciones en el procedimiento de la *grounded theory,* haciendo uso del programa de computadora ATLASti.

Cuadro 2

Correspondencia entre las fases y los pasos para generar teoría a través del esquema de Glaser y Strauss haciendo uso del ATLASti

Fases del proceso de construcción de teoría (Pandit, 1996)	**Pasos y operaciones en el procedimiento (Valles, 2000) ATLASti**
Diseño de la investigación Paso 1: Revisión de la literatura Paso 2: Selección de los casos	De los datos brutos a la categorización inicial
Fase de recolección de los datos Paso 3: Desarrollo de un riguroso protocolo Paso 4: Entrada en el campo de investigación	El desarrollo de sus categorías iniciales

Fase de ordenamiento de los datos Paso 5: Ordenamiento de los datos	
Fase de análisis de los datos Paso 6: Análisis de los datos relacionados con el primer caso Paso 7: Muestreo Teórico Paso 8: Acercamiento al cierre	La integración de categorías y sus propiedades La delimitación de la Teoría
Fase de comparación con la literatura Paso 9: Comparar la teoría emergente con la literatura existente	La escritura de la Teoría

Al pasearse por las dos columnas de la tabla aparentemente parecieran no ser iguales ni correspondientes las fases una a una, sin embargo en detalle, se puede observar que existe una alta correlación entre ambas, sólo que los pasos de una son quizá más pormenorizados que en la otra, lo que no quiere decir que no se pueda establecer correlaciones.

A manera de reflexión

Partiendo de la necesidad de promover la investigación educativa (Inciarte, A. 1998) y dada la importancia que involucra la incorporación de las Tecnologías de Información y Comunicación en el proceso educativo llevado a cabo en las diferentes áreas del saber (Cabero, J. 2003) y muy especialmente en la Educación Matemática que es la disciplina donde se quiere aplicar el modelo de Glaser y Strauss para realizar una investigación cualitativa que permita establecer un marco teórico que sustente la formulación de la cultura escolar que los facilitadores y los aprendices tienen respecto al uso de las Tecnologías de Información y Comunicación en la Educación Matemática en todos los niveles educativos; unida al auge de un cambio urgente en el diseño curricular de los programas del sistema educativo que requieren de una re-estructuración o replanteamiento conducente a la esperada incorporación de las TICs en los programas educativos, se establece que:

- El modelo propuesto por Glaser y Strauss para la investigación cualitativa que la autora va a realizar es completamente pertinente.
- Las estrategias de la teoría fundamentada como el Método Comparativo Constante y el Muestreo Teórico ofrecen una metodología altamente estructurada que permite realizar comparaciones constantes, realizar preguntas orientadas teóricamente, hacer codificación teórica y desarrollar teorías.
- En la aplicación del modelo podemos constatar que las condiciones de adecuación, comprensibilidad, generalidad y control están presentes en la teoría fundamentada propuesta por Glaser y Strauss.
- La utilización de software para el análisis de datos cualitativos, en este caso el ATLASti, ofrece múltiples ventajas en la codificación, categorización, establecimiento de categorías, planteamiento de hipótesis que convergen finalmente en la generación de teorías.

No obstante, se deben tomar en cuenta aspectos muy resaltantes de la utilización de este modelo para la investigación y es que se requiere tener experiencia como investigador para aprovechar mejor las ventajas del método ya que se debe tener paciencia y la mayor disposición de tiempo y mejor dotación de recursos; unida al uso del software que permita la concreción

respecto a la implementación práctica de las operaciones que describen: análisis, codificación y claridad al momento de definir las relaciones entre las categorías, propiedades e hipótesis.
Finalmente al hacer uso del procedimiento de generación de teoría de Glaser y Strauss se puede reforzar en el investigador el ser creativo y flexible, tener habilidad para conceptualizar, resumir y por tanto, poseer sensibilidad teórica y social.

Referencias Bibliográficas

Cabero, J. (2003). *Medios y herramientas de comunicación para la educación universitaria.* Panamá: Sucesos Publicidad.

Glaser B. L. y Strauss A. L. (1967). Applying Grounded Theory. En B. L. Glaser y A. L. Strauss, *The Discovery of Grounded Theory: Strategy for qualitative research.* (237-250). Chicago, USA: Aldine Publisher Company.

Inciarte, A. (1998). *El hacer docente y el proceso de generación de tecnología educativa.* Maracaibo, Venezuela: Ediluz

Martínez, M. (1994). *La investigación cualitativa etnográfica en Educación*. Segunda edición. México: Trillas

Martínez, M. (1999). *Taller sobre metodología cualitativa.* Universidad Nacional Experimental de Guayana. Puerto Ordaz, Venezuela: UNEG

Pandit, N. R. (1996). La creación de teoría: Una aplicación reciente del método de la teoría fundamentada. (Traducción del artículo *The Creation of Theory: A recent application of the grounded theory method). The Qualitative Report* [Revista en Línea] Disponible: http://www.nova.edu/ssss/QR/ QR2-4/index.html (Original)

Parra, H. (2002) *Cultura escolar matemática y transformación de la práctica pedagógica.* Tesis Doctoral. Universidad del Zulia. Venezuela.

Strauss, A. y Corbin, J. (1994). *Graunded Theory Methodology: An overview.* En Handbook of Quality Research. USA: Sage Public.

Rodríguez, F (s/f). *Análisis del Método Comparativo Constante.* (Traducción del artículo de Grove, R. Universidad Estatal de Pensilvania) [En línea] Disponible: html.rincondelvago.com/ metodo-comparativo-constante.html

Rodríguez, G; Flores, J; García, E. (1996). *Metodología de la Investigación Cualitativa.* España: Ediciones Aljibe.

Valles Martínez, M. S. (2000). La grounded theory y el análisis cualitativo asistido por ordenador. En M. García Ferrando, J. Ibáñez y F.Alvira (Comp.). *El análisis de la realidad social: Métodos y técnicas de investigación.* (3ra. Edición revisada; pp. 575-603). Madrid, España: Alianza Editorial.

Importancia en Matemática Educativa, de la Interrelación entre la Teoría Matemática, Técnicas Modernas de Cómputo y Problemas del Contexto Empresarial para Motivar a Docentes y Estudiantes

Josefina de las Mercedes Cribeiro
Universidad Autónoma de Coahuila, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
j_cribeiro@hotmail.com
Tecnología Avanzada – Nivel Medio

Resumen

Es urgente tratar los contenidos matemáticos de forma que docentes y estudiantes sientan la necesidad de aprender matemáticas para poder dar solución a los múltiples problemas que a nivel mundial plantean servicios tales como salud, distribución, energía, conservación del agua, etc, así como la industria moderna; en calidad, competitividad y automatización. Corresponde a los matemáticos educativos demostrar que es necesario ampliar el horizonte teórico para dar solución a problemas complejos y hacer uso de modernas técnicas computacionales para realizar los cálculos. La idea es a partir de la necesidad, buscar el respaldo técnico y teórico que permitan cumplir el objetivo de dar solución al problema. De esta forma el objetivo del estudiante lo motiva a aprender

Objetivos

1.-Motivar a los docentes de los diferentes niveles educativos a trabajar bajo la perspectiva necesidad, búsqueda, solución.
2.-Motivar a docentes y directivos a trabajar en la formación de una cultura de intercambio entre especialistas de nivel técnico, de Ingeniería, de Matemáticas y de investigación; poseedores cada uno de un perfil y formación diferente, pero con un nivel de información sobre los otros que les permita respetarse y comunicarse.

Introducción

En estos momentos es claro para los especialistas de Matemática Educativa el papel de los docentes como motivadores, diseñadores de actividades para ser desarrolladas por los estudiantes, guías, facilitadores de la construcción de conocimiento y moderadores de las discusiones en grupos. Mucho es el trabajo realizado por los especialistas e investigadores en esta dirección, sin embargo aún no logramos hacer trabajar a los estudiantes y a veces logramos que los estudiantes realicen las acciones indicadas pero solamente las realizan en forma algorítmica, aún cuando hayan sido ellos los que llegaron al algoritmo de trabajo. Despojan de todo viso de teoría el trabajo y las representaciones gráficas las recuerdan en forma fotográfica. Seguro Ud recuerda mas de un caso de estudiante inteligente que desde secundaria ha ido a verlo para consultar dudas, hacía todos los ejercicios que le dejaban de tarea y luego cuando tenía que utilizarlo en otro momento no era capaz de hacerlo. ¿Podría Ud decir las características de aprendizaje de esos estudiantes? Puede decir cuál era el motivo de su estudio y cuál el objetivo que perseguía al realizar ese estudio.

¿Qué características deben de tener las actividades que se planean?

Las actividades matemáticas están constituídas por acciones que el profesorado estructura para ser realizadas en clases por los alumnos, sin embargo un conjunto de acciones no constituyen una actividad. Para que un conjunto de acciones lleguen a ser una actividad el motivo y el objetivo de todas ellas tienen que coincidir.

Cuando el objetivo es aprobar un examen, no hay motivo para estudiar. Si tratamos de motivar con "ejemplos interesantes de su contexto familiar" se corre el riesgo que solo se les haga interesante pero que no los motive a buscar la forma de resolverlo. En cambio **si** el grupo siente la necesidad de resolver un problema que se les presenta, entonces van a unirse para tratar de darle solución y van a buscar las herramientas necesarias para hallar la solución.

Otro problema que se presenta al planear actividades es que se planea la actividad de un día, de varios días pero no la actividad de aprender un contenido. La actividad para aprender un contenido es el conjunto de acciones que debe de realizar cada individuo para llegar a apropiarse de ese contenido, estando siempre presente la unión de motivo y objetivo de apropiación del conocimiento.

Es decir que se necesita un problema detonante que los motive a alcanzar el objetivo. En un salón de clases puede que no exista un único problema detonante y sea necesario buscar varios tipos de problemas que hagan ese efecto. Los temas tienen que estar vinculadas con los intereses del grupo en deporte, temas de actualidad, áreas de oportunidad laboral.

No es suficiente con estar motivado y unidos para lograr el objetivo, hay que saber como se aprende para realizar las acciones que permiten el aprendizaje, es ahí donde el docente puede guiar al estudiante para que realice las acciones que lo llevan a la construcción del conocimiento.

La base orientadora de la actividad es la que determina el éxito, los estudiantes no saben establecer esa base orientadora y necesitan hacerlo junto con el docente hasta que aprendan a orientarse ante un nuevo problema.

Cada nueva situación problémica tiene una serie de aspectos que cubrir, uno de los primeros es la búsqueda de información y selección de material, otro es reafirmar conceptos y propiedades que se van a necesitar

Observar, identificar, representar, interpretar, analizar, sintetizar, conjeturar son acciones que tienen que estar presentes siempre que el estudiante se enfrenta a un nuevo objeto de estudio.

Para llegar a comprender un objeto de estudio se necesita observar primero sus características, identificar las características esenciales, identificarlo con conocimientos anteriores que tienen propiedades comunes, determinar su valor.

Hay que representar en el plano externo un esquema de trabajo para verificar el sistema de rasgos necesarios y suficientes, comparar con la regla lógica y sacar conclusiones. En esta etapa el contenido matemático debe de ser representado mediante diferentes registros algebraico, tabular, gráfico, de signos, verbal y trasladar estos a representaciones mentales. Esta etapa de trabajo donde el estudiante busca, descubre y construye en la enseñanza tradicional se llama explicación, solo que ahora el propio estudiante busca la explicación del fenómeno y descubre la necesidad de la teoría.

Cuando el estudiante repite una y otra vez ese esquema de trabajo aprende a realizar su propio esquema, es exactamente lo que hace un investigador cuando va a realizar una investigación.

Una perspectiva de trabajo docente-estudiantil

NECESIDAD----------------→BÚSQUEDA------------------------→SOLUCIÓN

Una vez que el estudiante tiene la necesidad de hallar la solución de un problema que le han presentado y que se le ayuda a orientarse para establecer acciones que le permitan buscar la solución, comienza la etapa de las acciones materializadas donde los estudiantes trabajan en la búsqueda de la solución, a la vez que buscan herramientas que lo ayuden en ese proceso de hallar la solución.

Es en esta etapa donde se necesita preparar un sistema de tareas donde aparezcan problemas heterogéneos, aplicados en diferentes situaciones de modo que **haga consciente la actividad** en todos sus eslabones. Los problemas planteados tienen que servir para elaborar y aplicar conocimiento, no para reproducir de memoria ni para operar mediante acciones aisladas que no llevan a una conjetura final.

Es necesario plantear situaciones que de diferentes formas, tanto gráfica como escrita en forma natural y/o de símbolos refleje la esencia del contenido del tema que se trata. La interrelación entre representaciones mentales y representaciones semióticas, ayudan a la comprensión. Para esta etapa las hojas de trabajo con uso de tecnología pueden ser una buena opción para lograr alcanzar ese objetivo. En el trabajo independiente que realiza el alumno se debe asegurar que realice en forma desplegada todas las acciones que los lleva a identificar las características esenciales y a establecer el sistema de rasgos necesarios y suficiente que caracteriza al objeto de estudio.

Hasta aquí se ha llevado a los estudiantes, según la teoría de la actividad de Galperin por las etapas de motivación, formación de la base orientadora de la acción, representación en el plano externo de un esquema de trabajo y la de acciones externas materializadas. De acuerdo con Brousseau es la fase de la acción.

El proceso de aprendizaje no ha concluido, aún faltan las fases de formulación, validación e institucionalización. Sin estas fases el conocimiento no queda establecido en el individuo y se pierde, se olvida fácilmente.

Muchos de los errores que presentan las hojas de trabajo que se elaboran es que dejan abierto el final, sin que exista el planteamiento de una conjetura y su comprobación mediante una demostración (formulación, validación). Este es el momento de destacar la importancia de la teoría para no caer en apreciaciones falsas o hechos particulares. Cuando ocurre esto, se debe de solicitar un contraejemplo que demuestre no era válida la apreciación para todos los casos.

En muchos casos el alumno no podrá solo hacer la demostración y necesitará buscar en los libros, pero ya estará interesado en ver como se demuestra y le será mas fácil entenderla y utilizar el método de demostración en otro momento. Además estará consciente de la importancia de la teoría a la hora de resolver un problema.

De acuerdo a la teoría de la actividad, se necesita ahora transitar por la etapa de las acciones en forma de lenguaje, es la etapa donde el individuo poco a poco deja de necesitar el apoyo externo y aprende a controlarse a sí mismo y a controlar a otros, transita del control externo al control interno. Esta etapa se transita mediante la discusión colectiva de los resultados alcanzados por cada individuo y cada equipo.

En la etapa verbal interna el individuo resuelve para su adentro por cuenta propia la tarea de forma detallada, consciente de las operaciones que realiza. En la etapa mental el individuo va reduciendo, sintetizando el proceso, los eslabones adquieren la forma de lenguaje interno. Aquí es donde se debe lograr, la síntesis máxima, la máxima generalización y la independencia absoluta.

Hojas como esquema de trabajo

Al enfrentar cada tema el docente puede hacer un esquema de trabajo donde contemple todas las acciones que debe de realizar el estudiante para llegar a apropiarse del conocimiento. Omitir alguna de estas acciones es no lograr un aprendizaje perdurable. Los estudiantes tienen que aprender a realizar por si mismos estas acciones para aprender, pero necesitan repetirlas una y otra vez hasta que la incorporen a su acervo cultural como la forma de aprender.
Es por eso que el docente tiene que preparar de forma muy detallada la base orientadora y el esquema de trabajo a seguir. A continuación se da un conjunto de puntos que se deben de tomar en cuenta.

TÍTULO.

I.-OBJETIVOS: Es necesario plantear los objetivos que se pretende alcance el estudiante. Estos varían de acuerdo al nivel de partida y nivel a alcanzar.

II. PROBLEMA DETONANTE DE LA MOTIVACIÓN. Hallar un problema que produzca este efecto es la parte mas difícil pues hay que situarse en el lugar de los estudiantes, sus intereses, capacidades y desarrollo de habilidades.

III.-PREPARACIÓN PREVIA: Incluye un sistema de tareas donde se realicen las acciones que se indican a continuación y formen una base orientadora para realizar la actividad y la representación en el plano externo de un esquema de trabajo.

1-Seleccionar material y observar: La orientación para estas acciones van encaminadas a buscar los antecedentes básicos para poder entender el nuevo objeto de estudio y establecer el vínculo de unión entre esos conocimientos y el que va a formarse.
2.-Identificar, interpretar y analizar: Los estudiantes por si mismos no saben realizar estas acciones, se necesita planear una serie de preguntas y tareas que lo lleven a realizarlas en forma eficiente. Poco a poco aprenden la forma de hacerlo por si mismos. Al planear el sistema de tareas se debe interactuar con diferentes representaciones semióticas y mental, buscando

identificar características esenciales y sistema de condiciones necesaria y suficientes. La tecnología computacional y hojas de trabajo brindan gran ayuda para alcanzar esos objetivos.

3.-Problemas de contexto: La búsqueda de problemas heterogéneos, lleva a tomar conciencia de los eslabones de la actividad, ayuda a establecer conjeturas y a generalizar

4.-Sintetizar las ideas principales: Casi siempre los estudiantes se pierden y no ven las ideas principales, por lo cual se necesita algunas preguntas que lo ayuden a sintetizar.

5.-Establecer conjetura.

IV.-ACCIONES EN EL AULA Y CENTRO DE CÓMPUTO:

- Integrar al grupo en equipos.
- Asignar a cada equipo una serie de ejercicios y problemas de un tipo en particular.
- Dar solución mediante un software a diferentes ejemplos y a los problemas de contexto vistos en la sesión de motivación.
- Relacionar la solución gráfica con la algebraica.
- Exponer trabajo y generar discusión.
- Establecer la conjetura grupal a partir de los casos particulares, buscando la máxima generalización.

V.-TRABAJO INDEPENDIENTE EXTRA CLASE: Las fases de validación e institucionalización requieren de otro sistema de tareas individuales extra clase.

VI.-CONCLUSIONES: Deben ser individuales y discutidas en asamblea.

UN HILO CONDUCTOR DESDE SECUNDARIA HASTA LICENCIATURA, VISTO DESDE DISTINTOS ASPECTOS PERO BAJO LA MISMA PERSPECTIVA DE TRABAJO.

Se puede considerar la función como hilo conductor junto a las Matemáticas en contexto, el desarrollo de habilidades, la formación de conceptos, la necesidad del uso de la teoría y el uso de tecnología computacional.

En secundaria es muy importante llevar a establecer relación entre variables independientes y dependientes. Este trabajo se puede hacer mediante problemas que llamen la atención de los alumnos de esa edad, utilizando hojas de trabajo, tablas de Excel y gráficos con graficadoras o Cabri. Las tablas en Excel permiten distinguir la relación entre variables independientes y dependientes ligadas por una ley de formación. También puede utilizarse para determinar el rango de valores de las variables independientes y el de las dependientes. El paso de tablas a gráficos dinámicos permite establecer diferentes representaciones del mismo problema, pasando de representaciones semióticas a mentales y viceversa, lo cual facilita la construcción del concepto de función a la vez que desarrolla capacidades y habilidades de visualización y comprensión. Un buen sistema de preguntas puede llevar a la construcción del concepto, junto con las de domino e imagen. En la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Coahuila (U.A.deC.), un grupo de especialistas dirigidos por el Dr. Humberto Madrid el M.C. Francisco Cepeda, trabajaron en el programa de Educación Matemática con Tecnología (EMAT) de Coahuila junto con especialistas del Cinvestav, quienes elaboraron de hojas de trabajo sobre el tema.

Al preguntar a los estudiantes los conceptos de las funciones trigonométricas las respuestas dadas son la razón de los lados e hipotenusa de un triángulo rectángulo. El concepto de función no ha quedado bien establecido, muchas veces obvian el argumento y las gráficas las recuerdan en forma fotográfica. Las causas que motivan estas repuestas es una falta de identificación de las características de función trigonométrica, han faltado acciones de observar, identificar, interpretar y analizar para construir el concepto, ha faltado un trabajo de representaciones diversas y de dinamismo en las representaciones gráficas. El Cabri brinda la posibilidad de mover un punto en la circunferencia de radio unitario por los cuatro cuadrantes, y observar el triángulo rectángulo construido al trazar la perpendicular al diámetro. Esta representación, junto con tablas y construcción de los gráficos a partir de las tablas, brindan diferentes representaciones para llegar al concepto. En el Instituto Tecnológico de la Región Carbonífera (I.T.E.S.R.C.) un grupo de estudiantes bajo la dirección de los Ingenieros Oscar Sánchez y Hugo Carrillo, asesorados por la Doctora Josefina Cribeiro hicieron su residencia profesional trabajando en la construcción de hojas de trabajo sobre el tema. En la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la U.A.de C., un grupo de docentes investigadores trabajan el tema mediante Cabri y hojas de trabajo para desarrollar en EMAT para Bachillerato.

En Matemáticas I de Ingeniería aparece el tema de desigualdades, el cual era tratado en el I.T.E.S.R.C. en forma algebraica antes de dar funciones, los docentes Q.B.P Alicia Reyes, y los ingenieros Hugo Carrillo, Martha Lilia Sánchez, Etel Hernández, Servando Hernández y Francisco Javier Hernández dirigidos por la Dra. Josefina Cribeiro comenzaron a tratar las desigualdades después de las funciones bajo la perspectiva de necesidad, búsqueda, solución, utilizando la hoja de esquema de trabajo, con el uso de graficadores de funciones y pasando de la representación gráfica a la algebraica y viceversa. Se trabajó considerando gráficamente hallar el subconjunto del dominio de las funciones donde las imágenes cumplen la desigualdad. Los resultados fueron muy satisfactorios.

En la asignatura de Optimización II de Licenciatura en Matemáticas en la U.A.deC. al trabajar el tema de optimización con restricciones de desigualdad. Se vinculan todos los aspectos tratados en los niveles anteriores sobre funciones y desigualdades, el mismo tema es tratado en Investigación de Operaciones II para Ingeniería. Se utiliza el mismo esquema de trabajo. Estos estudiantes tienen mas desarrollado el pensamiento matemático y se puede trabajar en forma un poco mas independiente. Se utiliza Matlab para hallar la solución y la construcción de conocimiento de los métodos y sus modificaciones.

Referencias Bibliográficas

Brousseau, G (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*, Kluwer Academic Publishers.

Camarena, P (2001). *La Matemática en el contexto de las ciencias*. Antologías. No.1 Rede de CIMATES. Programa Editorial.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Cordero F., Alanís J., Rodríguez, A y Garza A. (2003). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. Trillas. México.

Cribeiro, D. Josefina (2001) *Interrelación entre calidad educativa, investigación y las nuevas tecnologías de la información*. 3er Foro estatal de Ciencia y Tecnología. COECYT.

Fariñas, Gloria (1995). *Maestro, una estrategia para la enseñanza*. Academia. Habana.

Galperin, P. Ya. (1994). *Los tipos fundamentales de aprendizaje*. Imprenta Universitaria. Cuba.

Galperin, P. Ya. (1986). *Sobre el método de formación por etapas de las acciones intelectuales*. Antología de la psicología pedagógica y de las edades. Editorial Pueblo y Educación. Cuba.

Galperin, P. Ya. (1987). *Sobre el método de formación por etapas de las acciones mentales*. Psicología Evolutiva y Pedagógica en la URSS. Moscú.

Leontiev, A (1981). *La actividad en Psicología*. Pueblo y Educación. Habana. Cuba.

Talízina, Nina F. (1987). *Procedimientos iniciales del pensamiento lógico*. DEPES-MES. Universidad de Camagüey. Cuba.

Talízina, Nina F. (1987). *Conferencias sobre los fundamentos de la enseñanza en la Educación Superior*. DEPES-MES. Universidad de la Habana. Cuba.

Velázquez, B. Santiago R. (2001). *El desarrollo de habilidades matemáticas en situación escolar*. Grupo Editorial Iberoamérica México.

Vygotsky, L (1982). *Pensamiento y lenguaje*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana Cuba.

Incoherencias y Pensamiento Matemático: La Influencia de los Lenguajes Matemáticos y Representaciones sobre el Razonamiento en el Dominio del Infinito

Sabrina Garbin
Universidad Simón Bolivar
Venezuela
sgarbin@usb.ve
Pensamiento Matemático Avanzado, Lenguaje Matemático – Nivel Básico, Medio

Resumen

Las ideas, resultados y reflexiones que desarrollamos, son producto de estudios y parte de investigaciones (Garbin 2000 y Garbin, 2003,2004) que han pretendido contribuir con el debate de la problemática del infinito matemático en su dualidad potencial-actual, desde la específica, que genera la influencia de las representaciones y distintos lenguajes matemáticos sobre las percepciones del infinito y razonamientos matemáticos asociados, y en las inconsistencias e incoherencias de las respuestas de los alumnos a problemas que están presentes procesos infinitos.

Una etapa en la enseñanza y aprendizaje

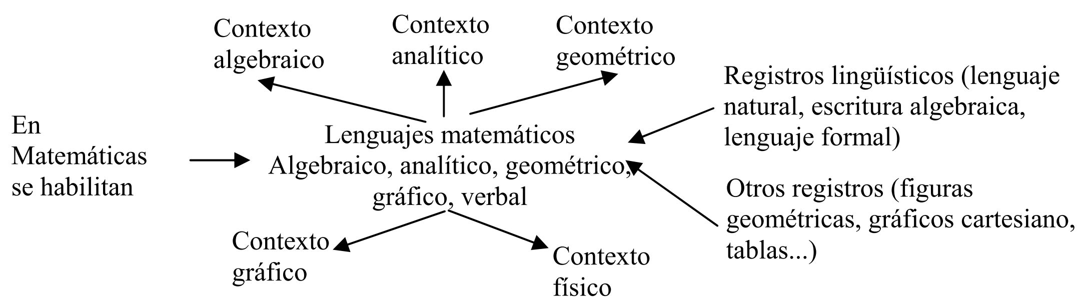
Las etapas de escolaridad y del proceso de enseñanza y aprendizaje están en estrecha relación con el desarrollo cognitivo de los estudiantes, y para poder hacer estudios, dar ideas, aportaciones y reflexiones didácticas es importante saber y conocer la etapa cognitiva en que se encuentran los estudiantes. Nosotros nos situamos en la etapa cognitiva de transición entre el Pensamiento Matemático Elemental (PME) y el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). Por etapa elemental entendemos normalmente aquella que tiene lugar hasta Secundaria y la etapa avanzada aquella que está relacionada con la Enseñanza de la Matemática en la Universidad. Pero entre ambas podemos ubicar una etapa de transición, que aparece en diferentes momentos y distintas duraciones, según el País y a veces según el área de Matemática que se está enseñando. Delimitar ambas etapas y saber reconocer dicha transición ha sido de especial interés para algunos investigadores. David Tall y Tommy Dreyfus, han elaborado una teoría cognitiva con relación al desarrollo y crecimiento del pensamiento matemático avanzado, y es el mismo Tall quien afirma que el lugar donde el pensamiento matemático elemental se convierte en avanzado no se ha definido con precisión. En cuanto a los procesos de pensamiento, algo que distingue una etapa de la otra es la complejidad y la frecuencia del uso de estos procesos (representación, traslación, abstracción, deducción, entre otros). Otra distinción entre una etapa y la otra, está en relación con la característica y el nivel de los estudiantes como, por ejemplo, los cursos preuniversitarios o universitarios. Algunos autores piensan que esto no necesariamente delimita ambas etapas y entonces caracterizan su enseñanza y evaluación. Por otra parte Tall (1995) afirma que el paso del PME al PMA implica una transición significativa que requiere una reconstrucción cognitiva. Esta reconstrucción supone, por un lado, el paso de "describir" a "definir", y por otro, el paso de "convencer" a "demostrar". En suma, podríamos decir que los alumnos que se encuentran en la franja de edad de 15-20 años aproximadamente, son los que están en esta etapa de transición.

Intuición del infinito y algunos conceptos

En nuestra práctica docente, enseñando y evaluando, hemos notado la diferencia que muchas veces existe entre los conceptos concebidos y formulados por la matemática formal y las interpretaciones que nuestros estudiantes hacen de ellos. Es en la década de los años 70 y primeros años de los 80, cuando se detecta esta diferencia. Para explicar esta distinción, Tall y Vinner (1981) definieron lo que llamamos "esquema conceptual" (concept image). Inicialmente, Tall y Vinner describieron el esquema conceptual que tiene un alumno de un concepto matemático como toda la estructura cognitiva asociada al concepto, la cual incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados a la noción matemática. Mucho más tarde Tall (2001) define imagen informal (informal image) e imagen formal (formal image), la primera es algún tipo de imagen que se tiene antes del acercamiento con teorías axiomáticas, y la segunda consiste en la parte del esquema conceptual que es formalmente deducido de los axiomas. Esto enfoca en el dominio del infinito, la tensión entre el infinito "perceptual" y el infinito "formalizado". En particular, nosotros trabajamos con estudiantes que se acercan al infinito, siendo éste no formalizado, y cuya intuición del infinito es la que entra en juego, tanto antes y después de haberse introducido conceptos formales del cálculo diferencial e integral, y empiezan a aparecer interconexiones y confusiones entre la imagen formal e informal de dichos conceptos. El concepto aristotélico de infinito es una noción potencial que dominó en la historia hasta la época cantoriana, habiendo tenido una gran influencia en el desarrollo de este concepto. Como ha explicado Fischbein, este concepto potencial de infinito es el que responde a la interpretación intuitiva del infinito, mientras que el infinito actual no tiene un significado "conductual" con lo cual es una noción contraintuitiva. Nombramos al infinito actual, como el que está asociado a la idea de totalidad, de completes y de unidad. Un proceso (potencialmente infinito en sus orígenes) se considera acabado y los límites alcanzados.

Incoherencias: impacto de las representaciones y los lenguajes matemáticos

Un elemento relevante a considerar en la actividad matemática y de especial interés, es la importancia de diferenciar la representación del objeto del objeto matemático. Los objetos matemáticos tienen un significado más abstracto que los objetos físicos. Y cuando nos referimos a la estructura cognitiva, decimos que el esquema conceptual usa el símbolo para conectar convenientemente procesos y relaciones; de esta manera, en la mente se tienen símbolos que se pueden manipular como objetos mentales, sin ser necesariamente objetos físicos. El profesor Duval (1996, 1999) ha desarrollado una teoría cognitiva de las representaciones semióticas y afirma que éstas tienen un carácter distinto a las representaciones mentales y constata que: 1) No se puede acceder a los objetos matemáticos fuera de un sistema semiótico aunque sea rudimentario. Los objetos matemáticos, no son objetos reales, como pueden ser los de otras disciplinas, por ejemplo la física, que pueden ser manipulables. De aquí la necesidad de describir y aprender cómo funcionan ciertos sistemas de representación: representaciones de escritura decimal de los números, representaciones gráficas de formas (funciones o no), representaciones de la escritura literal y algebraica, representaciones que son las figuras en geometría, etc. 2) Es necesario no confundir nunca un objeto con su representación semiótica: un número y su escritura, un objeto geométrico y la figura que lo representa, etc. Es importante tener en cuenta que las representaciones semióticas no son un simple medio de exteriorización de las representaciones mentales para fines de comunicación, sino que también son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento. La explicación que hace Duval sobre los diferentes sistemas semióticos usados para definir y utilizar conceptos y objetos matemáticos, nos ayuda a establecer cierta relación entre los lenguajes matemáticos, los contextos y los registros de representación semiótica. En Matemáticas se habilitan diferentes lenguajes matemáticos, como por ejemplo el algebraico, analítico, geométrico, gráfico y verbal (escogidos para nuestros problemas, ver Anexo). Cada uno de los lenguajes contextualiza el problema, un contexto algebraico, analítico, geométrico, gráfico y verbal, respectivamente. Y, cada lenguaje matemático utiliza unos ciertos registros de representación semiótica que pueden ser del tipo lingüístico (lenguaje natural, escritura algebraica, lenguaje formal) o de otro tipo (figuras geométricas, gráficos cartesianos, esquemas,...)



El problema del uso de ciertas representaciones y en especial de ciertos modelos, que puede ser una figura, un dibujo, especialmente en el dominio del infinito, puede causar ciertas contradicciones entre las deducciones formales y los modelos intuitivos, especialmente este ha causado el problema de conocidas paradojas. Fischbein que se ha interesado en la relación del infinito y los modelos tácitos, subraya precisamente la dificultad de librarnos psicológicamente de ciertas imágenes, por ejemplo por muy entrenados que seamos aunque sepamos que los puntos matemáticos no tienen dimensiones, nosotros seguimos pensando tácitamente, inconscientemente, en pequeños puntos. Las enormes contradicciones en el tiempo de Cantor, ante los hallazgos del infinito actual, se debía a la dificultad de librarse de los modelos tácitos primitivos de los razonamientos matemáticos. Y el problema principal de las contradicciones y de las paradojas en el dominio del infinito, es la "no existencia y no influencia tácita de modelos en nuestro razonamiento en el dominio del infinito actual"(Fischbein, 2001).

Respuestas y percepciones de los alumnos

Nos hemos centrado en nuestros estudios en cinco problemas (ver Anexo) inspirados en la primera paradoja de la división, de Zenón y diferenciados por el contexto matemático. Recordemos que la paradoja de la dicotomía pone en superficie dos aspectos. Si nos queremos mover del punto 0 al 1 de la recta podemos hacerlo con un procedimiento finito, o podemos utilizar un procedimiento infinito, moviéndonos ½ unidad, después ¼ unidad, y así sucesivamente. Si se ignora la posibilidad de que hay puntos distintos a una distancia infinitesimal entre uno y otro, es evidente que ambos procedimientos conducen al mismo punto. Este hecho está expresado en la "igualdad" $1=1/2+1/4+1/8+...$, que Zenón considerana paradójica. El hecho es que asumía "a priori" que no existía el "infinito actual" y entonces que ningún proceso infinito podría considerarse completo (Rucker, 1995). En particular las 5 preguntas presentan una misma situación cognitiva, que en lenguaje de Nuñez (1994) presentan un infinito pequeño que implica una coordinación simultánea, el creciente número de divisiones y el decreciente "espacio" que se recorre o "resultado parcial" que se opera (que llama proceso de convergencia y divergencia). Las preguntas están expresadas en lenguajes matemáticos distintos y con registros semióticos distintos. Cada uno de estos registros alude, incide, fomenta, convence, permite que surjan en la mente del estudiante, concepciones, elementos y experiencias matemáticas específicas, fruto de sus limitaciones o de sus oportunidades, en el sentido de su característica de producción.

Los alumnos perciben al infinito en estas preguntas de manera distinta, derivado de esta influencia, algunos se sitúan ante una percepción potencial del infinito y no consideran que el proceso es completo, y otros "aceptan" la completes del proceso infinito y perciben al infinito como actual. Las razones son variadas y están delimitadas por el tipo de lenguaje, representación y contexto. También los alumnos más avanzados (17-20 años) muestran que si bien saben calcular una suma infinita (aunque no calculen la suma), reconocen si es convergente o divergente, y conocen y saben calcular un límite al infinito, algunos aceptan la situación de que en el infinito se alcanza al punto límite y otros no. El proceso infinito implícito para algunos alumnos es completo, para otros no lo es y un menor número (y en mayor número aquellos estudiantes sin conocimientos de cálculo diferencial e integral) mantuvieron esquemas finitos o físicos, a pesar de la infinitud del proceso. Pero las respuestas no se mantienen "estables" entre las preguntas, nosotros decimos coherentes. A través de la construcción de unas líneas llamadas de coherencia, hemos podido evidenciar la estabilidad o inestabilidad de las respuestas de los alumnos en los distintos problemas. Son muy pocos los alumnos, con los que hemos trabajo, que muestran una percepción actual o potencial o finitista en todos los problemas, manteniendo una línea coherente en sus respuestas según su concepción y percepción del infinito; y a pesar de que todas las preguntas presentan una situación cognitiva similar como ya hemos afirmado. Por ejemplo de un grupo de 89 alumnos universitarios, sólo un estudiante acepta que el proceso infinito es acabado, y dos alumnos mantienen en todas sus respuestas una concepción potencial del infinito. El resto de estudiantes se mantienen con respuestas actuales o potenciales dependiendo de la pregunta. Un hecho interesante a resaltar es que del grupo de estudiantes que mantienen principalmente esquemas finitos, no aparece la posibilidad de la completes del proceso en ninguna de las preguntas. En caso contrario en el grupo donde sí aparece y se acepta el alcanzar al punto límite, no hay casi presencia de respuestas finitistas (o de evasión de finitud), sólo un estudiante presenta una respuesta de este tipo. Esto hace pensar que estos estudiantes se encuentran en un momento distinto en el proceso de transición del PME al PMA. Todos estos datos en grandes rasgos hacen evidente la naturaleza conflictiva de las intuiciones del infinito, la influencia de los lenguajes y contextos en las percepciones de los estudiantes, y la persistencia de la imagen informal aunque ciertas ideas formales hayan sido presentadas a los estudiantes. Es probable que en el esquema conceptual de los estudiantes se mantengan en tensión el infinito "perceptual" y las imágenes formales asociadas a los conceptos formales del cálculo diferencial e integral. Y será la reconstrucción de estos conceptos formales y la construcción del concepto formal del infinito actual la que podría disminuir esta tensión.

Conexiones y tarea de conexión

Una habilidad importante para mantener respuestas consistentes ante varias representaciones de un mismo problema, o con situación cognitiva similar como la que estamos discutiendo, es tener conciencias y saber establecer conexiones y reconocer las relaciones, similitudes y/o diferencias dadas por los diferentes lenguajes y representaciones. Por ejemplo, en los problemas 1, 3 y 4 los alumnos expresan relaciones de similitud y focalizan su atención en distintos aspectos: a)El planteamiento del problema: la respuesta del alumno está en relación a lo que plantean los problemas o en lo que se pide hacer. b) El proceso de convergencia y divergencia implícito en cada pregunta (aceptando o no la situación límite). c)El concepto implícito, la noción de infinito, o el reconocimiento que se trata del mismo concepto o tema en todas las preguntas. d) Los conceptos asociados de límites, sucesiones y/o series. e) Resultados: puede ser el tipo de resultado o el procedimiento o modo de resolución del problema. f) Encuentran similitud en algunas preguntas y/o semejanzas y diferencias entre los problemas. g) Afirman que están relacionadas con la divisibilidad en mitades. Es importante subrayar que no es reconocida por los estudiantes la situación cognitiva similar de los problemas, sólo el 6% del segundo grupo explicita el proceso de convergencia y divergencia. Por otra parte al comparar con las dadas, las relaciones de semejanza o diferencia entre estas preguntas que daría un matemático o un psicólogo parece que no son evidentes y necesitan de una habilidad adicional y procesos de pensamientos específicos. Algunos autores han hablado de la importancia de la conexión y se ha planteado la enseñanza por analogía. Nosotros subrayamos la importancia del proceso de conexión en la búsqueda de coherencia, y específicamente en situaciones como la planteada, llamamos "tarea de conexión" a la que consistiría en identificar y establecer relaciones entre los problemas, en cuanto a lenguaje matemático y registro de representación semiótica se refiere, y reconocer los contextos (conceptual y global) de los problemas, de manera que permita una influencia mutua dando lugar a respuestas asociadas coherentes a los problemas. A modo de ejemplo. Pensemos en los problemas 1 y 3. La tarea de conexión consiste en reconocer que en ambas preguntas está presente la divisibilidad infinita en mitades, que cognitivamente hablando requiere un proceso de divergencia y convergencia, pero tales que, en el primero se utiliza el lenguaje geométrico y en el tercero, el analítico. Entre los registros de representación semiótica, figura geométrica: segmento (pregunta 1) y escritura numérica: suma infinita (pregunta 3), la tarea de conexión consiste en reconocer los siguientes aspectos: - Si se considera el segmento de dimensión 1, es decir el segmento real [0,1], cada punto del proceso de bisección se pude identificar con cada uno de los sumandos de la suma infinita de la pregunta 3. – Que la suma infinita, numéricamente representa la suma infinita de los segmentos que son resultado de las bisecciones y que por tanto una solución explícita de la serie es la respuesta correcta a la primera pregunta. – Una respuesta de la pregunta 1 debe ser asociada y coherente con la respuesta a la pregunta 3. Tuvimos la experiencia de entrevistar a 6 alumnos de secundaria, 5 de estos terminaron mostrando respuestas coherentes, y para ello ha sido "fundamental": a) reconocer en todas las preguntas el proceso de división infinita, con los dos tipos de iteraciones, la divergente y convergente; b) establecer la relación y conexión entre las preguntas a través de la sucesión numérica. Hemos identificado además que dicha tarea puede favorecer: a) La aparición de un conflicto y la consciencia de la paradoja en la mente del estudiante cuando hay por lo menos una respuesta correcta en algunos de los problemas. Algunos de ellos no se habían percatado de la paradoja a qué llevaba el razonamiento de los problemas. Sin embargo, después de relacionarlos y poder hacer las conexiones matemáticas entre ellos, al comparar la respuesta correcta con las no correctas (matemáticamente hablando), se les hacía presente la paradoja. b)La "autobúsqueda" de coherencia, de manera consciente o no, en las respuestas y afirmaciones relacionadas con las preguntas (a través de la tarea se llega a una mayor consciencia de la semejanza de la situación planteada en cada problema). De forma espontánea los mismos estudiantes se exigían una respuesta coherente después de identificar la relación existente en los problemas y después de haber hecho las conexiones matemáticas entre ellos. c) La identificación de la idea o creencia errónea que no permite dar una respuesta consistente al estudiante. d) Diferenciar la representación del objeto del objeto matemático, en especial encontrar los focos de atención que los distintos contextos requieren mitigando la influencia de los lenguajes y representaciones.

A modo de conclusión

El paso del PME al PMA implica una transición que requiere un reconstrucción cognitiva, y el esquema conceptual de los estudiantes no necesariamente es coherente en todo momento y los alumnos pueden evocar imágenes contradictorias en momentos diferentes, y cuando se introducen conceptos formales empiezan a entrar en contradicción la imagen informal con la formal. En el dominio del infinito se mantiene en tensión el infinito "perceptual" y el infinito "formalizado". En esta etapa aún no se ha formalizado el infinito, por tanto el alumno construye conceptos formales, como los del cálculo diferencial e integral, manteniendo la tensión entre el infinito "perceptual" y la "imagen formal" de dichos conceptos. También empieza a aparecer, por la influencia de las representaciones y conceptos, la aceptación o no de un infinito asociado a la idea de totalidad, de completes y de unidad, que llamamos actual. Esta etapa es también de transición de lo finito, infinito potencial a infinito actual (como totalidad) llegando a la formalización del infinito cantoriano. Los lenguajes matemáticos, el contexto y las representaciones tienen un gran impacto sobre las percepciones del infinito y sobre nuestros razonamientos. Ante distintas representaciones de un mismo problema los alumnos presentan ideas inconsistentes, y en el caso particular tratado en este escrito presentan incoherencias o respuestas inestables ante un mismo problema (desde el punto de vista cognitivo) pero representado de forma distinta. Los estudiantes pueden percibir un infinito actual o potencial, y hasta dar respuestas finitistas dependiendo del problema, no hay conciencia de las propias incoherencias, ni de la similitud fundamental entre los problemas, los focos de atención de los alumnos son distintos y no son los que permiten realmente distinguir el objeto de su representación. La dificultad de establecer la conexiones convenientes no permite el dar respuestas coherentes y por ello pensamos es importante tener en cuenta didácticamente la tarea de conexión y hemos explicado en qué puede favorecer. Una manera para inducir esta tarea podría ser la de comenzar con el reconocimiento de las diferencias de representación: tipo de lenguaje y contexto, tipo de registro de representación semiótica usado en cada uno de ellos, y establecer las conexiones entre los sistemas semióticos presentes y los registros. Es una manera de incidir en el desarrollo de un pensamiento coherente que posteriormente podría impulsar un pensamiento consistente y menos compartimentado. Creemos que no debería ser una labor puntual, sino que debería ser una práctica constante propia de la actividad docente durante el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Referencias Bibliográficas

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics 48*(2-3), 309-329.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques 6*(3), 349-382.

Duval, R. (1999). L'apprendimento in matematica richiede un funzionamiento cognitivo specifico? *La Matematica e la sua Didattica 1*, 17-42.

Garbin, S. (2000). *Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 años*. Disertación doctoral no publicada. Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Garbin, S. (2003). Incoherencias y conexiones: el caso del infinito actual con estudiantes universitarios. Primera fase del estudio. En J.R. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 16, Tomo 2, pp. 406 – 414). Chile: CLAME.

Garbin, S. (en prensa). Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: el caso de estudiantes con conocimientos previos de cálculo. *Enseñanza de las Ciencias*.

Nuñez, E. (1994). Subdivision and Small Infinities Zeno, Paradoxes and Cognition. En J.P. Da Ponte y J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 368 – 375). Lisbon, Portugal.

Rucker, R. (1995). *Infinity and the Mind.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. En L. Meira y D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 61 – 75). Recife, Brasil.

Tall, D. (2001). Natural and Formal Infinities. *Educational Studies in Mathematics 48*(2-3), 199 – 238.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12*(2), 151 – 169.

Ingeniería Didáctica en Física-Matemática

Marta J. Marcolini
Universidad de Jaén, Departamento de Matemáticas
España
mmarcoli@ujaen.es
Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales – Superior

Resumen

El objetivo de esta investigación ha sido estudiar, utilizando la metodología de la ingeniería didáctica, las causas de las dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial. Para ello hemos usado como soporte las Ciencias Experimentales. Buscamos dichas causas no sólo en las formas en que trasmitimos el conocimiento sino fundamentalmente en la manera en que se articula el contenido que se enseña. Para ello hemos tratado de desarrollar en el alumno la idea de variación, que nos posibilite abordar con éxito la noción de predicción, noción ésta propia de las Ciencias Experimentales. La idea de variación, en el contexto de la Cinemática, se presenta a través de las derivadas sucesivas, considerándolas como una sucesión de derivadas. En el caso de la noción de predicción nuestra herramienta ha sido la serie de Taylor, siempre en el contexto de las Ciencias Experimentales.

Introducción

La noción de derivada no se constituye en objeto estable del saber en un primer curso de Cálculo. Nosotros hemos observado que los alumnos asimilan la técnica pero no reconocen, por ejemplo, las derivadas sucesivas como nuevas funciones. Esto ocurre por diversas causas entre las que podemos destacar:

- La falta de estudio y de análisis de la variabilidad de fenómenos sujetos al cambio.
- El no haber logrado articular la noción de derivada con la noción de derivadas sucesivas.

Estas razones nos llevan a sostener que la derivada no se debe entender sólo como la primera derivada, sino que es algo que permite organizar las derivadas sucesivas, porque las nociones matemáticas no pueden reducirse a su definición. Esto es, debería entenderse a las derivadas no como un algoritmo ni una simple iteración, como suele ser considerada en la mayoría de los textos de Cálculo, sino como una "sucesión" de funciones donde cada una provee de información muy rica en significaciones, especialmente en el contexto de las Ciencias Experimentales. De esta manera, conjeturamos que sólo entonces adquieren significación propia los términos de la serie de Taylor. Así surge el concepto de función analítica, asociado con la noción de predicción, para predecir el estado ulterior de un sistema físico donde se conoce su estado inicial, que es la idea germinal (Cantoral, 2000).
Con esta idea proponemos discutir con cuidado el proceso de reconocimiento de la Matemática en los fenómenos físicos y no sólo aplicar la Matemática en la Física.

Objetivos

El objetivo general de este trabajo ha sido diseñar una ingeniería didáctica que permita estudiar las causas de las dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial cuando se enseña a estudiantes universitarios de Ciencias e Ingeniería, buscando dichas causas no sólo en las formas en que se trasmite el conocimiento sino fundamentalmente en la manera en que se articula el contenido matemático que se enseña.

Los objetivos específicos que se plantean son los siguientes:

a) Favorecer en el alumno el pensamiento y el lenguaje variacional que le posibilite abordar con éxito los problemas propios de las Ciencias Experimentales.
b) Desarrollar en los estudiantes los mecanismos que permitan transitar desde la *predicción*, noción propia de las Ciencias Experimentales, a lo *analítico*, noción propia de las Matemáticas, utilizando para ello estrategias del pensamiento y del lenguaje variacional.

Para lograr estos objetivos se parte de los siguientes supuestos:

1.- Para que las derivadas sucesivas tengan entidad propia se les debería dar significado a cada una y a su conjunto, mostrándolas como una “sucesión” o una “n-upla” de derivadas, es decir $(f, f', f'', f''', \ldots, f^{(n)}, \ldots)$.
2.- Para abordar, a través de funciones analíticas, los problemas que requieren de la noción de predicción es más propicia la concepción sobre derivadas sucesivas antes indicada.

Metodología

Nuestra investigación sigue las pautas de la metodología de la “Ingeniería Didáctica”, fundamentándose en las teorías de Situaciones Didácticas y de Transposición Didáctica, para la cual se diseñó e implementó una particular situación didáctica dirigida a los alumnos de primer curso de universidad. Una de las finalidades de este diseño fue la de resignificar[1] el concepto de derivada de una función a través de las derivadas sucesivas situándonos en el marco gráfico. A partir de aquí, se considera la derivada, en un sentido genérico, como la organización de las derivadas sucesivas en relación con la Serie de Taylor, para tratar con problemas planteados desde el contexto de las Ciencias Experimentales. Situándonos de este modo en el paradigma pre-cauchiano para el Cálculo, donde la serie de Taylor es la herramienta para predecir los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza.
Como la metodología de investigación utilizada es la relativa a la ingeniería didáctica, se tuvieron en cuenta sus distintas fases.
Para ello se hizo una revisión de programas y de manuales escolares de Matemáticas y Física y se implementaron dos experiencias piloto con alumnos de Ingeniería Técnica Industrial y de la Licenciatura en Química. En el diseño de las situaciones-problemas[2] intervienen las nociones de variación y predicción a través de las derivadas sucesivas y de la serie de Taylor, respectivamente, en el contexto de las Ciencias Experimentales.

---

[1] Con el término *resignificar* queremos destacar que el concepto de derivada adquiere significaciones que evolucionan con el progreso del alumno en su estudio. Así, al principio, puede reducirse a la aplicación de una regla, después puede entenderse como razón de cambio y, más tarde, como un factor en la serie de Taylor. También, en otras ocasiones, habrá que entenderlo conjuntamente con sus derivadas sucesivas.
[2] El concepto de situación es tomado en el sentido de Vergnaud (1990); es decir, los procesos cognitivos y las respuestas del sujeto son función de las situaciones a las que se enfrenta.

Presentamos dos situaciones-problemas representativas de las que conforman las situaciones didácticas utilizadas en la parte experimental.

- **SITUACIÓN 1**

Un móvil se desplaza con movimiento rectilíneo no uniforme. En la siguiente tabla se muestran las posiciones (en metros, desde el origen de coordenadas) en ciertos instantes.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
s (metros)	3	2	5	-2	0	3

a) *A partir de estos datos, determina (razonando tu respuesta) para cuántos valores de t, como mínimo, el móvil tiene velocidad instantánea cero.*
b) *¿Para cuántos valores de t, como mínimo, la aceleración es cero?¿Por qué?*
c) *¿Se puede asegurar que la variación instantánea de la aceleración s'''(t), conocida como tirón, toma el valor cero en algún instante dentro del intervalo considerado? Explica con detalle los motivos y razones de tu respuesta.*

- **SITUACIÓN 2**

Desde la terraza de un edificio de altura s_0 *se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial* v_0*. Esta situación viene descrita por la siguiente ecuación diferencial:*
$s'' = -g$*, donde g es la aceleración de la gravedad.*
Predecir la posición de la pelota para cualquier instante t, es decir, hallar la expresión de s(t). Utilizar como herramienta de predicción la serie de Taylor.

Estas situaciones problemas son analizadas individualmente atendiendo a lo siguiente:

a) Las razones de su elección
b) Importancia de la situación problema para los alumnos
c) Los comportamientos que se quieren provocar
d) Medios de que disponen los alumnos
e) Los marcos utilizados
f) Variables del problema y elecciones didácticas

Las mismas son validadas por un grupo de expertos. En base a este material se realiza el análisis a priori.
En la parte experimental implementamos dos experiencias con alumnos de primer curso de la Licenciatura en Biología.
En ellas, las etapas de aprendizaje seguidas han sido: acción, formulación y validación e institucionalización.
En la etapa de acción los alumnos trabajan en forma individual cada uno de los problemas que conforman la situación didáctica. En las etapas de formulación y validación los alumnos trabajan por equipos realizando un aprendizaje colaborativo. Sus producciones son recogidas en cinta de audio.

La etapa de institucionalización se trabaja en forma grupal con activa participación del docente investigador en la primera experiencia, y a través de entrevistas personales en la segunda.
Se fundamenta el análisis a posteriori en el conjunto de datos recogidos en estas etapas, como las observaciones realizadas de las secuencias de aprendizaje y de las producciones de los estudiantes.
Si bien la metodología de la ingeniería didáctica es cualitativa, se han obtenidos algunos resultados cuantitativos. Para ello, en la etapa de acción, agrupamos las producciones de los estudiantes en distintas categorías atendiendo a argumentaciones similares. Para obtener una valoración de estas producciones las catalogamos y le asignamos el siguiente puntaje (Cajaraville, 1996):

CATALOGACIÓN DE LA RESPUESTA	PUNTAJE
En blanco o totalmente errónea.	1
Uso de conceptos o procedimientos próximos sin éxito.	2
Uso de conceptos y procedimientos próximos y/o adecuados, con éxito limitado o con lagunas en la argumentación.	3
Respuesta correcta.	4

Tabla 1: Formas de catalogar las respuestas.

Para el análisis de las verbalizaciones que se producen en el aprendizaje colaborativo de las etapas de formulación y validación, nos hemos basado en la existencia de una correlación positiva y significativa entre algunas de las interacciones y el aprendizaje (Rodríguez y Escudero, 2000). Esto se esquematiza en la tabla 2.

Conclusiones

Como resumen de algunas conclusiones se destacan:

1) Los estudiantes tienden a abordar los problemas a partir del contexto que se les plantea sin explorar en otros contextos y marcos.
2) Si bien el marco gráfico por sí sólo es insatisfactorio, provee de una intuición global cualitativa que es fundamental para lograr un movimiento versátil entre distintos marcos y contextos.
3) Es interesante comentar que la fórmula: “la velocidad es igual al espacio dividido por el tiempo”, que caracteriza el esquema conceptual de la mayoría de los alumnos, resulta ser tan estable que dificulta e incluso impide la construcción del esquema conceptual de la noción de velocidad instantánea, actuando como un obstáculo.
4) El presentar los conceptos involucrados en la Cinemática, para el caso del movimiento rectilíneo con aceleración variable, desde diferentes marcos, ha favorecido en el alumno un desarrollo más amplio de la noción de velocidad, aceleración y “tirón”. Esto, a la luz de los resultados que hemos mostrado, clarifica los conceptos de la Cinemática, pero además amplía la noción de función derivada, al darle significación a cada una de las derivadas sucesivas, que en la mayoría de los casos se restringe a un mero algoritmo.

5) El uso de la ingeniería didáctica en un contexto interdisciplinario logra extender su margen de aplicabilidad.
6) La metodología empleada permitió analizar informaciones cualitativas características al estudiar un número reducido de casos, sin abandonar el ámbito académico, para interpretar y comprender ciertos aspectos de la forma de razonar de los alumnos ante tareas específicas.

DE CARÁCTER COGNITIVO			DE CARÁCTER ORGANIZATIVO
Emisiones	*Recepciones*	*Práctica posterior*	Integradoras (I)(0) Directivas (D)(0)
Dar ayuda (DA), (1) Pedir ayuda (PA), (0) Cometer errores (E), (0)	Recibir ayuda con petición (RA), (1) Contestarse a sí mismo (AR), (0)	Poner en práctica la ayuda recibida (UAR), (1) Expresar aprobación (EA), (0)	

Tabla 2: Sistema de categorías y puntaje para el análisis del habla.

Referencias Bibliográficas

Artigue, M. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá.

Azcárate, C. (1990). *La velocidad: Introducción al concepto de derivada*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Cajaraville Pegito, J. A. (1996). *Evaluación del significado del Cálculo Diferencial para estudiantes preuniversitarios. Su evolución como consecuencia de una Ingeniería Didáctica alternativa*. Tesis Doctoral. Universidad de Santiago de Compostela.

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la Teoría elemental de las funciones analíticas*. Tesis Doctoral. Centro de investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al Análisis*. Epsilon, Nº 42, V. 14(3), número monográfico. Sevilla, pp. 353-369.

Rodríguez Barreiro, L. M. y Escudero Escorza, T. (2000). *Interacción entre iguales y aprendizaje de conceptos científicos*. Enseñanza de las Ciencias, 18(2), pp. 255-274.

Perspectivas Curriculares y Uso Didáctico de la Modelación en Educación Matemática

Víctor Martínez y José Ortiz
Universidad de la Repúblican de Uruguay, Universidad de Carabobo
Uruguay, Venezuela
victorml@fing.edu.uy, ortizjo@cantv.net
Pensamiento Matemático Avanzado – Nivel Superior

Introducción

En Relme 15, comieza a gestarse la realización de actividades de modelación lo cual se evidencia en hechos como el curso breve denominado "Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones" (Martínez Luaces, 2002). Algunos de los problemas considerados en dicho curso fueron: a) Cinética: Adsorción de CO_2 sobre superficie facetada de platino, b) Mezclas y tanques: Sistema con tres tanques interconectados, c) Transferencia de masa: Difusión de glucosa en una cereza y d) Transferencia de masa: Secado de un vegetal por las caras. Con el abordaje de cada situación se logró acercar a los docentes a los problemas de modelado vinculados a otras asignaturas o situaciones del mundo real. Aunque esto por si solo no garantiza cambios sustantivos en la práctica docente, ya que "modelar es un modo de vivir" Houston (2001). Esto significa que se requiere generar las condiciones para que el cambio sea posible. Y este grupo de trabajo pretende coadyuvar en tan impostergable tarea.

En la primera edición de este Grupo de Trabajo, en RELME 17, se trató la pertinencia de las actividades de modelado matemático en los diversos niveles educativos y la relación existente entre dichas actividades y la resolución de problemas o la Matemática en el contexto de las Ciencias (Martínez Luaces, Camarena y Sallet, 2003). Además, se consideraron cuestiones vinculadas a la Enseñanza de la Matemática como asignatura de servicio (Martínez Luaces, 2002) y se presentaron ejemplos concretos de actividades de modelado (Martínez Luaces, 2003). En esta oportunidad, es decir RELME 18, se partió de una presentación a manera introductoria seguida de unas preguntas que orientaron la discusión. Luego se hizo una presentación-discusión teórica relacionada con modelación y su uso en la enseñanza y posteriormente los participantes presentaron las respectivas respuestas a efectos de confrontarlas en el grupo. En total hubo doce participantes, todos mexicanos, principalmente profesores de matemáticas en secundaria y universidad, quienes manifestaron inquietud por actividades concretas de modelación para el trabajo práctico en el aula. En lo que sigue se presentarán los temas considerados en el grupo de trabajo.

Desarrollo

Para orientar la discusión en las sesiones se consideraron las interrogantes siguientes: 1. ¿Por qué incluir la modelación en las actividades didácticas a desarrollar en el aula? 2. ¿Qué competencias debe tener un profesor para incorporar la modelación en sus propuestas didácticas?, 3. ¿Es suficiente la formación inicial de los profesores de matemáticas para abordar la utilización de la modelación en su futuro trabajo docente? 4. Si el profesor en formación incorpora la modelación en su futuro trabajo profesional, ¿podría apoyarse en las nuevas tecnologías? 5. ¿Se realizan actividades de modelado por igual en las distintas áreas de la Matemática? Por ejemplo: ¿es la misma situación en los cursos de Álgebra que en los de Ecuaciones Diferenciales?, 6. ¿Cuál es la situación del Modelado Matemático en las distintas carreras?. Para contextualizar y contribuir a unificar criterios se hicieron presentaciones teóricas relacionadas con un análisis conceptual de modelo y del proceso de modelación (Niss, Blum & Huntley, 1991; Ortiz, 2000), el uso del modelado como un organizador del currículo para diseñar actividades didácticas (Ortiz, 2000, 2002) y los modelos matemáticos en los cursos de perfeccionamiento para profesores (Martínez Luaces, 2004).

Aspectos generales

Existen referentes teóricos y conceptuales de interés para el abordaje de la modelación en educación matemática. La noción de modelo matemático se entiende como un constructo de carácter dinámico que resulta de la matematización de la realidad y que contribuye a la descripción, explicación y predicción de fenómenos o hechos del mundo real (Ortiz, 2000). El proceso de modelación matemática, se soporta en las propuestas de Blum (1991), Stewart y Pountney (1995), Ríos (1995), Ortiz (2000, 2002) y Martínez Luaces, Camarena & Salett (2004). En este sentido, se considera que la modelación matemática empieza con un problema del mundo real, el cual es objeto de simplificación hasta la elaboración de un modelo real. Luego, por medio de la abstracción, se propone un modelo matemático que permite plantear interrogantes, a las cuales se intenta dar respuesta con el uso de técnicas de cálculo propias del modelo; para posteriormente pasar al análisis de los resultados y su contrastación con el problema propuesto inicialmente en el mundo real. En el paso del modelo matemático al análisis y constrastación de los resultados, también es posible construir un modelo recurriendo a las nuevas tecnologías (computadoras o calculadoras gráficas), las cuales permiten la simulación que ayudará a enriquecer y visualizar los resultados del problema original. El proceso de modelación tiene un carácter cíclico, lo cual le confiere una estructura dinámica y flexible que permite su permanente enriquecimiento e incorporación de nuevas interrogantes cada vez que se desea modelar una situación dada. De ahí se enfatiza que, en el contexto de la modelación, un modelo matemático es casi siempre un sistema de ecuaciones o inecuaciones algebraicas, diferenciales, integrales, entre otras; obtenidas a través del establecimiento de relaciones entre variables consideradas esenciales al fenómeno bajo análisis (Bassanezi, 1994).

La modelación en el currículo de matemáticas

Diferentes trabajos de investigación en educación matemática, tales como los presentados por Blum (1991), Bassanezi (1994) y Bair y Haesbroeck (1998) entre otros, centran su atención en la modelación como una estrategia de enseñanza y aprendizaje.

En términos de enseñanza, el uso de la modelación permite el aprendizaje de contenidos matemáticos conectados a otras formas de conocimientos. Su aplicación como una estrategia de enseñanza y aprendizaje es cada día más utilizada por los educadores matemáticos. Blum (1991) sostiene que hay consenso para que la modelación matemática sea incorporada en los currículos de todos los niveles escolares. Además, este autor plantea que con la modelación se logra comprender mejor el mundo a nuestro alrededor, a comprender con más profundidad los conceptos matemáticos y a mejorar las actitudes hacia las matemáticas. Pero al respecto, el mismo autor sentencia que "...el factor más importante para el logro de los efectos citados es el profesor de matemáticas..." (p.27).

Stewart & Pountney (1995) sostienen que la modelación matemática podría ser un componente importante de varias carreras, como consecuencia de las deficiencias en resolución de problemas del mundo real, encontradas en los egresados; mientras que los mismos muestran alto grado de suficiencia en la resolución de problemas matemáticos sofisticados. En tal sentido, plantean estos autores, los politécnicos y universidades vincularían la modelación matemática con la resolución de problemas.

En educación matemática, cada día se incrementa la importancia de la modelación tanto en la docencia como en la investigación. En cuanto a la docencia se está llegando a considerar que la enseñanza debe hacerse tratando que los alumnos se esfuercen en la modelación matemática, como un poderoso instrumento de aprendizaje significativo (Castro y Castro, 1997).

Lo antes señalado pone en evidencia la importancia que ha cobrado en los últimos años la incorporación de la modelación en la enseñanza de las matemáticas, entendido esto como un proceso clave en la mejora de la apreciación y comprensión vinculada al entorno social, de una manera asequible al conocimiento que posee el estudiante.

La modelación en la formación del profesorado

La incorporación de la modelación en la enseñanza significa la adquisición de nuevas competencias didácticas por parte de los profesores.

En torno a la modelación, Ríos (1995) sostiene que la mayoría de los ejercicios y problemas de los libros de texto están alejados de las aplicaciones reales. Afirma que incluyen mucha teoría que está muy lejos de favorecer el conocimiento de quienes en su gran mayoría tendrán que aplicar las matemáticas a situaciones del mundo físico o social. Insiste Ríos que se debe enseñar a modelar situaciones en íntima conexión con la vida cotidiana y disciplinas profesionales, con la finalidad de potenciar nuevas habilidades y destrezas. Además, Ríos señala que la enseñanza de las matemáticas debe incorporar las nuevas tecnologías y utilizarlas en el proceso de modelación matemática.

Coxhead (1997), al referirse al desarrollo curricular y la evaluación, sostiene que los programas de estudio de las matemáticas podrían dar oportunidades para el desarrollo de habilidades en los alumnos relativas a la modelación matemática y aplicaciones, empezando en años tempranos de la escolaridad, con énfasis en la contextualización de las actividades matemáticas de los alumnos en situaciones de la vida real y en el uso de nuevas tecnologías. Sin embargo, la autora encontró que muchos profesores han encontrado dificultades al crear o concebir actividades de aprendizaje apropiadas para el desarrollo matemático de los alumnos y proporcionar oportunidades para la evaluación. En ese sentido, Coxhead (1997) considera que la formación inicial de los profesores de matemáticas es esencial para avanzar en los cambios necesarios que permitan la introducción de nuevos métodos de enseñanza. Estas consideraciones de Coxhead ayudan a reflexionar sobre la importancia de incluir, en la formación inicial de profesores de matemáticas, actividades que promuevan en los profesores en formación una actitud favorable hacia el cambio y contribuyan a fortalecer sus niveles de competencia para su futuro desarrollo profesional.

Hodgson (1997), dictó un curso de modelación matemática, basado en situaciones abiertas del mundo real, a profesores de secundaria en ejercicio. El trabajo tuvo dos fases. En la primera fase se administró el curso y en la segunda fase los profesores fueron a sus lugares de trabajo a aplicar la modelación matemática con sus alumnos, haciendo énfasis en el planteamiento de situaciones abierta del mundo real. Este autor encontró que el uso de las situaciones abiertas puede ayudar a facilitar el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas tales como la definición de los mismos y la investigación de la viabilidad de las suposiciones consideradas. Este trabajo de Hodgson contribuye a la comprensión de ciertos aspectos relacionados con las facilidades y dificultades que encuentran los profesores de matemáticas tanto en su fase formativa en modelación matemática como en la fase aplicativa en su campo profesional.

La formación de los profesores de matemáticas debería contemplar experiencias en modelado matemático y resolución de problemas vinculados a la carrera considerada (Hernández, 1997). En ese sentido el NCTM plantea que se debe enseñar a los futuros profesores en forma similar a lo que será su práctica docente posterior. Esto implica que es necesario mejorar la situación actual, por ejemplo a través de cursos de modelado para profesores en actividad y más aún para aquellos que no tienen alguna formación en la especialidad donde ejercen.

La discusión del grupo

Una vez presentados los preliminares, relacionados con el tema, se procedió a discutir acerca de las respuestas dadas a las preguntas planteadas para orientar la discusión. En general, los participantes emitieron respuestas que fundamentalmente apuntaron a la necesidad de formar adecuadamente al docente de matemáticas desde sus aulas de formación inicial. Específicamente, con metodologías que consideren modelados concretos de fenómenos del mundo físico y social en diferentes contextos para que el futuro profesor se inicie en la planificación de actividades didácticas acudiendo a la modelación matemática como un organizador del currículo. Asimismo, surgió la importancia del uso de las nuevas tecnologías como recurso didáctico que potenciaría la modelación en el aula. Dicho recurso ayudaría a imprimirle agilidad al proceso de modelación y consolidaría en menos tiempo la resolución de los problemas planteados y el aprendizaje significativo de los conceptos y propiedades matemáticas que estarían involucrados en cada modelado.

Otra preocupación o respuesta surgida en el grupo fue la carencia actual de una formación inicial del profesor de matemáticas con pocas competencias didácticas que favorezcan el uso de la modelación en su trabajo profesional. En ese sentido, se planteó la necesidad de continuar haciendo investigación empírica que promueva las bondades y limitaciones de la modelación, de esa manera podría llegarse a su incorporación en los currículos de una manera más efectiva.

Respecto al modelado en las distintas áreas de las matemáticas, en el ámbito universitario, se comentó que principalmente se realiza en los cursos de las matemáticas aplicadas, tales como ecuaciones diferenciales o investigación de operaciones. Esto significa que, el modelado no tiene tratamiento similar en las distintas carreras y además, por lo general, su tratamiento es muy escaso. Se hace patente la introducción de la modelación en las diferentes asignaturas que conforman el componente matemático en las distintas carreras.

Finalmente, los participantes plantearon la importancia de seguir contando, dentro de la RELME, con un grupo de trabajo estable y sólido que propicie la reflexión y contribuya al intercambio de experiencias entre pares para seguir fortaleciendo el campo de la modelación matemática en el ámbito latinoamericano.

Referencias Bibliográficas

Bair, J. y Haesbroeck, G. (1998). Modélisation. Passage d´un problème réel à un problème mathématique. *Bulletin APMEP*, *418,* 503-590.

Bassanezi, R. (1994). Modelling as a Teaching-Learning Strategy. *For the Learning of Mathematics, 14* (2), 31-35.

Blum, W. (1991). Applications and Modelling in Mathematics Teaching. A Review of Arguments and Instructional Aspects. En M. Niss, W. Blum & I. Huntley (Eds.), *Teaching and Mathematical Modelling and Applications* (pp. 10-29). Chichester, UK: Ellis Horwood limited

Coxhead, C. (1997). Curriculum Development and Assessment in Northern Ireland. En S. K. Houston, W. Blum, I. Huntley & N.T. Neill (Eds.), *Teaching and Learning Mathematical Modelling* (pp. 3-22). Chichester: Albion Mathematics and Applications Series.

Hernández, M.R. (1997). Niveles epistemológicos en el aprendizaje de las matemáticas. *Educación Matemática*, 9(2), 43-52

Hodgson, T. (1997). On the Use of Open-ended, Real-world Problems. En S.K. Houston, W. Blum, I. Huntley & N.T. Neill (Eds.), *Teaching and Learning Mathematical Modelling*. Chichester: Albion Mathematics and Applications Series.

Houston, K. (2001). Teaching modelling as a way of life. *Quaestiones Mathematicae*, Suppl. 1, Supplement, 105-113

Martínez Luaces, V. (2002, julio). *El Modelado en la Enseñanza de Matemática como asignatura de servicio*. Conferencia dictada en la VI Reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur, Buenos Aires, Argentina.

Martínez Luaces, V. (2003). Mass Transfer: the other half of Parabolic P.D.E. *New Zealand Journal of Mathematics,* Vol. 32, Supplementary Issue, 125-133.

Martínez Luaces, V. (2004, Julio). *Teacher training for problem solving and modelling.* Ponencia presentada en el TSG-3, durante ICME-10, Dinamarca.

Martínez Luaces, V. (2002). Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* 15(1), 49-54

Martínez Luaces, V., Camarena, P. & Salett, M. (2004). Modelos Matemáticos. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* México: Clame

Niss, M., Blum, W. y Huntley, I. (Eds.)(1991). *Teaching and Mathematical Modelling and Applications*. Chichester (UK): Ellis Horwood limited

Ortiz, J. (2000). *Modelización y Calculadora Gráfica en Formación Inicial de Profesores de Matemáticas.* Memoria de Tercer Ciclo. Granada: Universidad de Granada

Ortiz, J. (2002). *Modelización y Calculadora Gráfica en la enseñanza del álgebra lineal. Estudio evaluativo de un programa de formación.* Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Rios, S. (1995). *Modelización*. Madrid: Alianza

Stewart, M. y Pountney, D. (1995). *Learning Modelling with Derive*. London: Prentice Hall.

¿Se pueden crear Matemáticas desde la Didáctica de la Matemática?

Tomás Ortega
Universidad de Valladolid
España
Ortega@am.uva.es

Resumen

El presente trabajo se enmarca en dos de las investigaciones llevadas a cabo sobre el concepto de límite y sobre la demostración matemática. En la primera se plasmó una nueva conceptualización de límite funcional, más dinámica que la conceptualización métrica, tan rigurosa como esta última, que no está sujeta al formalismo impuesto por la sintaxis de la manipulación simbólica, y que favorece la interpretación del concepto. En la segunda se analizan los "esquemas de prueba" de los alumnos, los procesos y los enunciados matemáticos, teniendo en cuenta tanto el razonamiento como las funciones de la demostración. Se aplican las conclusiones de ambas investigaciones para establecer algunos resultados matemáticos.

El origen de las investigaciones

Las dos investigaciones citadas tienen su origen en problemas educativos de aula, y la postura inicial del Profesor-Investigador (P-I) respectivo y del Director de las investigaciones fue que la mayor parte de los alumnos no entienden ni el concepto de límite ni la mayor parte de las demostraciones que se hacen en las aulas.

Ya en la década de 1980 T. Ortega construyó un programa de ordenador específico para el aprendizaje del concepto de límite, programa que trabajaba de forma numérica y gráfica la definición del concepto, y que daba paso al formalismo métrico en los términos de ε y δ, al teorema de caracterización, porque era consciente de las dificultades que tenían los alumnos al respecto. Años más tarde S. Blázquez (1999), también cree en esta hipótesis y ambos piensan que el concepto de límite es uno de los conceptos matemáticos más complicados en todos los niveles educativos, supuesto que en cierto modo es contrastado por T. Ortega con licenciados en matemáticas, que en su mayor parte, tras un período no muy largo de inactividad tienen serias dificultades para reproducir la definición conceptual métrica con rigor. Así las cosas nos pareció interesantísimo investigar esta problemática.

La primera creencia sobre el no aprendizaje acerca de las demostraciones también tuvo lugar en el aula, en la década de 1990, T. Ortega pregunto licenciados en Matemáticas, Físicas e Ingeniería si la demostración que da P. Puig (1980) sobre el teorema de Tales (los alumnos la tenían escaneada en una hoja) era ciertamente una demostración o no. Las respuestas favorables estaban en torno al 50 % y las explicaciones que daban la mayor parte de los licenciados eran totalmente disparatadas. M. Ibañes (2000), tras su larga experiencia como docente, tenía una creencia similar y nos propusimos averiguar cómo se producían estos aprendizajes.

Metodología

Si bien la Investigación-Acción (I-A) tiene sus orígenes en los años cuarenta con Kurt Lewin en Norteamérica con fines sociales, a finales del pasado siglo se ha aplicado con éxito en varios países para investigar fenómenos educativos. A nivel teórico esta metodología ha sido ampliamente tratada en la literatura, entre otros autores, por Kemmis y McTaggart (1988), Hopkins (1999), Elliot (1990), y en España G. Peréz (1994). Esta autora indica que la Investigación-Acción (I-A) es una metodología muy apropiada cuando el objeto de estudio son los problemas prácticos tal y como ocurren en su propio contexto y, entre muchas otras cosas, asegura que además de analizar la realidad, ayuda a mejorar los fenómenos educativos.

Estos autores fundamentan su validez en triangulaciones y en saturaciones, pero el problema de la validación está implícito en toda investigación educativa sobre aspectos cognitivos del aprendizaje de los alumnos, y nosotros afirmamos que las informaciones que aportan las entrevistas a parejas de alumnos y los debates en el aula complementan la indagación.

Nosotros sostenemos que tanto las entrevistas como los debates tienen que ser realizados por alguien que conozca las hipótesis de trabajo de la investigación, que sea un especialista en los contenidos matemáticos que se utilizan, que conozca las producciones de los alumnos sobre los que se ha hecho el análisis y las correspondientes reflexiones, y también a los propios alumnos. Considerando estos principios la persona ideal en ambos casos es el P-I.

Conviene que las entrevistas se hagan a parejas de alumnos para que haya triangulaciones y los alumnos deben ser elegidos atendiendo a sus respuestas y a la facilidad de palabra. En los debates el P-I hará de moderador y deben tener dos fases: en la primera los alumnos elegidos (entre los que dieron soluciones diferentes en sus tareas) defenderán sus producciones unos frente a otros y en la segunda intervendrán todos los alumnos de la clase. Tanto los debates, primero, como las entrevistas, después, se graban en su totalidad y así el Director se convierte en el tercer vértice de la triangulación y junto con el P-I analizarán todas las intervenciones.

Fundamentos de las investigaciones

En ambos casos se hizo un análisis histórico y curricular, tras el cual se procedió a la búsqueda de los trabajos de investigación más relevantes que tenían que ver con el concepto de límite y con la demostración. En el primer caso se consideraron las siguientes fuentes:

- Investigaciones sobre concepciones sobre límite funcional.
- Investigaciones sobre errores y dificultades del concepto de límite.
- Investigaciones sobre el concepto de límite en los manuales.
- Investigaciones sobre la enseñanza del concepto de límite.

Apoyados en estas investigaciones elegimos un marco teórico para ayudarnos en el análisis de las tareas de los alumnos. En concreto consideramos la teoría del "Concepto Imagen" de Tall y Vinner y los "Actos de Comprensión" de Sierpinska.
En el caso de la demostración también se hizo una clasificación de las fuentes en cuatro bloques:

- Trabajos generales sobre el aprendizaje de la demostración.

- Trabajos sobre las funciones de la demostración.
- Trabajos sobre niveles de demostración.
- Trabajos sobre la demostración en el aula.

Las investigaciones de Harel y Sowder y de de Villiers fueron las más relevantes para nosotros y ellas aportaron el marco teórico que utilizamos en esta investigación.

Aportaciones sobre el concepto de límite

Se realizó un trabajo de campo durante tres años trabajando los registros verbales, numéricos, gráficos y simbólicos-algebraicos, y se desarrolló una conceptualización de límite funcional basada en la idea de aproximación óptima (tendencia), evitando el subjetivismo y prescindiendo del formalismo de la terminología $\varepsilon-\delta$. Es ésta:
Definición: Sea *f* una función y *a* un número real, el número *L* es el límite de la función *f* en el punto *a*, y se escribe $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (se lee límite cuando *x* tiende a *a* es *L*), si cuando *x* tiende a *a*, siendo *x* distinto de *a*, sus imágenes, *f(x)*, tienden a *L*.
Otra escritura equivalente a la anterior es ésta: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si para cualquier aproximación de *L* existe un entorno reducido de *a* tal que las imágenes de todos los puntos del entorno reducido mejoran dicha aproximación.
De las conclusiones relacionadas con esta conceptualización destacan las siguientes:

- El tratamiento de límite funcional como aproximación óptima, por una parte, aporta unas herramientas de trabajo más ventajosas que las concepciones ingenuas basadas en simples aproximaciones y, por otra, es comprendida por los alumnos mejor que la definición métrica.
- Si se quiere utilizar la concepción formalista $\varepsilon-\delta$ ésta debe introducirse después de que los alumnos comprendan la conceptualización como aproximación óptima, pero ésta aporta el rigor necesario para establecer las propiedades asociadas al concepto.
- Es más interesante la comprensión del concepto que los cálculos algorítmicos y en esa comprensión es importantísimo el uso de los cuatro registros y las traducciones de uno a otro.

Aplicaciones

Prueba del teorema de unicidad. Suponiendo que l_1 y l_2 sean dos límites distintos de *f* en $x=a$, entonces $l_1<l_2$ o bien $l_2<l_1$ y poniendo $m=(l_1+l_2)/2$, en el primer caso, $l_1<m<l_2$ y, en el segundo, $l_2<m<l_1$. Suponiendo que se cumple el primer caso, como *m* es una aproximación de l_1, existirá un entorno reducido de *a*, tal que todas sus imágenes mejoran la aproximación fijada por m y, por tanto, todas sus imágenes serán menores que *m*. Análogamente, como *m* también es una aproximación de l_2, existirá otro entorno reducido de *a*, tal que todas sus imágenes mejoran la aproximación dada por *m* y, por tanto, todas sus imágenes serán mayores que *m*. En consecuencia todas las imágenes del entorno intersección son a la vez menores y mayores que *m* y en consecuencia $l_1>=l_2$. Análogamente se establece que $l_2>=l_1$ y como consecuencia de las dos $l_1=l_2$.

Prueba del teorema del signo. Suponiendo que el límite, L, de la función f en $x=a$ es positivo, como 0 es una aproximación a L, existirá un entorno reducido de a tal que todas sus imágenes mejoran dicha aproximación y, por tanto, serán positivas.
Teorema de integrabilidad. Una función f es integrable Darboux en [a, b], si fijada una aproximación positiva de 0 existe una partición de [a, b] tal que la diferencia entre las sumas superiores de Darboux y las sumas inferiores mejoran dicha aproximación.

Aportaciones sobre la demostración matemática

El punto de partida fue el concepto de Esquema de Prueba (lo que constituye convencimiento y persuasión para los alumnos) que establecen Harel y Sowder (1998) y la clasificación que estos mismos autores hacen de los esquemas de prueba desde el punto de vista da la cognición de los alumnos. En el curso de la investigación nos damos cuenta de que esta clasificación es insuficiente y se completa en la misma. Ya con el marco enriquecido en la propia investigación se obtienen una serie de conclusiones, de las que destacan las siguientes:

- Los alumnos se encuentran en un estado de transición entre los esquemas de prueba inductivos de un caso y los intuitivo-axiomáticos, pasando por los inductivos de varios casos, por los inductivos sistemáticos y por los transformacionales y utilizan uno u otro dependiendo de las condiciones de los enunciados.
- Los esquemas inductivos se manifiestan muy *enraizados* en los alumnos de este nivel. Son mayoría los estudiantes que utilizan o aceptan esta clase de esquemas, muchos de los que evolucionan hacia los esquemas intuitivo axiomáticos no renuncian a los inductivos, y algunos vuelven a retomarlos de una u otra forma.
- Buena parte de los alumnos tiene dificultades en reconocer demostraciones, en distinguirlas de otros procesos y no son conscientes de lo que supone haber demostrado un enunciado.
- El reconocimiento de la demostración está en relación con la evolución del *esquema de prueba* de los estudiantes y, en gran parte, viene determinado por el fuerte enraizamiento de los *esquemas inductivos*.
- Las dificultades que tienen los alumnos a la hora de interpretar los enunciados de los teoremas son tan importantes que les impide saber lo que se tendría que hacer para establecer el enunciado.
- Son particularmente difíciles para ellos los enunciados que contienen la expresión "*condición necesaria*" y les siguen en dificultad los que contienen los vocablos "*condición suficiente*", pero cuando estas expresiones se sustituyen por otras más coloquiales los enunciados se tornas más comprensibles.

Aplicaciones

Ya hemos visto cómo la primera investigación ha generado una nueva conceptualización de límite funcional, pero hay más. Por una parte, las producciones de los alumnos generaron esquemas de prueba transformacionales, desconocidos para nosotros, como por ejemplo el que consiste en levantar un punto de la recta para establecer que la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman dos rectos; por otra parte, los problemas tratados en nuestra investigación tienen su origen en la práctica profesional y, por otra, las conclusiones anteriores ponen de manifiesto que para los alumnos no son tan importantes las demostraciones como, sin duda, lo son para el matemático, y enlazando con la primera investigación, el formalismo tampoco. Más aún el formalismo puede encorsetar la creación matemática en exceso y, en general, son más motivadores los procesos creativos. Con la base que aportan estas reflexiones voy a presentar dos creaciones matemáticas que tienen que ver con la práctica educativa.

La primera surge de mi insatisfacción cómo profesor de matemáticas, cuando desarrollo el tema de escalas, al formular la siguiente pregunta: ¿La proporcionalidad de distancias implica la misma proporcionalidad en longitudes de curva? Así surge el concepto de Semejanza analítica y los teoremas de conservación de longitudes y de áreas. La segunda tiene que ver con la motivación para el estudio de la circunferencia y se da un procedimiento para construir las "curvas de enlace" de las vías de circulación rápida. En ambos casos se consideran esquemas de prueba inductivos.

Semejanza analítica: dos curvas, C_1 y C_2, son semejantes cuando sus ecuaciones paramétricas se pueden expresar de la forma:

$$C_1 \equiv \begin{cases} x = f(t), & t \in [a,b] \\ y = g(t), & t \in [a,b] \end{cases} \qquad C_2 \equiv \begin{cases} x = k \cdot f(t), & t \in [a,b] \\ y = k \cdot g(t), & t \in [a,b] \end{cases}$$

y ambas estén referidas en sistemas de referencia tales que uno de ellos se obtienen del otro mediante una traslación y un giro. A la constante k se la llama razón de semejanza o constante de proporcionalidad.

Teorema de conservación de longitudes. Sí $A_1, A_2, ..., A_n$ son n arcos de curvas semejantes a una curva plana dada A, que se han obtenido de ésta con los factores de semejanza $C_1, C_2, ..., C_n$, tales que $C_1+C_2+ ...+ C_n=1$, *entonces la longitud del arco de la curva A es la suma de las longitudes de los arcos de las n curvas* $A_1, A_2, ..., A_n$.

Teorema de conservación de áreas. Si A_a es el área determinada por una curva sobre el intervalo $[0, a]$, A_b es el área determinada por la curva semejante a la anterior sobre el intervalo $[0, b]$ y A_c es el área determinada por la curva semejante a la primera sobre el intervalo $[0, c]$, entonces $A_a=A_b+A_c$ si, y sólo sí, $a^2=b^2+c^2$.

La clotoide (radioide) es la curva que se debiera utilizar para enlazar tramos rectos en autovía o autopistas. Es una curva función trascendente que en paramétricas tiene estas ecuaciones:

$$x = a\int_0^t \cos u^2 du = aC(t),\ \textit{con } t=s/a,\quad y = a\int_0^t senu^2 du = aS(t),\ \textit{con } t=s/a.$$

Cuando se dibuja esta curva en ingeniería se hace con una planilla y depende de las habilidades del dibujante, pero esta curva se puede dibujar con arcos de circunferencia tangentes y de tal manera que se verifique el siguiente enunciado:

Teorema de aproximación. Para enlazar dos semirrectas se puede sustituir la clotoide por n arcos de circunferencias tangentes entre sí y tales que las diferencias de sus curvaturas estén más próximas a cero que cualquier número positivo prefijado.

Referencias bibliográficas

Blázquez., S. y Ortega, T. (2001). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *AULA, Vol. 10, pp. 117-133.* Salamanca.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Vol 4. Nº3, pp. 219-236. México.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO. Vol. 30, pp. 67-82.* Graó. Barcelona.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles.* Thèse de 3ème cycle, Mathématiques. Grenoble: Université I de Grenoble.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). "Students' Proof Schemes: Results from exploratory studies". En: Dubinski, E.; Schoenfeld, A. y Kaput, J. (Eds), *Research on Collegiate Mathematics Education*, Vol. III., pp. 234-283 . American Mathematical Society, Providence, USA.

Elliot, J. (1990). *La investigación-acción en educación.* Madrid: Morata.

Hopkins, D. (1989). *Investigación en el aula.* Barcelona: PPU.

Kemmis, S. y McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción.* Barcelona: Laertes.

Krenz, A y Osterloh, H. (1975). *Curvas de transición en carretera: manual de clotoides para proyecto y replenteo.* Técnos. Madrid.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2001): Un estudio sobre los esquemas de prueba en alumnos de primer curso de bachillerato. *UNO. Vol. 28, pp 39-60.* Graó. Barcelona.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2002) "Interpretación de algunas expresiones usuales en los enunciados de los teoremas", *Quadrante,* Vol. 10, Nº 2, pp. 97-123. Lisboa.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2002): "Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato".*Enseñanza de las Ciencias.* Nº 21 (1), pp. 49-63. Barcelona.

Pérez, G. (1994): *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes.* Madrid: La Muralla.

Ministerio de fomento (2001): *Norma 3.1-1C sobre trazado de carreteras.* Orden Ministerial de 13/09/2001.

PUIG, P. (1980): *Curso de Geometría Métrica.* Gómez Puig Ediciones. Madrid.

Sierpinska, A. (1985): Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 6.1, pp. 5-67.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Math,* Vol. 12, pp. 151-169.

VAN ASH, A.G. (1993). "To prove, why and how?". *International Journal Mathematics Education Science and Technology*, Vol. **2**, pp. 301-313.

Villiers, M. de (1993). "El papel y la función de la demostración en matemáticas". *Épsilon*, **26**, pp. 15-30.

Sobre la Enseñanza de Límites Usando Calculadoras Gráficas

Antonio R. Quesada
Universidad de Akron, Departamento de Matemática Pura y Aplicada
E.U.A.
aquesada@uakron.edu
Tecnología Avanzada – Nivel Superior

Resumen

En este artículo se usa una selección de ejemplos para ilustrar cómo las capacidades numéricas y gráficas de las calculadoras gráficas, permiten realzar la enseñanza y el aprendizaje de un concepto central en la enseñanza del Cálculo: el límite de una función. En adición a la capacidad de ver inmediatamente la gráfica de una función, la variedad de tipos de datos disponibles en estas calculadoras facilita el uso de distintos enfoques numéricos, lo que hace posible el poder presentar este tema con mayor profundidad y alcance a niveles más elementales. Esto a su vez permite también que el estudiante pueda explorar y descubrir las ideas fundamentales.

Introducción

El límite de una función es uno de los conceptos fundamentales en el estudio del cálculo de funciones reales de variable real. Reconocidamente, este concepto es uno de los más difíciles de enseñar y de entender conceptualmente. Dubinsky & Tall (1991) fueron de los primeros que usaron los ordenadores en la enseñanza del Cálculo para capacitar los estudiantes a hacer construcciones en la pantalla que precedían a sus propias construcciones mentales. Dick & Patton, (1994) publicaron un libro pionero en la enseñanza del Cálculo usando tecnología. Monaghan et al. (1994) examinaron las concepciones sobre límites de los estudiantes que aprendieron el concepto con la ayuda de CAS. Con la excepción de Quesada et al. (En preparación), no parece haber evidencia de estudios sobre la enseñanza de límites usando calculadoras gráficas.

En este artículo se bosquejan algunas de las ideas más relevantes presentadas en el curso corto de igual nombre ofrecido durante el RELME 18. El uso de tecnología, en particular de calculadoras gráficas, facilita, sin necesidad de una gran inversión de tiempo, la incorporación de los enfoques numérico y gráfico para complementar el enfoque algebraico, realzando la enseñanza y el aprendizaje de los límites. Algunas capacidades básicas de estas herramientas hacen que esto sea posible. Primeramente la velocidad y la precisión de estas calculadoras, de costo muy inferior al de un ordenador, facilitan el uso de la estimación como una estrategia viable para la resolución de problemas. En adición, la habilidad de visualizar la gráfica de una función está cambiando la forma en que se introducen muchos conceptos de cálculo. Finalmente, la variedad de tipos de datos disponibles en estas calculadoras, permiten el uso de múltiples enfoques para introducir ideas numéricas tanto en precálculo como en cálculo. Como resultado, es posible estudiar las ideas centrales del cálculo en la forma en que se descubrieron y como mejor se entienden, esto es, como límites de aproximaciones; en consonancia con las ideas de Read & Graham (1972). Se verá también que las calculadoras gráficas tienen el potencial de aumentar el alcance y el grado de dificultad de los problemas que pueden proponerse, tanto al nivel en que tradicionalmente se han estudiado como a niveles más elementales.

Siguiendo la publicación de los "Nuevos Estándares de Currículo y Evaluación Para la Matemática Escolar" (NCTM, 1989) en la que se recomienda el uso de ordenadores y calculadoras en la enseñanza de las matemáticas, comienzan a publicarse en EEUU nuevos currículos de matemáticas que incorporan la tecnología (Core-Plus Mathematics Project, 1998). Como resultado se producen cambios de contenido, de orden del temario, y de la presentación de conceptos. Algunos autores han empezado ya a introducir a nivel de Precálculo ideas precursoras del concepto de límite Demana & Waits (1993). Es posible que, como proponen Quesada & Edwards (Sometido para publicación) en el tema de optimización, en un futuro próximo se use la tecnología para presentar ideas sobre límites en distintos niveles usando distintos enfoques, de manera que los estudiantes sean expuestos a este concepto en forma recurrente. Por último se aclara que la sintaxis usada en las instrucciones y las pantallas que se incluyen corresponden a la calculadora Texas Instruments TI-83. Se espera que el número de pantallas que se presentan, a veces en exceso, eliminen cualquier duda inicial al tratar de reproducir las soluciones que se proveen.

Explorando el comportamiento local y global de una función

En estos primeros ejemplos se ilustran el enfoque gráfico junto con el enfoque numérico que se presenta usando tablas, sucesiones, listas, y el método recurrente.

Ejemplos. Usa evidencia numérica y gráfica para explorar el comportamiento de las siguientes funciones en los valores dados.

I) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ en un entorno de $x=0$; II) $h(x)=\begin{cases} x^2, x\le 1 \\ 3-2x, 1<x<2 \\ x/4+1, 2\le x \end{cases}$, en un entorno de $x=2$;

III) $g(x)=\dfrac{|x+1|}{|\sqrt{x+2}-1|}$ en un entorno de $x=-1$; y IV) el comportamiento de la función $g(x)=(1+1/x)^x$ cuando x crece sin límite, compara tu respuesta con el valor del número e.

Solución. El primer enfoque numérico que se presenta ilustra como la velocidad de las calculadoras actuales convierte la tabla numérica que proveen en una herramienta elemental pero muy útil y accesible a nivel de Álgebra básica, para analizar el comportamiento local y global de una función.

I) Sea $y_1=\dfrac{\sin x}{x}$ y selecciónese *Pregunte* para la variable independiente en *Table Setup*. Se procede entonces a dar valores a *x* arbitrariamente cercanos a cero, primero por la derecha y después por la izquierda, se observa come ilustra la figura 1.a que $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

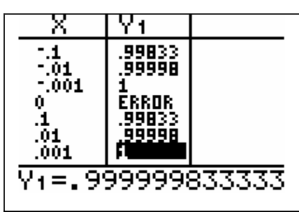


Figura 1.a

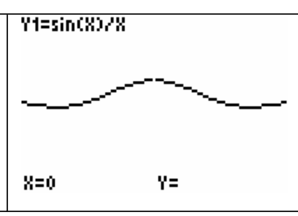


Figura 1.b

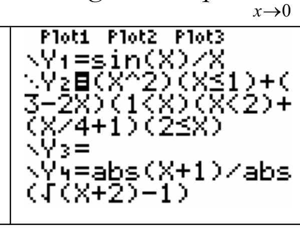


Figura 1.c

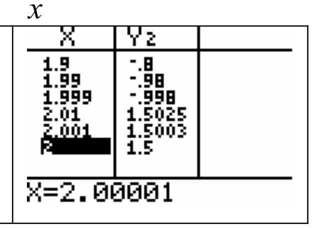


Figura 1.d

A nivel de precálculo o álgebra no es imprescindible el uso de la notación de límite. Sencillamente, este tipo de resultado se puede expresar diciendo que cuando los valores de *x* se acercan más y más a 0 por ambos lados, los valores de la función se acercan más y más a 1 por el lado correspondiente. Estudiantes de precálculo aceptan sin dificultad la notación: $\frac{\sin x}{x} \to 1$ cuando $x \to 0$. Nótese que la simetría de la gráfica de esta función con respecto al eje de ordenadas puede leerse fácilmente, no sólo de la gráfica (figura 1.b) sino también de la tabla.

II) La figura 1.c ilustra la sintaxis necesaria para obtener la gráfica de la función *h(x)* definida por partes. La tabla de la figura 1.d muestra que los límites de *h(x)* por la derecha y por la izquierda convergen a valores distintos, un hecho que también puede visualizarse y confirmarse siguiendo el trazado de la gráfica (figura 1.e) obtenida usando el modo *puntual*.

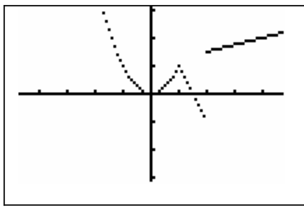


Figura 1.e

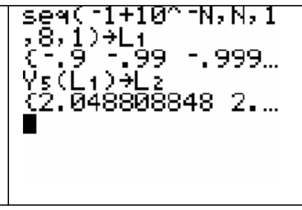


Figura 1.f

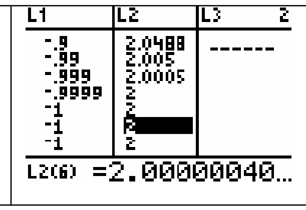


Figura 1.g

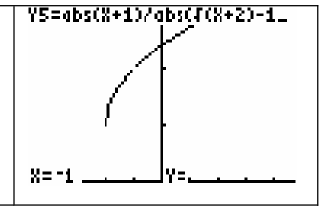


Figura 1.h

III. En este ejemplo se ilustra otro enfoque numérico un poco más sofisticado ya que requiere el uso de sucesiones y listas. Sin embargo, la variedad e importancia de los problemas de cálculo accesibles usando sucesiones justifica la inversión inicial de tiempo que se requiere para explicar a los estudiantes el uso de esta estructura de datos. Hemos usando exitosamente este enfoque con estudiantes en el primer semestre de cálculo una vez que han practicado un poco usando la tabla. Como puede observarse en la figura 1.f, en general para usar valores de *x* que se acerquen a un valor *p* del dominio por ambos lados, se crean dos sucesiones que convergen a *p* usando $p \pm 10^{-n}$ para valores sucesivamente mayores de $n \in \mathbf{Z}^+$. Una vez obtenida, cada sucesión se almacena en una lista. La calculadora permite evaluar la función que se está estudiando usando la lista obtenida como argumento, obteniéndose otra sucesión que se almacena en una segunda lista. Como se ve en la figura 1.g, el editor de listas permite ver las sucesiones de puntos obtenidas. En este caso puede apreciarse que cuando $x \to -1^+, g(x) \to 2$.

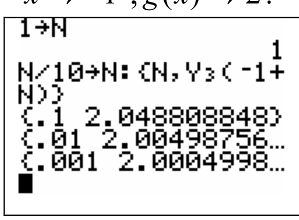


Figura 1.i

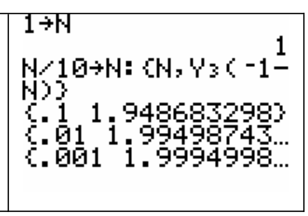


Figura 1.j

Además de la tabla y las listas, existe un tercer enfoque numérico de interés que consiste en usar procesos recurrentes en la pantalla básica. Como Quesada (1999) señala, la tecnología favorece el que estos procesos, que no forman parte del currículo tradicional, puedan en un futuro próximo convertirse en una de las herramientas con las que los alumnos terminen secundaria. Fundamentalmente este enfoque consiste en obtener directamente la sucesión de puntos, uno a uno, en lugar de obtener primero la sucesión de abcisas y luego la de ordenadas. A este efecto, procedemos a iniciar una variable $N = 1$, y seguidamente generamos la sucesión de potencias 10^{-N}, dividiendo *N* por *10* y reasignando el valor obtenido a *N*. Las sucesiones que así se obtienen $\{1 \pm 10^{-N}\}$ convergen a 1 por ambos lados. Nótese (figuras 1.i, 1.j) que la función se evalúa en estas sucesiones para cada valor de *N*, y que se usa la capacidad de concatenar instrucciones, por medio de dos puntos, para efectuar los cálculos e imprimir el punto obtenido. Para poder ver ambas coordenadas se usa una lista que se especifica con llaves.

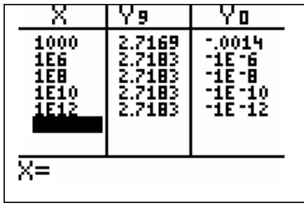


Figura 1.k

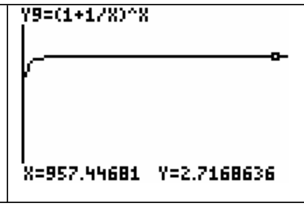


Figura 1.l

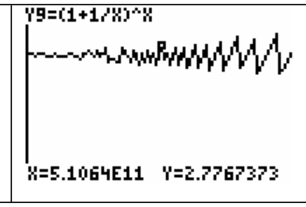


Figura 1.m

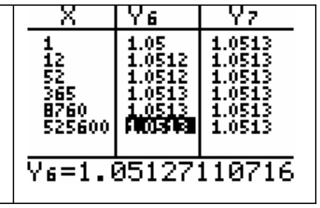


Figura 1.n

IV. Como puede verse en la figura 1.k, al asignar a la variable *x* valores sucesivamente crecientes, usando potencias de diez, la función parece converger a un número irracional. Para comprobar que la función se acerca indefinidamente a *e* cuando la x crece arbitrariamente, basta observar que los valores correspondientes de la función $y_0 = e - (1+1/x)^x$ parecen converger a cero. Moviendo el cursor sobre la gráfica de la función (figura 1.l) refuerza visualmente la convergencia. Cada vez que los estudiantes dan valores arbitrariamente grandes a la variable independiente suele ocurrir que alguno de ellos olvida las limitaciones inherentes a la tecnología que se usa. Por tanto, es importante recordar que, como puede apreciarse en la figura 1.m, si los valores de la función exceden la precisión de la maquina, se producen errores de redondeo que llevan a un comportamiento caótico de la gráfica de la función.
La figura 1.n muestra una aplicación clásica de precálculo. Los valores de la tabla ilustran como al depositar \$1 a un interés compuesto del 5%, la cantidad final al cabo de un año se aproxima al interés continuo $e^{0.5}$ cuando el número de periodos usados para calcular el interés durante el año aumenta indefinidamente (anual, semestral, trimestral, mensual, semanal, etc.).

Motivando con ejemplos prácticos la definición formal de límite

La definición formal del límite de una función, que suele denominarse la definición $\varepsilon - \delta$, es usualmente difícil de entender para una mayoría de estudiantes. Son muchas las razones que pueden aducirse, entre otras, la dificultad del concepto en si, la falta de familiaridad de los estudiantes con la notación formal, la falta de madurez matemática del estudiante cuando se enfrenta a esta definición, la forma en que tradicionalmente se explica, y la ausencia de ejemplos que introduzcan el concepto desde un punto de vista aplicado antes de la definición. El ejemplo que sigue pueden ayudar puede ayudar en este último caso.

Ejemplo. Se desea cortar un disco de radio *4 cm.* y con un área de *50.27* cm^2. Si la cota superior del error que se espera cometer en el área del disco es de a lo sumo $0.75\,cm^2$, ¿es razonable usar una cuchilla de *0.025 cm.* de espesor?

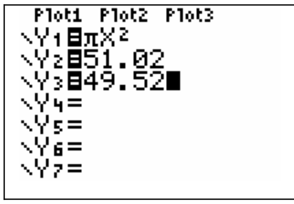


Figura 2.a

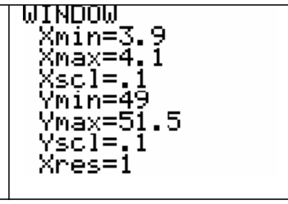


Figura 2.b

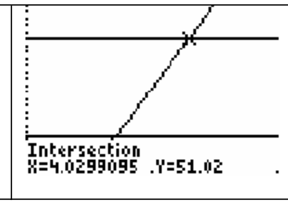


Figura 2.c

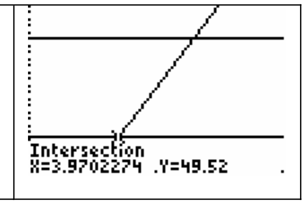


Figura 2.d

Solución. Se comienza por seleccionar una ventana centrada en el punto $(4,50.27)$, y con un intervalo para la *y* que contenga la gráfica de las funciones $y_1 = \pi x^2$, $y_2 = 50.27 + 0.75$ e $y_3 = 50.27 - 0.75$. Usualmente se estima un intervalo pequeño para la *x*. Como muestra la figura 2.a, aunque inicialmente se consideró un radio de *0.5* para la *y* y de *0.1* para la *x,* por razones pedagógicas se usó el radio de la *y* un poco más grande de lo necesario a fin de que se aprecien claramente las intersecciones de la gráfica de y_1 con y_2 e y_3 a la vez que los números que aparezcan en la parte inferior de la pantalla no interfieran con el resto de la gráfica. Se procede entonces a determinar estos puntos de intersección (Figuras 2.c y 2.d) que denotamos por $P(4.03, 51.02)$ y $Q(3.97, 49.52)$.

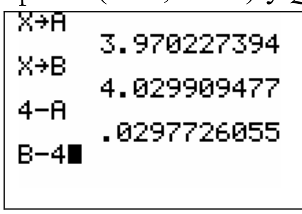


Figura 2.e

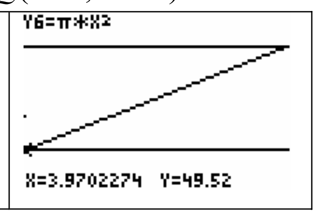


Figura 2.f

A fin de usar la mayor precisión posible, es conveniente almacenar cada abcisa inmediatamente después de obtenerse como se ve en la Figura 2.e. El intervalo asimétrico $A \le x \le B$ es el mayor intervalo posible para los valores del radio que satisfacen la condición de producir un disco tal que $50.27 - 0.75 \le area \le 50.27 + 0.75$. Ya que el radio del correspondiente intervalo simétrico es $\min\{|4-A|, |B-4|\} = 0.03 > 0.025$, el espesor de la cuchilla propuesta es aceptable.

El proceso usado en el problema anterior no sólo facilita la comprensión del mismo, sino que establece un mecanismo para la resolución gráfica de los tradicionales problemas de $\varepsilon - \delta$ que siguen la definición formal de límite. Obsérvese que el problema es equivalente a tratar de encontrar para $\varepsilon = 0.75$ un valor de δ que satisfaga $\lim_{x \to 4} \pi r^2 = 50.27$. Sin embargo, a diferencia de los problemas tradicionales, las dificultades algebraicas que usualmente se plantean usando funciones no lineales o cuadráticas no se dan en este caso. Es decir, el grado de dificultad de este método gráfico es independiente del tipo de función que se use. Además, como se ha visto en el problema anterior, este método permite obtener el mayor intervalo posible, *I*, de valores de *x* tales que $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon), \forall x \in I$.

Ejemplos de funciones de comportamiento atípico

El poder visualizar la gráfica de una función en un entorno dado, facilita la comprensión y el análisis de funciones cuyo comportamiento es más atípico.

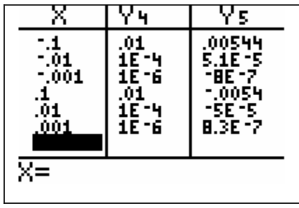


Figura 3.a

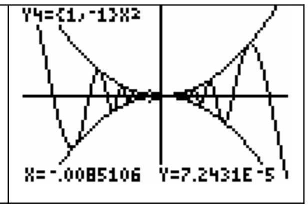


Figura 3.b

Así por ejemplo, el comportamiento de las funciones $f(x)=x^2\sin(1/x), g(x)=x^2$ y $h(x)=-x^2$ en un entorno de $x=0$, cuando se observa gráficamente (figura 3.b), no deja muchas duda sobre el significado del teorema del sándwich. El uso de la tabla ilustra esta convergencia numéricamente.

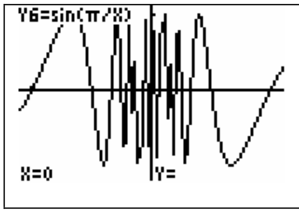


Figura 3.c

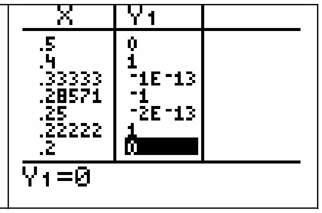


Figura 3.d

De igual forma las figuras 3.c y 3.d ilustran gráfica y numéricamente el comportamiento peculiar de la función $f(x)=\sin(\pi/x)$ en un entorno de $x=0$. En la tabla se ha evaluado la función para $x=1/2, 2/5, 1/3, 2/7, 1/4, 2/9, 1/5$, a fin de ilustrar la oscilación de esta función al acercarse a 0 por la derecha.

Conclusión

Los distintos enfoques numéricos que permite la variedad de tipos de datos existente en las calculadoras gráficas modernas, junto con la visualización que las mismas proveen, facilita el poder presentar el concepto de límite usando distintas representaciones. Como resultado es posible el estudiar este concepto con métodos no tradicionales, con mayor profundidad y empezando a niveles más elementales. Esto a su vez, facilita que el currículo de secundaria pueda adoptar un enfoque espiral, es decir que se puedan abordar ideas precursoras a niveles inferiores. Al mismo tiempo, el uso de calculadoras gráficas hace posible el poder proveer al estudiante con métodos fáciles de usar, menos dependientes de técnicas algebraicas, para la resolución de distintos tipos de problemas relacionados, y facilita que el estudiante pueda explorar y descubrir sus propias soluciones.

Referencias Bibliográficas

Core-Plus Mathematics Project. (1998). *Contemporary Mathematics in Context a Unifying Approach*: *Course I and Course II*. Chicago, Illinois: Everyday Learning Publications.

Demana, F. y Waits, B. (1993). *Precalculus*. Reading, Massachussets: Addison-Wesley Publishing Co.

Dick, T. y Patton, C. (1994). *Calculus of a single variable*. Boston, Massachussets: PWS Publishing Co.

Dubinsky, E. y Tall, D. (1991). Advance mathematical thinking and the computer. En D. Tall (Ed.), *Advance Mathematical Thinking* (pp. 231-250). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Monaghan, J., Sun, S. y Tall, D. (1994). Construction of the limit concept with a Computer Algebra System En J.P. Da Ponte y J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 279-286). Lisbonne, Portugal.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.

Quesada, A. R. (1999). Should Recursion be Part of the Secondary Student's Mathematics Toolbox*? The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education 6*(2), 103-116.

Quesada, A. R. y Edwards, M. T. (2005). *Technology to Support Differentiated Problem-Solving Experiences for Secondary School Mathematics Students*, Manuscrito presentado para su publicación.

Quesada, A. R., Steiner, R. y Wiggins, M. (2005). *Using graphing calculators to enhance students understanding of the formal definition of limits and related* $\varepsilon - \delta$ *problems*. Manuscrito presentado para su publicación.

Read, G. y Graham, A. (1972). *Calculus Via Numerical Análisis*. London: Transworld Student Library.

Resignificación del ph por Medio de la Covariación de Progresiones Geométricas y Progresiones Aritméticas

Miguel Romero y Marcela Ferrari
UAEH, UAG.
México.
Campeon6mx@yahoo.com , marcela_fe@yahoo.com.mx
Pensamiento variacional – Nivel Medio Superior

Resumen

En este artículo, que halla su sustento en la Teoría de Situaciones (Brousseau, 1986), se presentan los avances de nuestra investigación sobre la resignificación del pH, proponiendo el empleo de la relación entre progresiones aritméticas y geométricas para lo cual estamos desarrollando una Ingeniería didáctica. Este estudio se realiza en el CBTas N° 152[1], del Estado de Hidalgo, México, con alumnos de segundo semestre de los bachilleres en las especialidades: Agropecuario, Administración y Contabilidad Rural, e Informática Agropecuaria. La problemática que estamos atendiendo en el defasaje entre los contenidos de los cursos de Química y Matemáticas de estos planteles ya que Química 2 (Segundo semestre), incorpora la determinación del pH como noción importante, tarea que requiere el empleo de los logaritmos, concepto que es abordado en el curso de matemáticas del cuarto semestre.

Introducción

En la última reforma curricular de los CBTas, acaecida a mediados de los ochenta, se plantearon varios cambios en los contenidos de los programas de estudio de materias como Química y Matemáticas. Uno de estos cambios, que consideramos significativo y punto de partida de esta investigación, fue la exclusión de la noción de logaritmo en los programas de Matemáticas de los primeros semestres en tanto que los mismos son utilizados en cursos como el de Química 2 aun antes de que este tema sea abordado escolarmente.

El estudio de este defasaje entre los contenidos de Química y de Matemáticas, se realiza en el C.B.T.a. N° 152, donde los alumnos del 2° semestre de los Bachilleres en las especialidades: Agropecuario, Administración y Contabilidad Rural, e Informática Agropecuaria se enfrentan, en su programa de Química 2, a la determinación de pH tarea que requiere el empleo de logaritmos. Sin embargo, los logaritmos, como objeto de estudio aparecen en los programas de matemáticas correspondientes a cuarto semestre. Esto ocasiona que los estudiantes realicen los cálculos del pH con el empleo de la calculadora, desconociendo completamente esta poderosa herramienta matemática y por tanto, sin oportunidad de darle significado. Se refuerzan así, las prácticas algorítmicas.

Este hecho motiva, dado los conflictos a los que se enfrentan los alumnos a la hora de realizar los cálculos y que presenciamos en el quehacer docente diario, nuestro interés por aportar argumentos matemáticos alternativos en la clase de Química, que permitan a los alumnos comprender con mayor amplitud el concepto de pH al abordar la naturaleza propia de los logaritmos desde su definición como relación entre una progresión geométrica y una aritmética, tema que desarrollaremos más adelante.

[1] Centro de Bachillerato Tecnológico agropecuario N° 152

Antecedentes

Nuestro interés en la problemática planteada surge de observaciones cotidianas de distintos grupos de alumnos en nuestro carácter de profesores de Química. En este sentido, una de las fuentes que antecede a esta investigación, lo constituye la propia experiencia adquirida en el C.B.T.a. N° 152, misma que proporcionó evidencias surgidas de exploraciones iniciales y de experiencias en el salón de clases. Esto nos permitió detectar la falta de significación y la mecanización en el cálculo del pH, noción química que utilizan los logaritmos.

A su vez, encontramos aportes interesantes para nuestro trabajo en Confrey (1995) y Lezama (1999) quienes identifican como un obstáculo epistemológico, la enseñanza de estructuras multiplicativas desde las aditivas y el uso de las primeras para introducir la potenciación a la hora de generalizar hacia el carácter funcional de las exponenciales y de allí inferir relaciones con logaritmos a través de funciones inversas.

Consideramos también como un importante referente de esta investigación el trabajo de Ferrari (2001) donde se documenta y discute la "dislexia" entre la presentación aritmética y funcional de los logaritmos en el discurso matemático escolar. Esto debido a que el abordaje de la funcionalidad de los logaritmos raya en lo axiomático, ya que no existen elementos en el discurso escolar que suavicen el pasaje de lo aritmético a lo analítico en el tratamiento de este concepto.

Así, nuestro punto de partida es la hipótesis epistemológica planteada en Ferrari (2001), en donde se establece que definir a los logaritmos como la relación entre una progresión geométrica y una aritmética, elemento que permitió la adecuación de los logaritmos a varios paradigmas y contextos, podría ser una fuente de resignificación de los mismos.

En este sentido, nos interesa resignificar el concepto de pH bajo estos supuestos y para ellos diseñaremos secuencias matemáticas apoyadas en el estudio y análisis de las progresiones aritméticas y geométricas. Sin embargo, el principal objetivo de este proyecto de investigación, es buscar evidencias de que, la relación de estas progresiones podría ser un argumento para enriquecer la construcción escolar de las funciones logarítmicas.

Discusión de la noción de pH

El pH es presentado a los alumnos de Química 2 como:

> *El pH es el logaritmo negativo de la concentración de iones hidrógeno o hidronio*
>
> $$pH = -\log H^{+}$$
>
> (Ocampo, 1992, pp. 75-76)

Su importancia radica en que los valores del mismo determinan si una solución es ácida , alcalina o neutra y son los efectos que puede tener tanto en química como en suelos. En la primera, nos ayuda a diferenciar un ácido de una base (hidróxido); en cambio en suelos, dependiendo de los valores de pH nos proporciona información sobre los nutrientes que están disponibles y sobre los cultivos que prosperan mejor y como consecuencia tengan mejores rendimientos, empleándose también en la clasificación de suelos.

En Ortiz (1990) se define el pH como la característica del suelo más comúnmente medible. Es el criterio más ampliamente usado para juzgar si el suelo es ácido o alcalino, recordemos que pH con valor de 7 es neutro, menores de 7 es ácido y mayores de 7 es alcalino.
Por otro lado, los ácidos y las bases se clasifican en fuertes y débiles basándonos en la concentración de iones hidronio y iones oxhidrilo, es decir, en función del pH y del pOH.

Aplicaciones del pH

El contexto en que los alumnos se enfrentan al pH, varía de acuerdo a la orientación de su Bachillerato. En particular nos interesan las aplicaciones que el mismo posee en el tratamiento de suelos, tema propio del Bachilleres en especialidades: Agropecuario, e Informática Agropecuaria, en Administración y Contabilidad Rural que se lo aborda sólo en Química 2, donde se realiza esta investigación.

Se desea transmitir en este curso la importancia de la influencia del pH sobre el aprovechamiento de los nutrientes para las plantas. La mayor parte de los nutrientes se aprovechan mejor en el rango de pH de 6.0 a 8.5 como son: Nitrógeno, Fósforo, Potasio, Azufre, Calcio y Magnesio. En cambio para pH de 5.0 a 7.0 se aprovechan mejor por las plantas los nutrientes: Fierro, Manganeso, Boro, Cobre y Zinc, y para pH de 7 en adelante se aprovecha el Molibdeno.

Los cultivos prosperan mejor cuando el pH de la tierra es apropiado, considerándose que muchos de ellos se desarrollan mejor con pH entre 5.5 y 7 (Garman, 1980).

También el pH se emplea en la clasificación de suelos como son: Suelos salinos, Suelos sódico-salinos y suelos sódicos no salinos (Richards, 1980)

Los valores bajos de pH pueden ayudar en la conservación de los alimentos de dos maneras: directamente, inhibiendo el crecimiento microbiano, e indirectamente, a base de disminuir la resistencia al calor de los microorganismos, en los alimentos que vayan a ser tratados térmicamente (Chapman & Hall, 1996)

Como observamos, el uso que en estos Bachilleratos se le confiere al pH, trasciende las clases de Química donde se lo presenta.

Discusión matemática del problema de investigación

La hipótesis epistemológica de partida que se planteara en Ferrari (2001), nos lleva a recordar las progresiones en juego, para luego, establecer su covariación y definir los logaritmos así como su relación con el pH donde su uso busca facilitar las operaciones que se requieren al manipular compuestos químicos.

Según Baldor (1998), uno de los libros recomendados en los cursos de matemáticas del C.B.T.a 152, las progresiones son series que corresponden a sucesiones de términos formadas de acuerdo con una ley, clasificándolas en: aritméticas y geométricas.

Una progresión aritmética es toda serie en la cual cada término después del primero se obtiene sumando al término anterior una cantidad constante llamada razón o diferencia. Así, 1, 3, 5, 7..... es una serie cuya ley es que cada término se obtiene sumando 2 al término anterior. En tanto que, un progresión geométrica es toda serie en la cual cada término se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad constante que es la razón. Por ejemplos, 1, 2, 4, 8 ... es una serie cuya ley es que cada término se obtiene multiplicando por 2 el término anterior

Sin embargo, nos interesa, la relación entre las progresiones aritméticas y geométricas dan vida a los logaritmos. Su argumento inicial fue facilitar cálculos, en particular, "multiplicar sumando". En química, se introducen los logaritmos con este fin ya que las concentraciones de compuestos químicos oscilan entre 10^{-14} y 1.

Recordemos que y el valor de pH es igual al logaritmo negativo de la concentración de iones hidrógeno lo cual involucra la relación entre moles y volumen. Los moles corresponden a los pesos moleculares, expresados en gramos, de cualquier elemento o compuesto; en tanto que la concentración molar (M) se refiere al número de moles (n) existentes por unidad de volumen (V).

Si consideramos el volumen constante y seguimos una progresión geométrica para los valores de moles, vemos que pH se ajusta a los valores de progresión aritmética. Para ello estudiaremos a modo de ejemplo construimos esta tabla

TABLA DE MOLES, VOLUMEN. CONCENTRACIÓN Y VALORES DE pH

n	**V**	**M**	**pH**
2×10^{-2}	0.1	2×10^{-1}	0.6989
2×10^{-3}	0.1	2×10^{-2}	1.6989
2×10^{-4}	0.1	2×10^{-3}	2.6989
2×10^{-5}	0.1	2×10^{-4}	3.6989
2×10^{-6}	0.1	2×10^{-5}	4.6989
2×10^{-7}	0.1	2×10^{-6}	5.6989

En la tabla anterior **n** representa el número de moles y la fórmula para determinarlos corresponde a: **n = m/PM** donde **m** representa la masa en gramos de la sustancia y **PM** representa peso molecular de la misma expresado en gramos/mol. De tal manera que al aplicar la fórmula las unidades quedan como moles. Se hace la aclaración que los valores de la tabla en cuestión corresponden a la concentración de iones hidrógeno presentes en una sustancia ácida.

Como se ha mencionada el pH nos indica la acidez o alcalinidad de las sustancias dependiendo sus valores, que son: de 0 a 6.9 es ácido, 7 es neutro y mayor de 7 hasta 14 es alcalino y el pH se determina con la fórmula: $pH = -\log H^{+}$

Para estudiar estas relaciones entre acidez y alcalinidad utilizaremos una tabla de valores más sencillos donde se evidencie la relación entre la concentración de hidrógenos y OH con el pH.

M	pH			M	pH
10^{0}	0			10^{-7}	7
10^{-1}	1			10^{-8}	8
10^{-2}	2		alcalino	10^{-9}	9
10^{-3}	3			10^{-10}	10
10^{-4}	4			10^{-11}	11
10^{-5}	5	ácido		10^{-12}	12
10^{-6}	6			10^{-13}	13
10^{-7}	7			10^{-14}	14

Vemos que para aumentar una unidad de pH de un componente químico, por ejemplo de 4 a 5, sumamos una unidad en la columna derecha, en tanto que en la columna izquierda dividimos por 10 para pasar de 10^{-4} a 10^{-5}, por lo tanto disminuyó su concentración molar 10 veces.

En este sentido, para pasar de una sustancia ácida a una neutra deberíamos disminuir la concentración de iones hidrógenos (H^{+1}). Con esta acción aumentan simultáneamente los iones oxidrilos $(OH)^{-1}$. Vemos que de 7 en adelante aumenta la concentración OH, registrándose la mayor concentración hacia el valor de 14 para el pH.

En las columnas de la izquierda se representa los cambios en la acidez de una sustancia química afectados por la concentración de iones hidrógenos o hidronio. Se observa que la acidez aumenta hacia los valores menores de pH, coincidiendo con el aumento de la concentración (M) molar.

En las columnas de la derecha se representa los cambios en la alcalinidad de una sustancia química afectados por la concentración de iones OH u oxidrilos. Se observa que la alcalinidad aumenta hacia los valores mayores de pH, coincidiendo con la disminución de la concentración (M) molar de los hidrógenos y un aumento en la concentración molar de iones oxidrilos.

A manera de conclusión

Estos cambios de acidez y alcalinidad o basicidad se pueden estudiar al considerar los cambios de concentración que pueden ser realizados con la relación entre una progresión geométrica (en las columnas izquierdas) y una progresión aritmética (en las columnas derechas).

Cambios unitarios en el pH de una sustancia se repercute por cambios de orden diez, esto es, disminuir diez veces la concentración molar provoca que el pH aumente una unidad.

Todas estas ideas y nociones que hemos presentado en este artículo son parte del análisis preliminar de la Ingeniería Didáctica que estamos desarrollando. Este estudio del pH, donde está presente la relación entre las progresiones geométricas y aritméticas, es un argumento interesante para construir la noción de los logaritmos en otro contexto y por ende resignificar el pH que es la noción central de esta investigación.

Referencias Bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En Pedro Gómez (ed), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la Investigación y la Innovación en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas*. México, Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica.

Baldor, A. (1998). Álgebra, Décima Sexta Reimpresión. México:Publicaciones Cultural.

Brousseau, G. (1986). Fondements et Methodes de la Didactique des Mathematiques,*Recherches en Didactique des Mathematiques,* 7(2),33-115

Chevallard, Y. (1995). *La Transposición Didáctica*. Buenos Aires, Argentina: Aique.

Confrey, J. (1995). Splitting, Covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education* 26(1), 66-86

Ferrari, M. (2001) *Una Visión Socioepistemológica. Estudio de la Función Logaritmo*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Lezama, J. (1999) *Un Estudio de Reproductibilidad: El Caso de la Función Exponencial*. Tesis de Maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Richards, L.A. (1980). *Suelos Salinos y Sódicos*. México. Editorial Limusa..

Ortiz, V. Y Carlos Ortiz, S. (1990). *Edafología*. México. Editora: V.A. Gómez Cuevas. Universidad Autónoma Chapingo.

Ocampo G. A. Y colaboradores. (1992). *Fundamentos de Química 3*. México. Publicaciones Cultural.

Willard. H. G. (Traducido por Rodríguez de la Torre, 1980). *Manual de Fertilizantes*. México. Editorial Limusa.

Análisis Gráfico de funciones

María del Socorro Valero
CBTis No. 164, México
paraklet@prodigy.net.mx
Pensamiento variacional - Nivel: Superior

Resumen

En este curso se pretende realizar análisis de funciones a partir de sus representaciones gráficas. Se parte del desarrollo de actividades de lectura, interpretación y construcción de gráficas de funciones sobre la base de un ambiente rico en significados visuales. Se desarrollarán actividades que requerirán procesos de conversión y tratamiento de diferentes sistemas semióticos de representación como el gráfico, verbal y analítico, pero predominantemente el gráfico. La validez de las argumentaciones que permitirán dar respuesta a los cuestionamientos incluidos en estas actividades, será de naturaleza eminentemente visual.

Introducción

Hoy día se acepta que la escuela tiene como uno de sus fines principales la formación de una concepción científica del mundo en los estudiantes. También es aceptado por la comunidad académica, que la enseñanza y el aprendizaje de la matemática pueden contribuir al logro de este fin. Pero en los procesos que intencionalmente se ponen en marcha para la consecución de este propósito se forman una serie de concepciones, muchas de cuales, suelen convertirse en obstáculos para el cumplimiento de este objetivo.
En la práctica escolar los profesores de matemáticas utilizan gráficas cartesianas o representaciones figurales para la enseñanza de las funciones y el análisis de su comportamiento. Pero hay evidencias de que existen muchas concepciones, denominadas alternativas por algunos autores (Confrey, 1990; Mevarech y Kramarsky, 1997) que se generan en los estudiantes, y también en algunos profesores, que no son congruentes con las aceptables en la matemática. Las concepciones alternativas podrían permanecer en estudiantes y profesores indefinidamente si no se encuentran en situaciones en las que se haga explícita su contradicción con las teorías aceptadas, pero sobre todo, si no existe interiorización de tales contradicciones y el reacomodo cognitivo que las hagan convivir coherentemente con las aceptables.
Estas concepciones han sido identificadas a partir del planteamiento de actividades de construcción o de lectura y análisis de gráficas. La construcción de gráficas a partir de un enunciado verbal o de una situación real, implica acciones derivadas del cambio de registro; a partir de esas producciones es que los investigadores identifican tales concepciones. Algunas de las investigaciones que involucran construcción de gráficas se pueden dividir en las que usan tecnología (Yerushalmy y Shternberg, 1998) en donde los estudiantes se ven precisados a pasar del contexto real al registro gráfico, y aquellas en donde los estudiantes construyen gráficas sin el uso de tecnología (Mevarech y Kramarsky, 1997; Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2002) en que los estudiantes transitaron del registro verbal al gráfico, o como la de Even (1998) en donde algunas de las actividades suponen el paso de la representación simbólica a la representación gráfica. Algunas otras investigaciones están más enfocadas al análisis de gráficas previamente construidas por el investigador (Janvier, 1998); las interpretaciones en este caso están más influidas por lo que los estudiantes o profesores *observan* o *interpretan* sobre una

gráfica dada. A esta categoría pertenece el trabajo de Hitt (11996) en el cual los profesores examinados requirieron transitar del registro gráfico a la representación pictórica.
En México, el grupo del Dr. Crisólogo Dolores, ha realizado investigación cuyo objetivo ha sido el desarrollo de pensamiento y lenguaje variacional en situación escolar. Uno de los temas que hoy día ha ocupado parte importante de su atención se refiere precisamente al análisis y construcción de gráficas de funciones. En estos trabajos, han sido reiteradamente encontradas una serie de concepciones alternativas respecto del análisis de funciones a través de sus gráficas. En (Dolores y Valero, 2004) se reporta que, en un estudio longitudinal realizado con estudiantes universitarios se identificaron una amplia variedad de concepciones alternativas, entre las que se identificaron dos patrones principales al plantear los cuestionamientos utilizando los registros verbal y gráfico:

- Patrón 1. Cuando los estudiantes manifiestan este patrón de concepciones alternativas, establecen una consistente asociación entre abscisas y ordenadas para determinar el signo de las segundas, de acuerdo al signo de las primeras. Además, la identificación del comportamiento de la función se hace a partir de la consistente relación que los estudiantes establecen entre su ubicación y su comportamiento, es decir, si las ordenadas son positivas, la función es creciente; si las ordenadas son negativas, la función es decreciente. Presumimos que detrás de este patrón de concepciones alternativas se encuentra el hecho de que el individuo no pone en juego la relación de covariación existente entre las variables presentadas en forma de gráfica, manifestando con ello deficiencias en el funcionamiento de su razonamiento covariacional en el sentido de Carlson *et al* (2002).
- Patrón 2. Cuando los estudiantes analizan las gráficas de funciones de acuerdo a este patrón, la ubicación de la función la determinan en términos de dónde comienza su mano a trazar la gráfica. Si su mano comienza el trazo arriba del eje horizontal, para ellos, la función es positiva; si ubican su mano al inicio del trazo debajo del eje horizontal, para ellos, la función es negativa. A su vez, el comportamiento de la función se analiza asignando a los términos creciente y decreciente, significados acordes al sentido que estas palabras tienen en el lenguaje coloquial. Es decir, creciente es todo lo que sube y decreciente es todo lo que baja. Para los estudiantes que manifiestan este patrón de concepciones alternativas, la lectura que hacen de las gráficas en el plano cartesiano responde solo el movimiento de la mano; atienden la trayectoria del trazo de la curva y desatienden la relación de covariación entre x e y.

Cuando las preguntas fueron formuladas utilizando los registros analítico y gráfico, identificaron un tercer patrón:

- Patrón 3. El análisis de las funciones lo hacen atendiendo a la relación que establecen entre los signos de relación presentes en el enunciado de la instrucción y la variable x.

Las cosas no son muy diferentes en profesores de física y estudiantes de secundaria. Al plantearles actividades de análisis de gráficas de funciones de coordenadas tiempo−distancia que representaban fenómenos físicos, Dolores, Alarcón y Albarrán (2002) encontraron, concepciones alternativas como las siguientes:

- Asociación entre la mayor velocidad media con la representación gráfica de la ordenada de mayor altura o con el intervalo al que le corresponden las ordenadas de mayor altura;

- Asociación entre la gráfica cartesiana que se asemeja a la trayectoria para el caso de la caída libre de los cuerpos, con la trayectoria misma;
- La no aceptación de que una gráfica de coordenadas tiempo–distancia y otra de coordenadas velocidad–tiempo puedan representar al mismo movimiento.

Se pudiera pensar que con gráficas sencillas como las rectas, los estudiantes no encontrarían mayores problemas, pero esto no es así. Dolores y Catalán (2000) encontraron, en situación escolar que, cuando los estudiantes de bachillerato utilizaban gráficas para determinar los cambios, sólo la mitad de ellos lo lograron hacer. Solo una cuarta parte de los estudiantes dieron muestras de interpretar consistentemente la ecuación de la recta, dada su pendiente y la ordenada al origen y representarla gráficamente, aunque no utilizaron la relación de proporcionalidad implícita en el coeficiente *m* que da la pendiente. En general, encontraron escasa capacidad para visualizar y analizar gráficas y mayor proclividad a realizar operaciones.

Referentes Teóricos

Desde un punto de vista general este curso se fundamenta en las ideas que acerca del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PLV) se han generado en el grupo de investigadores organizados en torno del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME). En nuestro país varios investigadores (Cantoral y Farfán, 2000; Dolores 2000) realizan sus trabajos ocupándose de esta línea de investigación la cual estudia la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos, atendiendo a una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. Para acceder al pensamiento y lenguaje variacional, se precisa entre otras cosas, del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende pues el conocimiento superficial no resulta suficiente para desarrollar las competencias esperadas en los cursos de análisis.

Por otra parte, acorde con la Teoría Antropológica de la Didáctica de las Matemáticas de Chevallard (Bosch, 2000) consideramos como objeto primario de investigación a la actividad matemática, tal como se realiza en una institución determinada. Esta teoría describe a la actividad matemática y el saber que de ella emerge en términos de organizaciones matemáticas. Una organización matemática es una entidad compuesta por tipos o tareas problemáticas, tipos de técnicas que permiten resolver los tipos de problemas, tecnologías o discursos que describen y explican las técnicas y una teoría que fundamenta y organiza los discursos tecnológicos. En general, los elementos tecnológicos y teóricos de una organización matemática remiten a elaboraciones descriptivas y justificativas que son el fruto del trabajo matemático de varias generaciones. Pero, cuando se consideran organizaciones matemáticas en proceso de construcción o reconstrucción, ya sea en manos de investigadores o de alumnos y profesores, entonces también podemos hablar de *tecnologías* y *teorías* para referirnos a discursos mucho más informales y espontáneos producidos por los sujetos en situación de resolución de problemas para comentar, explicar y justificar su actividad. Una de las organizaciones matemáticas utilizadas en este curso, se refiere a algunas tareas problemáticas relativas al análisis de funciones. Estas tareas nos permiten estudiar la actividad matemática relativa al análisis de funciones por medio de representaciones gráficas, verbales y analíticas.

Asumimos al igual que Duval (1999) a estas representaciones semióticas como medios de exteriorización de las concepciones y que son útiles en la comunicación**.** Las concepciones de los estudiantes, exteriorizadas por medio de diversas formas de representaciones lingüísticas, han sido estudiadas por los investigadores en diversos campos y han involucrado a conceptos tales como los obstáculos epistemológicos (Bachelard 1988, Sierpinska, 1992), los obstáculos ontogénicos y los obstáculos didácticos (Brousseau, 1997), las imágenes conceptuales (Tall y Vinner, 1981), las concepciones espontáneas (Pozo 1996, Farfán 1997) las concepciones precientíficas, las concepciones alternativas (Confrey, 1990; Mevarech y Kramarsky, 1997). Todas estas dan lugar a concepciones que cobran forma de creencias, se arraigan fuertemente en la mente de los estudiantes y son difíciles de cambiar mediante la enseñanza tradicional. A lo largo de sus vidas los seres humanos desarrollan ideas acerca de su mundo, desarrollan significados para palabras usadas en la ciencia y desarrollan estrategias para obtener explicaciones acerca de cómo y por qué las cosas se comportan como tales. Estas categorías de creencias, teorías, significados, y explicaciones, las consideramos como *concepciones de los estudiantes*. Cuando esas concepciones se forman antes de que el conocimiento haya sido sujeto oficial de aprendizaje, dan lugar a las concepciones espontáneas. Aún después de que son sujetos a procesos sistemáticos de enseñanza los estudiantes construyen *sus propios* conocimientos que difieren de los saberes que los profesores les desean transmitir.
Cuando esas concepciones de los estudiantes entran en conflicto con los significados aceptados, aparecen las *concepciones erróneas*, *errores sistemáticos*, las *concepciones alternativas* (Confrey, 1990). Estos términos reflejan diferentes perspectivas de los conocimientos de los estudiantes. En tanto los conceptos erróneos y los errores sistemáticos describen rasgos incorrectos de los conocimientos de los estudiantes que son repetibles y explícitos, las preconcepciones y las concepciones alternativas tienen una connotación más neutral, pues enfatizan el cambio que va, desde los errores de los estudiantes hasta las diferentes maneras en que ellos entienden las tareas dadas. El término *concepciones alternativas* es utilizado para describir al conocimiento que difiere de aquél que se propone para ser aprendido. Estos términos enfatizan lo que los estudiantes realmente saben y no lo que no saben, y nos inducen a ver los procesos de aprendizaje desde el punto de vista de los estudiantes.
En este orden de ideas, asumimos como cambio conceptual a la transformación de las concepciones alternativas en concepciones científicas. Coincidimos con Pozo (1996) en que el cambio conceptual podría posibilitarse bajo las consideraciones siguientes:

- El aprendizaje de conceptos científicos no consiste sólo en reemplazar unas ideas cualesquiera por otras científicamente aceptadas, sino que en el aprendizaje existe una cierta conexión genética con la teoría alternativa del individuo y la teoría científica que se le pretende transmitir.
- Para que el individuo pueda comprender la superioridad de la nueva teoría es preciso enfrentarle a situaciones conflictivas que supongan un reto para sus ideas. Es decir, el individuo ha de darse cuenta de que su teoría previa es errónea en ciertas situaciones, en las que conduce a predicciones que no se cumplen. Al mismo tiempo, hay que hacerle ver también que la nueva teoría hace predicciones mejores.

- Por último, a partir de lo anterior, puede deducirse que la toma de conciencia por parte del sujeto es un paso indispensable para el cambio conceptual. Los conceptos alternativos de los alumnos suelen ser implícitos. Un primer paso para su modificación será hacerlos explícitos mediante su aplicación a problemas concretos.

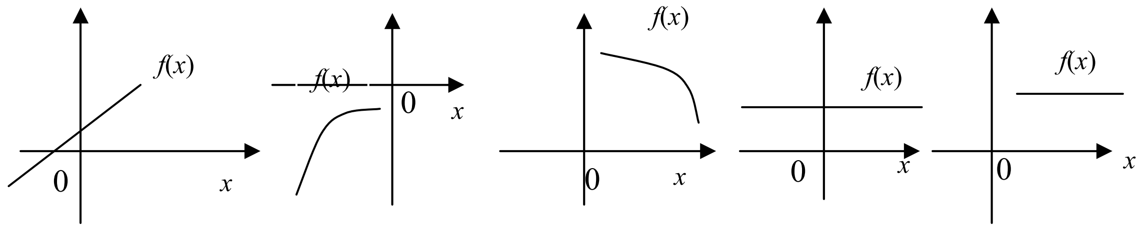
Justificación

Compartimos con el Dr. Dolores (2002) el planteamiento de que el poder analizar el comportamiento de las funciones es uno de los rasgos esenciales que caracteriza al pensamiento variacional. El pensamiento variacional es una forma de pensamiento científico que requiere de una formación rica en imágenes mentales gráficas. No obstante, en el proceso de desarrollo de saberes básicos como el análisis de funciones, surge una diversidad de concepciones alternativas que hace falta remover para progresar en el desarrollo del pensamiento variacional. Los esfuerzos que se realicen por contribuir al desarrollo de esta forma de pensamiento en los estudiantes y profesores redundarán en el mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje del análisis de funciones.
La enseñanza y el aprendizaje de la matemática persiguen como objetivo final lograr la transformación de ideas y formas científicas de pensamiento en los estudiantes. Esos cambios y transformaciones se orientan hacia la formación de una concepción científica del mundo; ésta implica la formación de ideas científicas y por tanto la superación de las concepciones espontáneas o alternativas. Por ello, es necesario estudiar sistemáticamente los cambios que obran desde las concepciones alternativas hacia las concepciones científicas aceptables en el trabajo con las gráficas de las funciones. Si se conocen a profundidad las concepciones alternativas de los estudiantes y profesores cuando analizan el comportamiento de las funciones, se pueden crear mejores condiciones para diseñar y ejecutar acciones tendientes a cambiarlas. Las formas tradicionales de enseñanza no atienden a estas concepciones, por eso muchos estudiantes y profesores encuentran en las clases ordinarias el terreno propicio para arraigarlas en su pensamiento o en el peor de los casos, ignorarlas o evadir su presencia. He ahí la importancia y la necesidad de atenderlas concienzudamente.

Metodología

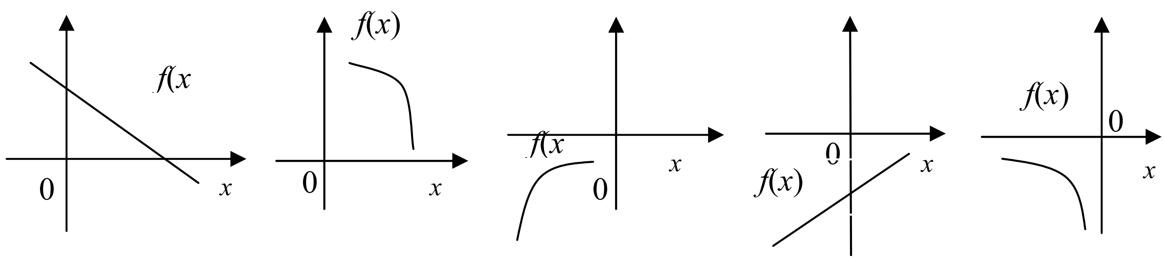
El curso fue planificado atendiendo a dos factores fundamentales: que favoreciera el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional y que tal desarrollo fuera evaluado cualitativamente. El contenido matemático fue organizado y diseñado bajo la premisa básica de la actividad es decir, se concretó mediante una serie de ejercicios y problemas diseñados bajo la óptica de los sistemas semióticos de representación y de su movilidad entre ellos. La metodología de trabajo se pensó para estimular el trabajo cooperativo y el trabajo expositivo; se trató de que los profesores estuvieran en constante actividad discutiendo y resolviendo los ejercicios y problemas planteados.
La valoración de las producciones de los profesores se pensó para ser analizada bajo la perspectiva cualitativa, pues se pretendía indagar en los aspectos cualitativos del desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. El diseño del cuestionario diagnóstico se realizó con la finalidad de explorar el estado de la habilidad de análisis de funciones elementales en los profesores participantes. Su validación se hizo con algunos profesores de cálculo que no participaron en la experiencia didáctica y se consideraron factores como: que no fuera muy extenso, que las preguntas fuesen claras y univocas, que permitieran medir el análisis creciente, decreciente, signo, a partir de una gráfica, un enunciado verbal y que consideraran el papel de la derivada en el análisis de funciones

1. ¿Para cuál o cuáles $f(x)$ se cumple que $f\,'(x) > 0$ para toda x? Subraye el (los) inciso(s) correspondiente(s)



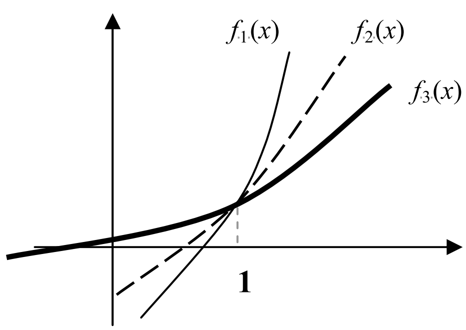
A **B** **C** **D** **E**

2. ¿Para cuál o cuáles $f(x)$ se cumple que $f\,'(x) < 0$, para toda x? Subraye el (los) inciso(s) correspondiente(s)



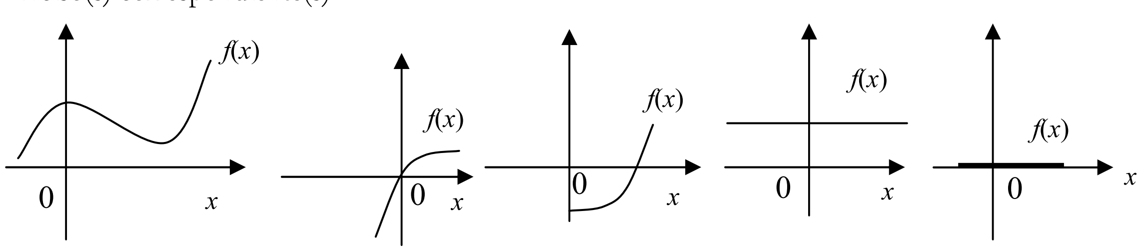
A **B** **C** **D** **E**

3. A continuación se muestran las gráficas de tres funciones; todas se interceptan en $x = 1$. Compare $f\,'_1(1)$, $f\,'_2(1)$ y $f\,'_3(1)$. Explique su respuesta



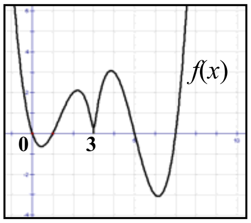
$f\,'_1(1)$___$f\,'_2(1)$___$f\,'_3(1)$

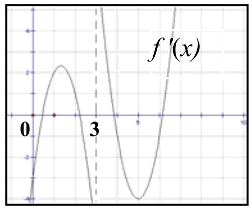
4. ¿Para cuál o cuáles $f(x)$ se cumple que $f\,'(x) = 0$ para algunos valores de x? Subraye el (los) inciso(s) correspondiente(s)



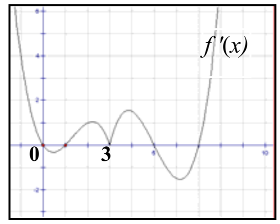
A **B** **C** **D** **E**

5. De entre las gráficas (*a*), (*b*), (*c*) y (*d*) ¿cuál considera que corresponde a $f'(x)$ si la gráfica de $f(x)$ es la primera de las que se muestran a continuación? Subraye el inciso correspondiente

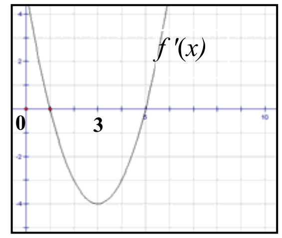




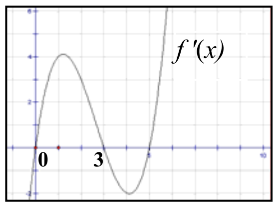
(*a*)



(*b*)



(*c*)



(*d*)

NINGUNA DE LAS
ANTERIORES

(*e*)

Actividades

Las actividades desarrolladas en el curso fueron tomadas de (Dolores, 2001) las cuales fueron diseñadas de tal manera que permitieran desarrollar las habilidades siguientes:

- Identificación de intervalos donde la gráfica es creciente o decreciente y los intervalos donde la función es positiva o negativa.
- Interpretación de las condiciones de crecimiento, decrecimiento y estabilización de las funciones, del plano analítico al gráfico y viceversa.
- Transferencia de información a partir de la gráfica de $f'(x)$ para construir la gráfica de $f(x)$ y recíprocamente.
- Transferencia de información variacional de las funciones del plano verbal al plano geométrico.

Referencias Bibliográficas

Bosch, M. (2000). *Un Punto de Vista Antropológico: La Evolución de los Instrumentos de Representación en la Actividad Matemática.* Ponencia invitada al Seminario de Investigación I, “Representación y comprensión” del IV Simposio SEIEM, Huelva, España.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, The Netherlands, pp. 79-116.

Cantoral (1999). Pensamiento y lenguaje variacional en la enseñanza contemporánea en *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 12, tomo 1

Carlson, M., Jacobs, S., Coe E., Larsen, S., Hsu, E (2002). Applying Covariational Reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 33, No. 5, pp. 352–378

Dolores, C. y Valero, S. (2004) Estabilidad y Cambio de Concepciones Alternativas Acerca del Análisis de Funciones en Situación Escolar; *Revista Thales*, Universidad de Cádiz, España (en prensa)

Dolores, C. (2003). El análisis de funciones y las concepciones alternativas que de ese proceso se generan. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* Vol. 16 (1)

Dolores, C., Alarcón, G., y Albarrán, D. (2003). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Vol. 16 (3), pp. 225 – 250.

Dolores, C. (2001) El desarrollo del Pensamiento Variacional con Estudiantes Universitarios, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol.14, págs. 337 – 345 (Panamá)

Dolores, C., Catalán, A. (2000). El comportamiento variacional de la función lineal: Una experiencia didáctica con estudiantes del bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* Vol. 13, pp.-36-41.

Duval R. (1999). *Sémiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle / Instituto de Educación y Pedagogía / Grupo de Educación Matemática. Medellín, Colombia, pág. 34

Even, R. (1998) Factors Involved in Linking Representations of Functions, *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 17 Num.1, pp. 105 - 121

Farfán, R. (1995). *Ingeniería Didáctica*, Serie: Antologías. No.1, Area Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav IPN, pp. 63-79

Hitt, F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas, epistemológicos y didácticos; Ed. Fernando Hitt, *Investigaciones en Matemática Educativa*, Grupo Editorial Ibero América.

Mevarech Z., Kramarsky B. (1997). From verbal description to graphic representation: stability and change in students' alternative conceptions. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 32 Núm. 3. pp. 229-263

Janvier, C. (1998). The Notion of Chronicle as an Epistemological Obstacle to the Concept of Function, *Journal of Mathematical Behavior*, Vol.17

Pozo, J. I. (1996). *Teorías cognitivas del aprendizaje*, Ediciones Morata, S. L.;Madrid España, pp. 225 – 253

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. The concept of function. *Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Harel & Dubinsky, Editores. MAA Notes, Vol. 25, pp. 23 – 58.

Tall, D., Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*

Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. Citado por Dolores, C.,2002. Concepciones alternativas que afloran en los estudiantes cuando analizan el comportamiento de funciones a través de sus gráficas. En prensa

Yerushalmy, M., Shternberg, B. (2001) Charting a Visual Course to the Concept of Function, *The Roles of Representation in School Mathematics*, pp. 251 – 268

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa